

一趟數學文化之旅—— 與學生漫談第二次數學危機

文 | 馮美珊

電話震動，微信傳來訊息，打開查看，原來是一位學生詢問我一些數學問題，“0.9 等於 1 嗎？”、“‘ $0=1$ ’的‘證明’哪裡出了問題？”、“無窮小等於零嗎？”、“人類與烏龜賽跑，怎可能追不上烏龜？”……，我查看後耐心地跟他解說，過程中發現這都是關於第二次數學危機的話題，原來他在查找資料時，覺得比較有趣，希望想了解多些。現今資訊發達，為避免了自己冗長的講授，以及因不熟悉引發的錯誤，減低了學生學習的效果，所以我在微信“收藏”裡搜尋了一個解釋較為詳細且生動有趣的視頻給他看，與此同時，我立即翻閱大學時曾着迷過的數學發展史一書快速重溫，《第二次數學危機——追隨著牛頓的幽靈》。

“全新的數學方法 ——微積分”的誕生

十六、十七世紀，由於求切線、求面積、求極值、求速度等問題的需要，在前人的工作基礎上，偉大的科學巨人牛

頓（Newton）和德國的數學家萊布尼茨（Leibniz）各自獨立的找到了同一種全新的數學方法——微積分，他們花了很大的精力試圖精確闡述“無窮小量”的概念，並以此作為整個微積分學的基石。他們定義“無窮小量”是一個比任何非零自然數小但不等於零的量，對它可以進行四則運算，尤為關鍵的是可以做除法，兩個相關的無窮小量的比值表示一個函數的導數，以此為基本語言，他們開始建立微積分學的基本理論。

第二次數學危機 ——追隨着牛頓的幽靈

微積分創立之後，在科學技術上獲得了廣泛而成功的應用，從而迅速地發展。通過微積分的預測，人們在草紙上的演算意外地發現了海王星的踪跡，海王星的存在也在後來通過天文望遠鏡的實際觀測予以證實。這麼巨大的成就使得當時大部分人對這一理論的可靠性深信不疑，但是，支撐這微積分大樓的基石“無窮小量”極

其詭異，例如，有時把“無窮小量”看作不為零的有限量而從等式兩端消去，而有時卻又令“無窮小量”為零忽略不計。較為嚴謹的數學家及哲學家對它提出了批評，指出其缺乏必要的邏輯基礎。無窮小有多少？無窮小量究竟是不是零？兩種答案都會導致矛盾。牛頓對它曾作過三種不同的解釋，但仍然無法解決矛盾，萊布尼茲也曾試圖解決困局，但他沒法找到從有限量過渡到無窮小量的橋樑。1734年，英國大主教貝克萊嘲笑“無窮小量”是“已死量的幽靈”，他發表言論指出“牛頓做了違反矛盾律的要求：先設 x 有增量，又令 x 增量為零，也即假設 x 沒有增量，這是荒謬。”無窮小及其分析是否合理？牛頓無法作出回答，只好避而不談，由此而觸發了數學界長達一個半世紀的爭論，導致了數學史上的第二次數學危機。

化危為機，釋放幽靈

雖然基礎沒有打牢，矛盾沒得到解決，可是微積分確實迸發着巨大的能量，促成了後來一場科學和技術領域的革命，傳統數學家羅爾（Rolle）從起初對微積分的指責，到死前雖依然沒人給出嚴密的證明，但他預感微積分是對的。可是，數學是由不得直覺與經驗來說理，必須依循嚴謹的概念及推理，18世紀中葉，法國數學家達朗貝爾和拉格朗日試圖使微積分嚴謹化，卻在一定程度上宣告失敗。直到19世紀20年代，數學家們開始普遍關注微積分的

嚴謹化問題，他們開啟了一場持續近半個世紀的接力賽，事情到了法國數學家柯西（Cauchy）終於出現了轉捩點。柯西認為“無窮小量”不是一個數，是一個趨於零的過程，因此本質上它是變量，而且是以零為極限的量。柯西重新建立微積分學的基礎——數學分析，透過一套嚴格的數學語言來說明甚麼是變量、無窮小和極限等的概念和定義。至此，柯西澄清了前人的“無窮小量”的概念，他給出了精確的極限定義，然後用極限定義連續性、導數、微分、定積分、無窮級數的收斂性，而這些定義基本上就是我們今天微積分課本中使用的定義，不過，現在寫的更為嚴格一點。然後是魏爾施特拉斯（Weierstras）創立了極限理論，加上實數理論，集合論的建立，從而把“無窮小量”從形而上學的束縛中解放出來，第二次數學危機基本解決。

誰才是“微積分之父”？

翻閱泛黃的書本，一個個曾經輝煌而熟悉的名字躍於紙上，這些巨匠各有引人入勝的故事，天才們在智力的巔峰上對決，劇情跌宕起伏，情節扣人心弦，精彩得令讀者們廢寢忘食。與此同時，學生的訊息又發送過來，他問我誰才是真正的“微積分之父”？我說：“事實上，牛頓先發現了微積分，但較萊布尼茨晚發表，而萊布尼茨在時間上雖較



晚發現，卻較牛頓早發表，且先進許多，並投入實際應用，他所創造的微分記號也沿用至今。他們兩人跨海峽，彼此獨立發明微積分，兩人曾因微積分的學術優先權引發了激烈的爭奪戰，但隨着他們與世長辭，個人的恩仇終被歲月的洪流沖淡，因着牛頓—萊布尼茨公式，把兩人牢牢的綁在一起，無法分開，誰先發明微積分已經不重要，重要的是他們的偉大成果為人類所共享，推動不同領域劃時代的發展。”

只要思想不滑坡，辦法總比困難多

學生得知原來數學界有這麼多危機，覺得數學挺不靠譜，也表示憂慮，我說：“在整個數學史上，有着許多矛盾的鬥爭，如非歐幾何對歐氏幾何的沖擊、連續變化的量與不連續離散的數、微積分帶來的分析困境、集合論的悖論與其他邏輯悖論的出現等，當這些矛盾激化到涉及整個數學的基礎時，就產生數學危機。無理數觸發第一次數學危機，無窮小量觸發了第二次，羅素悖論觸發了第三次，次次足以摧毀整座數學大廈，但每次都能安然無恙。有危才有機，往往隨着危機的解決，穩固了根基，也帶來了新內容，促使了數學的新進展，甚至引起革命性的變革。或許不久的將來，會由你策動第四次數學危機啦。”學生像是被我的說法雷到了，發了一個“震驚”的表情給我，然後跟我說：“我只是一個普通學生，成績又不是特別好，怎能跟天才比呢！”我說：“不

要妄自菲薄，少年時的牛頓並不是神童，成績一般，但術業有專攻，選擇在正確的方向努力，付出會有回報的。另外，但凡學術上的創見和發現，都是循着前人開闢的道路進行，牛頓和萊布尼茨都會廣泛閱讀各類書籍，站在巨人的肩膀上看世界，能比前人看得更多更遠。”學生再向我表示“他覺得世上所有的事情都存在錯誤的，在乎人類是否能找出來”，我說：“我只能說世事無絕對，雖然笛卡兒說‘我思，故我存在’，對事情存疑、有批判精神是好的，但也不用太杞人憂天，一個理論體系實力雄厚，不會那麼容易分崩離析，以數學大廈為例，雖然經歷了三次危機，但只要修補完善一下，不但能繼續用，還能衍生出其他數學分支，壯大實力。人總能迎難而上，辦法總比困難多，只要有信念，相信一定可以有辦法，就會不斷地尋找方法，直到成功。”

人非生而知之者，孰能無惑？

灌輸一系列的心靈雞湯後，因為知道那個學生很喜歡閱讀，所以推薦了赫爾曼著作的《數學恩仇錄：數學家的十大論戰》一書給他，然後愉快地與他結束了對話。很享受與學生討論數學話題，忽然憶起多年前的一個片段：“老師，我想像不到內角和大於 180° 的三角形是怎麼模樣。”這是因為我在課堂上曾說過歐幾里得幾何的三角形的內角和是 180° ，但非歐幾何下，三角形的內角和可以大於或小

於 180° 的。想不到那位學生對這話題很感興趣，下課後與另一位學生結伴找我再了解，我跟他談論了歐氏幾何中平行公理的缺陷，黎曼幾何（球面幾何）中的三角形等，然後，他很興奮地跟我說：“我想到了，地球儀上的兩條經線與緯線組成的三角形，它的內角和就大於 180° 了。”我很高興他能利用所學到的地理知識進行舉例，也忽然對“師者，所以傳道、受業、解惑也”這一名言有了更深刻的體會。

從數學史了解前人的 奮鬥歷程和治學精神

數學史是數學文化的載體，2017 年版普通高中數學課程標準強調將數學史融入高中數學教學裡，引導學生了解數學的發展歷程，是促進數學學習的必要途徑。由於課堂教學和授課者自身的各種局限，教師們大多數是對數理的知識點和解題進行講授，但了解知識形成的過程是掌握知識本質的一個不可或缺的環節，若能從教學中引入一些數學史料，學生通過溯源的“理解”得以窺探知識的“製造”過程，感受創造知識的樂趣，感悟數學家們百折不撓的求真態度，為高冷的數學加添點“人味”，從而拉近數學與現實生活之間的距離。對於這次與學生漫談第二次數學危機的過程中，我也在溫故知新，通過對資料的查證，也更新和增添了自身的知識儲備。現在的我，除了希望我親愛的學生們都能“吾愛吾師，吾更愛真理”

外，對於自身的學科素養和數學文化底蘊的提升也是具必要性和急切性的，數學教師應該積極廣泛閱讀數學史記、數學家生平、數學思想等書籍，並把它們滲透到課堂的教學裡，才能讓學生有更廣濶的視野了解數學及其文化，有利於增強學生的數學情感，薰陶其數學的理性精神，並改進對數學問題探究的態度。📖

馮美珊

澳門坊眾學校中學教師

