兩個粗心思考的案例

文 • 圖｜馮華興 黃炫冠

有些題目，一不留意就容易出錯，下面分享兩個案例。

例 1: 已知函數 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 在 R 上是減函數，求實數 a 的取值範圍。

錯解：令 $f'(x)=3ax^2+6x-1<0$

∵函數在 R 上是減函數

∴導函數在 R 上要恆小於 0

此時

$\Delta=b^2-4ac=36+12a<0$

解得

$a<-3$

分析：題目不難，只需令原函數是減函數，則只需令導函數小於 0 即可。但是如果令 $a=-3$，為甚麼就不會是減函數呢？借助計算機可知 $f(x)=-3x^3+3x^2-x+1$ 的圖像如圖 1 所示：

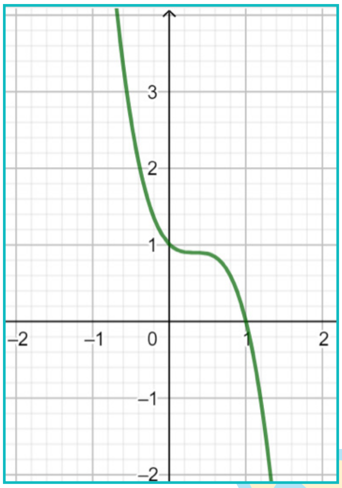

圖 1

可見前面的解答結果有漏洞。漏洞在於理所當然地令導函數小於 0，應該令 $f'(x) \le 0$ 才合理。因為函數圖像中只有一個點的導函數為 0，這並不影響在定義域內遞減的事實。事實上，只要保證原函數在定義域內一階連續可導，且導數為 0 的點是可數個，那麼都可以用 $f'(x) \le 0$ 的方法來求得係數的取值範圍。

例 2：點 M 與直線 $l: x+5=0$ 的距離比它到點 $F(4,0)$ 的距離多 1，求點 M 的軌跡方程。

錯解：根據已知，只需把點向右平移一個單位，

則點 M 與點 $F(5,0)$ 的距離與到直線 $l: x+5=0$ 的距離相等

由拋物線定義，

$F(5,0)$ 為其焦點，則所求方程為：

$y^2 = 20x$。

分析：先不着急評判上述解答是否正確，讓我們來看看另一種分析。

同樣是平移，如果把已知點 $F(4,0)$ 固定，將直線 $l: x+5=0$ 拉近一個單位變為 $l: x+4=0$，則點 M 與定點 $F(4,0)$、定直線 $l: x+4=0$ 的距離相等。由此得到的拋物線方程為 $y^2 = 16x$。

這就妙了：既然距離是相對的，為甚麼同樣固定其中一個不變，一個調整平移最後得到的軌跡方程是不一樣的？直覺告訴我們答案應該是唯一的，肯定有一個錯了。

經過分析，原來是只能相對移動直線，而不能移動點！理由是直線移動 k 個單位，點到直線的距離也改變 k 個單位；而點移動 k 個單位時，點到點的距離並不會因此變化 k 個單位。如圖 2 所示。

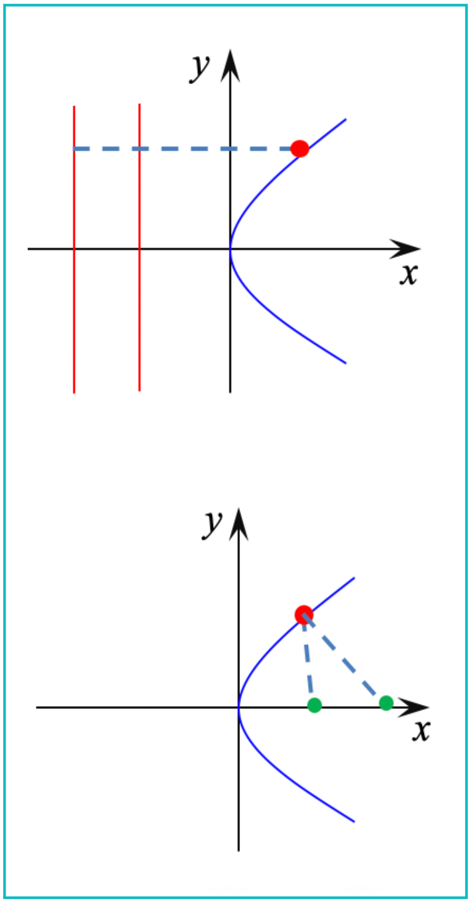

圖 2

這就是例 2 錯解的原因，可見此類問題都必須把點固定，只能移動直線位置來滿足拋物線定義，從而得出軌跡方程。

馮華興
澳門大學附屬應用學校中學部教務副主任

黃炫冠
澳門大學附屬應用學校高中數學科組長