深挖價值，打開認知通法之門——談“被3整除的數的特徵”的教學

文｜吳海燕

“被 3 整除的數的特徵”是小學數學中一個重要的學習內容，它與被 2、5 整除的數的特徵一同被直接應用於分數的大小比較、分數的加減乘除運算，支援分數基本性質的探究與認識等。“被 3 整除的數的特徵”這一學習內容，除了其數學事實的後續運用，實際在認識上還有很重要的作用與價值，本文將對其價值進行分析與闡述。

一、拓寬思路，增長見識

“被 3 整除的數的特徵”的學習在不同版本的教材中都是被安排在“被 2、5 整除的數的特徵”的學習之後，呈現的框架也基本相同。這三個內容的學習都是先呈現出可以被整除的資料資訊，然後在對比觀察下發現特徵。對於“被 2、5 整除的數的特徵”來講，學生的發現相對容易，因為通過資料的表層比較及數認識經驗的支援下，學生可以輕而易舉地發現被 2 整除的數都是雙數，不能被 2 整除的數都是單數，從而得到被 2 整除的數的特徵是個位是 0、2、4、6、8 的數，被 5 整除的數的特徵是個位是 0 或 5 的數。但是“被 3 整除的數的特徵”對學生來說就不易發現了。“發現”在詞典裡的含義是經過研究、探索等，看到或找到前人沒有看到的事物或規律。“被 2、5 整除的數的特徵”的規律發現是外顯的，學生通過對資料的觀察即可獲得對規律的認識，但是“被 3 整除的數的特徵”其規律是內隱的，借助簡單的觀察是無法獲知的。因此前面發現“被 2、5 整除的數的特徵”的學習活動經驗不能直接應用於“被 3 整除的數的特徵”的學習發現之中。故在實際的教學中，教師常常會跳過組織學生進行觀察發現的學習活動，而採用“明確問題—告知答案”這一“短平快”的方式，繼而在課堂上留出充足的時間進行大量練習，以鞏固強化“被 3 整除的數的特徵”，輔助學生準確記憶數學事實。

那麼，問題來了。在“被 3 整除的數的特徵”的學習中，要不要給學生留出時間和空間組織他們進行觀察與發現的學習

活動呢？通過對任課教師的訪談瞭解到，教師之所以不給學生留出觀察發現的時間，是因為教師依經驗知道即使給學生留出時間，學生也是不能夠自己發現的，所以既然發現不了那就乾脆直接告訴學生，這樣省下的時間可以用在理解記憶上，多做幾個練習，以確保學生對特徵的掌握。這樣我們就聚焦在一個新的問題上——給學生留出時間自己觀察發現，在“浪費”了時間還發現不了“被 3 整除的數的特徵”的過程中，學生有無收穫？若有，其收穫是不是必要的有價值的呢？我們可以試想，在學生經過艱苦的努力還沒有獲得結果的情形下再告訴學生，告知的效果會不會更好，獲知結果的學生會不會有豁然開朗、恍然大悟的歡喜？帶着研究假設我們走進課堂，去瞭解學生學習的心路歷程。首先學生借助被 2、5 整除的數的特徵的活動經驗形成被 3 整除的數的特徵的猜想。即：個位上是 3、6、9 的數能被 3 整除……然後學生在觀察比較中推翻自己的假設，然後絞盡腦汁苦思冥想想要找到新的發現，百思不得其解。學生找不到結論，課堂很安靜，大家都在沉思和演算。這樣的一個艱難的過程有甚麼價值嗎？首先學生釐清了自己的思路、清楚並明確了問題，藉此活動打開了學生的感知之門。如此之後再來揭示“被 3 整除的數的特徵”，學生的獲得就不僅僅是數學事實了，更多的學生在課堂總結上談到方法，談到了認識的成長。有學生說：“我知道了一個發現規律的新方法，原來還可以在發現規律裡用到加法的計算。”還有學生說：“是不是以後還可能用到減法、乘法、除法計算或者把計算綜合運用來發現規律呢？”從學生的反思和想法中，我們已經清楚了經歷過程的重要價值。如此探究但“未果”的學習活動啟發了學生對於解題思路的關注，引發了更多的問題與思考，喚起學生對“以後”的好奇與假想。另外，在解決問題的過程中，學生面對困難不斷嘗試，在嘗試中感受挫折面對挫折，這樣的經歷也有助於學生形成百折不撓勇於探究的精神和勇氣。如此學習，在獲知數學知識的同時，積累學習的經驗，拓寬解決問題的思路，獲得認知和心理的成長，培養數學學習興趣，指向學科的育人目標。所以，在學習“被 3 整除的數的特徵”這一內容時，擠佔學生自己嘗試解決問題的時間是不可取的，學生在學習時要經歷自主探究自主發現的學習活動，它在學生的成長中是必要的是不可或缺的。

二、由表及裡，萬象歸一

知道了“被 3 整除的數的特徵”——一個數各個數位上數的和能被 3 整除，這個數就能被 3 整除。但對於大多數的學生來說，其背後的道理還是非常疑惑的，不理解為甚麼會是這樣的。在“被 2、5 整除的數的特徵”學習時，學生借助經驗的

支撐還是可以說服自己的，因為學生對於單數和雙數在生活中積累了豐富的經驗，能夠接受雙數被 2 整除，而單數不行，所以可以認可被 2 整除的數的特徵，即個位是 0、2、4、6、8 的數能被 2 整除。借助一年級就會的 5 個 5 個數數的經驗，學生也能理解個位是 0 或 5 的數能被 5 整除。而“被 3 整除的數的特徵”即使學生進行了大量的舉例驗證，但是仍舊很難清晰其背後的道理。那麼，背後的道理到底是甚麼呢？實際上借助學生之前認識的有餘數除法和乘法分配律，就可以幫助學生解答困惑。

首先我們先來清晰如下一個基本的事實。

因為 10÷3=3……1;100÷3=33……1; 1000÷3=333……1 以此類推

所以 10=3×3+1；100=33×3+1；1000=333×3+1，以此類推。

那麼，要判斷 351 能否被 3 整除？為甚麼用 3+5+1=9，只判斷 3 是否整除 9 就可以了呢？

把 351 與上面的事實建立起聯繫，就可以得到如下的推理。

$$
\begin{aligned}
351&=3\times100+5\times10+1\\
&=3\times[(33\times3)+1]+5\times[(3\times3)+1]+1\\
&=[3\times(33\times3)+3\times1]+[5\times(3\times3)+5\times1]+1\\
&=[3\times(33\times3)+5\times(3\times3)]+[3\times1+5\times1+1]\\
&=[3\times(33\times3)+5\times(3\times3)]+[3+5+1]
\end{aligned}
$$

如此，我們就可以清楚知道 $[3\times(33\times3)+5\times(3\times3)]$ 是 3 的倍數，可以被 3 整除，所以只需要考慮 $[3+5+1]$ 是否被 3 整除，就可以判斷出 351 是否被 3 整除了。

按照如上的方法，“被 2、5 整除的數的特徵”也就可以清晰地理解和解釋了。

因為 10÷2=5;100÷2=50; 1000÷2=500 以此類推

所以 10=2×5；100=2×50；1000=2×500，以此類推。

那麼，給定任何一個數，我們也都可以把數拆分寫成乘加的形式。如：

$$
\begin{aligned}
739&=7\times100+3\times10+9\\
&=7\times2\times50+3\times2\times5+9
\end{aligned}
$$

由此可知，$[7\times2\times50+3\times2\times5]$ 一定能被 2 整除，所以只考慮 9 是否能被 2 整除即可。

被 5 整除的數的特徵道理同上。

如此推演，學生不但知道了被 3 整除的數的特徵是甚麼，還知道為甚麼有這樣的特徵。順着研究的思路也清晰了被 2、5 整除的數的特徵背後的道理。在明確算理的基礎上實現有意義學習，達成數學學習的知其然知其所以然，讓學生明明白白學數學。

翻閱教材關於“被 2、5 整除的數的特徵”和“被 3 整除的數的特徵”的編排，都沒有對其背後道理進行闡釋的內容安排。只讓學生瞭解特徵，對於學習者來説看似是比較容易的，而且知道了數學事實就不影響在後續學習中的應用，可以支持學生繼續學習的腳步。但實際上這是有關“是甚麼”和“為甚麼”的認識和理解問題，是孰重孰輕的取捨問題。在《朱子語類》中多次出現討論知其然與知其所以然的關係問題。從時至今日，我們已經把“知其然知其所以然”當成了認識事物的必然之法。知其然知其所以然的意思是：知道它是這樣的，更知道它為甚麼是這樣的，引申為既知道事物的表面現象，也知道事物的本質及其產生的原因。如果只是知其然而不知其所以然，學生就成了裝載數學事實的容器，缺失對事物真實性、精確性的分析與判斷，無法形成獨立思考的思維品質和理性精神。因此，在特徵的認識中，還是要加上對其背後道理的探究，使學生不僅知道是甚麼，也知道為甚麼，所以建議教材中可以補充闡釋其背後道理的相關內容。

三、大道至簡，運用遷移

在學習了被 3 整除的數的特徵後，自然會產生如下一些新的問題：被 7 整除的數有甚麼特徵？被 9 整除的數有甚麼特徵？被 11 整除的數有甚麼特徵？等等，我們有多少學生產生了問題？有多少學生可以有辦法解決這些問題？如此一些問題，值得我們思考。

當我們解決這些問題時，我們又能夠再一次深深感受到“被 3 整除的數的特徵”背後道理在方法上帶給認識的價值。順着“被 3 整除的數的特徵”的思路，理解了“被 2、5 整除的數的特徵”，那麼“被 7 整除的數的特徵”有怎樣的特徵呢？

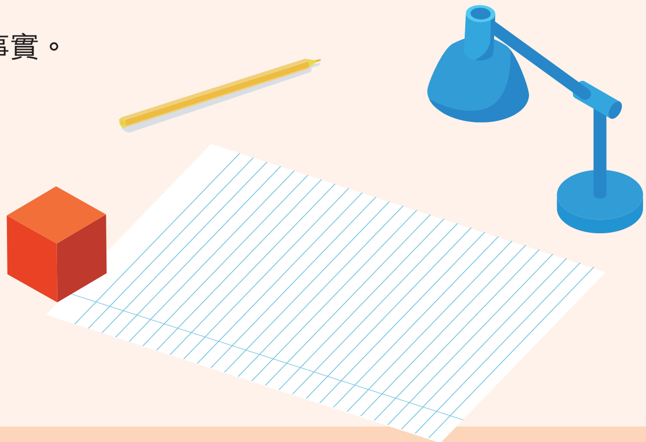
同樣的，我們還是要先確定一些事實。

因為 $10 \div 7 = 1 \cdots\cdots 3$;

$100 \div 7 = 14 \cdots\cdots 2$;

$1000 \div 7 = 142 \cdots\cdots 6$；

$10000 \div 7 = 1428 \cdots\cdots 4$；



$100000 \div 7 = 14285 \cdots\cdots 5$；

$1000000 \div 7 = 142857 \cdots\cdots 1$；

$10000000 \div 7 = 1428571 \cdots\cdots 3$（自此餘數開始重複第一組，出現了迴圈現象）

得到 $10 = 1 \times 7 + 3$;

$100 = 14 \times 7 + 2$;

$1000 = 142 \times 7 + 6$；

$10000 = 1428 \times 7 + 4$；

$100000 = 14285 \times 7 + 5$；

$1000000 = 142857 \times 7 + 1$；

$10000000 = 1428571 \times 7 + 3$（加數 3 重複了第一組，後面循環往復）；

於是，我們發現了被 7 整除的數的特徵，如果有一個多位數，我們用如下方式表示：

$\cdots\cdots GFEDCBA = \cdots\cdots G \times 1000000 + F \times 100000 + E \times 10000 + D \times 1000 + C \times 100 + B \times 10 + A$

$= \cdots\cdots [G \times (142857 \times 7 + 1)] + [F \times (14285 \times 7 + 5)] + [E \times (1428 \times 7 + 4)] + [D \times (142 \times 7 + 6)] + [C \times (14 \times 7 + 2)] + [B \times (1 \times 7 + 3)] + A$

$= \cdots\cdots [G \times 142857 \times 7 + F \times 14285 \times 7 + E \times 1428 \times 7 + D \times 142 \times 7 + C \times 14 \times 7 + B \times 1 \times 7] + [1 \times G + 5 \times F + 4 \times E + 6 \times D + 2 \times C + 3 \times B + A]$

那麼，要知道一個數是否被 7 整除，就看 $[\cdots\cdots G+5F+4E+6D+2C+3B+A]$ 的和能否被 7 整除即可。也可以表示成如下形式：

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots\ldots G & F & E & D & C & B & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ G & 5F & 4E & 6D & 2C & 3B & \end{array}$$

如果數位增加，通過前面算式已經得到的迴圈的規律，亦可依照規律得出判斷的方法。如：

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots\ldots H & G & F & E & D & C & B & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3H & G & 5F & 4E & 6D & 2C & 3B & \end{array} \quad ;\ \ldots\ldots \quad \begin{array}{cccccccccc} \ldots\ldots K & H & G & F & E & D & C & B & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2K & 3H & G & 5F & 4E & 6D & 2C & 3B & \end{array}$$

帶着這樣的思路，就可以獲知被 9 整除的數的特徵。在杜威的《我們怎樣思維》一書中談到：真正的推理活動形成的方法，應該運用懷疑的探究、嘗試的聯想和實驗，獲得經驗之後，回想整個過程中的步驟，看看哪些有用、哪些無用，從而有助於應付未來類似的問題。這樣，組織思維的方法就建立起來了。在“被 3 整除的數的特徵”學習中，學生如果經歷了推理活動的過程，積累了活動的經驗，建立了組織思維，那麼就可以為新問題的產生和解決做好思維和方法上的準備，從而自己解決被 7、9 整除的特徵這樣的問題。同時，也深化了學生對學習的理解，把學習的目標從一個個具體事實上轉移到一類事物的認識上，轉移到方法和經驗的積累上，從而在對一個問題的深入探究中形成對一類問題的認識。所以，被 3 整除的數的特徵其背後道理的探究與理解對學生的認知成長意義重大。

四、適宜變通，形成能力

在清晰了“被 3、7、9 整除的數的特徵”的研究方法之後，“被 11、13 等數整除的數的特徵”是不是也可以如法炮製獲得了呢？帶着經驗和假設，我們也來先得到一些事實，這裡需要引入負數的概念。

10÷11=1……（-1）；

100÷11=9……1;

1000÷11=91……（-1）；

10000÷11=909……1；

100000÷11=9091……（-1）；

1000000÷11=90909……1；以次類推

得到 10=1×11-1;

100=9×11+1;

1000=91×11-1；

10000=909×11+1；

100000=9091×11-1；

1000000=90909×11+1；其他類同

於是，我們得到了單數數位上的餘數都是“1”，而雙數數位上的餘數都是“-1”（從十位開始），那麼就需要看單數數位上的數字和與雙數數位上數字和的差，如果可被 11 整除，那麼這個數就可被 11 整除。如：一個多位數 9141，它的單數位元上的數的和是 1+1=2；雙數位上數的和是 9+4=13；於是 13-2=11，11 能被 11 整除，所以 9141 可以被 11 整除。再用計算驗證一下，9141÷11=831。大家感興趣還可以繼續舉例嘗試。

在被 11 整除的數的特徵研究中，學生們依照“被 3 整除的數的特徵”獲得的解決問題的思路和方法，發現新的問題，從而再進行分析與綜合，借助分類找到了“被 11 整除的數的特徵”。在整個學習過程中，學生經歷了學習環境（條件）的變化，不斷調整改進形成新的假設、進行新的探究，獲得新的方法和經驗，從而不斷豐富認識促進認知的成長。學生帶着新的經驗繼續探究，積累學習經驗，在分析與綜合中深化了對於通法的認識，獲得了簡潔而深刻的認知，體會大道至簡的數學之美。

基於以上種種，“被 3 整除的數的特徵”的學習作用巨大，對道理的理解及探究過程中獲得的方法經驗意義重大。因此，建議教學時可以適時地增補相關內容，引導學生在一個又一個問題的深入研究中獲得認知的成長，感受數學內在規律之美，形成數學的思維和素養。

吳海燕

北京市朝陽區教育科學研究院小學數學教研員、高級教師。2020/2021 學年任職於教育及青年發展局專業技術人員。2020/2021 學年派駐澳門浸信中學及教業中學作教學交流工作。