2017/2018 學年教學設計獎勵計劃

等 差 數 列

科目 ： 數學

教育階段 ： 高中一

參賽編號 ： C071

目次

簡介

等差數列是高中數學重要內容之一，它有著廣泛的實際應用，也是培養學生思維能力及數學能力的良好題材。

教學過程通過數學實例，首先引導學生掌握數列的概念、通項公式、遞推公式等內容，然後介紹等差數列的概念、等差數列的通項公式和等差數列的前n項和公式。

本章教學著重多舉例題，由淺入深引導學生如何進行觀察、分析、探索，並通過觀察、分析、探索，歸納出概念及公式，從而掌握所學內容。教學中重視教學過程，培養學生學習興趣、愛探究的學習態度。

教學目標、主要內容、設計創意和特色:

教學目標	1. 理解數列、數列的項的概念。 2. 理解數列通項公式的意義，會寫出數列的通項公，並會用數列的通項公式寫出數列的前幾項。 3. 了解遞推公式是給出數列的一種方法，並能根據遞推公式寫出數列的前幾項。 4. 理解等差數列的概念，掌握等差數列的通項公式與前 n 項和公式及其推導，並能運用公式解決相關的問題。
主要內容	1. 數列、數列的項的概念。 2. 有窮數列、無窮數列的概念。 3. 數列的通項公式及遞推公式。 4. 等差數列的概念、等差數列的通項公式及差數列的前 n 項和公式。 5. 等差中項。
設計創意和特色	通過數學例子，讓學生掌握數列與等差數列的概念。公式的推導著重引導學生進行思考、探索、推理歸納，藉此引起學生學習的興趣以及促進學生思考，讓學生明白過程的重要性，培養學生在學習過程中學習知識、領會知識的習慣。

教學進度表					
課節	課題	課題內容	授課時間	課時	基本學歷要求編號
第 1,2 節	數列	1.數列 2.通項公式 3.有窮數列、 無窮數列 4.遞推公式	2018/01/11	2	A-6-1 A-6-2
第 3 節	等差數列	1.等差數列 2.等差數列通項公式	2018/01/15	1	A-6-3 A-6-4
第 4,5 節	等差數列	1.等差數列及等差數列通項公式的應用 2.等差中項	2018/01/16	2	A-6-3 A-6-4
第 6,7 節	等差數列的前 n 項和	1.等差數列的前 n 項和公式的推導及應用	2018/01/18	2	A-6-5 A-6-6

教案

<table>
<tr><td>課題</td><td>數列　　　　　　　　　　(第 1 課時，第 2 課時)</td></tr>
<tr><td>教學目標</td><td>1. 理解數列的概念、數列的項。
2. 掌握數列的通項公式和遞推公式，能根據公式寫出數列的前幾項。
3. 理解有窮數列、無窮數列等概念。</td></tr>
<tr><td>教學重點</td><td>數列的概念、數列的通項公式及遞推公式。</td></tr>
<tr><td>教學難點</td><td>概据數列的前幾項寫出數列的一個通項公式</td></tr>
<tr><td>教學過程</td><td>一. 引入
1. 看下面例子:
(1). 1, 2, 2^2, 2^3, …… 2^{63} 。
(2). 2, 4, 6, 8, 10, 12, …… 。
(3). 5, 4, 3, 2, 1 。
(4). 一次測驗, 8 位同學由低至高的分數: 49, 50, 55, 60, 65, 70, 85, 90。
(5). 4A 班 30 位同學的學號由小到大排列: 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, 30。
(6). 由 2 點鐘開始, 4 位同學入課室的時間: 2.01, 2.02, 2.03, 2.04。
(7). 由 1 號至 5 號的同學的身高: 1.5, 1.8 , 1.7, 1.65, 1.6。

<問>: 以上各例子排序上有什麼特點?
<答>: 按其指定的次序排成一列。

二. 新課內容:
(一). 數列
數列: 按一定次序排列的一列數叫做數列。
數列中的每一個數都叫做這個數列的項,
各項依次叫做這個數列的第 1 項(或首項)，第 2 項, ...,第 n 項。
數列的一般形式可以寫成 ： $a_1, a_2, ... a_n, ...$
其中 a_n 為數列的第 n 項
數列簡記作: $\{a_n\}$

<問>: 數列 2, 4, 6, 8, 10, 12 共有多少項? 第 1 項,第 2 項,第 4 項,第 6 項,各是什麼?
<答>: 數列 2, 4, 6, 8, 10, 12 共有 6 項，第 1 項是 2，第 2 項是 4，第 4 項是 8，第 6 項是 12。</td></tr>
</table>

(二). 有窮數列與無窮數列

<問>: 數列 2, 4, 6, 8, 10, 12,……有多少項?

<答>: 數列 2, 4, 6, 8, 10, 12,……項數無限

<問>: 數列: 1, 2, $2^2, 2^3, \cdots\cdots 2^{63}$ 有多少項?

<答>: 數列: 1, 2, $2^2, 2^3, \cdots\cdots 2^{63}$ 有 64 項, 項數有限

數列 $\begin{cases} \text{項數有限的數列叫有窮數列} \\ \text{項數無限的數列叫無窮數列} \end{cases}$

<問>: 下列各例, 哪些是有窮數列, 哪些是無窮數列?

(1). 1, 2, $2^2, 2^3, \cdots\cdots 2^{63}$

(2). 2, 4, 6, 8, 10, 12,…….

(3). 5, 4, 3, 2, 1

(4). 一次測驗, 8 位同學由低至高的分數: 49, 50, 55, 60, 65, 70, 85, 90

(5). 4A 班 30 位同學的學號由小至大排列: 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, 30

(6). 由 2 點鐘 4 位同學入課室的時間: 2.01, 2.02, 2.03, 2.04

(7). 由 1 號至 5 號的同學的身高: 1.5, 1.8 , 1.7, 1.65, 1.6

<答>: 有窮數列: (1), (3), (4), (5), (6), (7)

無窮數列: (2)

(三). 通項公式

舉例: 數列: 2, 4, 6, 8, 10, 12,…… 。

<問>: 第 5 項是什麼?

<答>: $a_5 = 10$

<問>: 該數列第 n 項a_n 與 n 之間有什麼關係?

<答>: $a_n = 2n$

通項公式: 如果數列$\{a_n\}$的第 n 項a_n與 n 之間的關係**可以**用一個公式來表示, 這個公式叫做這個數列的通項公式。

(四). 用圖像表示數列

以數列 1, 2, $2^2, 2^3, \cdots\cdots 2^{63}$ 為例

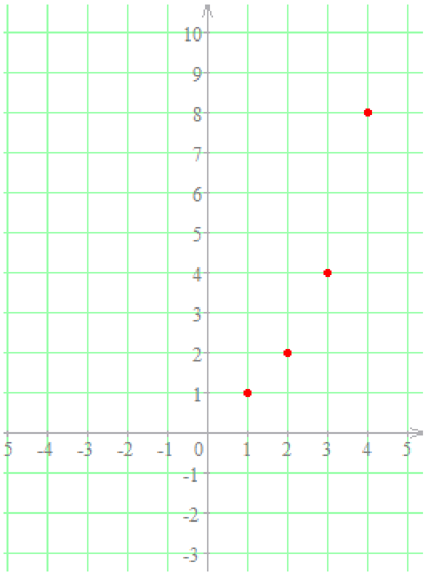
設每一項的序號為 x, 每一項為 y, 則 x 與 y 有 $y = 2^{x-1} (x \leqq 64)$的對應關係。

從函數的觀點看，數列可以看作是一個定義域為正整數集 N^* 的函數當自變量從小到大依次取值時對應的一列函數值，而數列的通項公式也就是相應函數的解析式。

數列也可以用圖像來表示

如：數列 $1, 2, 2^2, 2^3, \cdots\cdots 2^{63}$,按關係式： $y = 2^{x-1}(x \le 64)$,

則各點的座標分別是: (1,1), (2,2), (3,4), (4,8), $\cdots$, $(64, 2^{63})$，圖像如下:



圖像是一群孤立的點

(五). 例題:

例 1. 根據下面數列$\{a_n\}$的通項公式，寫出它的前 5 項

(1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$　　　(2) $a_n = (-1)^n \cdot n$

解: (1) 依次取 $n = 1,2,3,4,5$ 代入 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 得到數列$\{a_n\}$的前 5 項為:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = \frac{5}{6}$$

(2) 依次取 $n = 1,2,3,4,5$ 代入 $a_n = (-1)^n \cdot n$ 得到數列$\{a_n\}$的前 5 項為:

$$a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 4, a_5 = -5$$

【讓學生嘗試去完成。】

<問>: 給予一數列的通項公式, 可以寫出該數列的前幾項, 相反, 若給出一數列的前幾項, 可以寫出它的通項公式嗎?
(為下面求數列的通項公式作思想準備)

例 2. 寫出下面數列的一個通項公式, 使它的前 4 項分別是下列各數:

(1). 1, 3, 5, 7

(2). $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5},$

(3). $-\frac{1}{1\times2}, \frac{1}{2\times3}, -\frac{1}{3\times4}, \frac{1}{4\times5},$

解:

(1) $a_n = 2n-1$

(2) $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)}$

(3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

【讓學生先觀看, 找出規律, 後總結, 並寫出數列的通項公式。】

(六). 鞏固練習題:

1. 根據下面數列$\{a_n\}$的通項公式, 寫出它的前 5 項:

(1) $a_n = n^2$　　　(2) $a_n = 10n$

2. 根據下面數列$\{a_n\}$的通項公式, 寫出它的第 7 項與第 10 項:

(1) $a_n = \frac{1}{n^3}$　　　(2) $a_n = n(n+2)$

3. 說出下面數列的一個通項公式, 使它的前 4 項分別是下列各數:

(1) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$

(2) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

4. 觀察下面數列的特點, 用適當的數填空, 並寫出每個數列的一個通項公式。

(1) 2, 4, 6, 32, ( ), 128

(2) $-1, \frac{1}{2}, ( ), \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ( )$

	(七). 遞推公式: 讓學生完成下面練習: (1) 由通項公式$a_n = 2n$，寫出數列$\{a_n\}$的各項。 (2) 若知道一數列的$a_1 = 2$及$a_n = a_{n-1} + 2$,寫出數列$\{a_n\}$的各項。 (3) 若知道一數列的$a_2 = 4, a_3 = 6$及$a_n = a_{n-1} + 2$,寫出數列$\{a_n\}$的各項。 【讓學生說出結果:　三題的答案都是: 2, 4, 6, 8, ...】 遞推公式: 如果已知數列$\{a_n\}$第 1 項(或前幾項)，且任一項a_n與它的前一項a_{n-1}(或前幾項)間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫做這個數列的遞推公式。 (遞推公式也是給出數列的一種方法) **(八). 例題:** 例 3. 已知數列$\{a_n\}$的第 1 項是 1,以後的各項由公式$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$給出，寫出這個數列的前 5 項。 解: $a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 2, a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2}, a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{3}, a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = \frac{8}{5}$ **(九). 鞏固練習題:** 寫出下面數列$\{a_n\}$的前 5 項 1. $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 3 (n \ge 2)$ 2. $a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} (n \ge 2)$
課堂小結	1. 今天學習了什麼內容? 2. 什麼是數列? 3. 數列分幾類? 4. 數列的通項公式是哪兩者的關係? 5. 遞推公式也是給出數列的一種方法。 6. 數列$\{a_n\}$的通項公式中 n 由什麼數開始?
功課	1. 寫出下面數列的一個通項式，使它的前 4 項分別是下列各數 (1) 3, 6, 9, 12 (2) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ (3) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, -\frac{1}{2\times4}$

	2. 已知無窮數列$1\times 2,2\times 3,3\times 4,\ldots,n(n+1),\ldots$ (1) 求這個數列的第 10 項，第 31 項及第 48 項。 (2) 420 是不是這個數列中的項? 如果是，是第幾項? 3. 寫出下面數列$\{a_n\}$的前 5 項 (1) $a_1=\frac{1}{2},a_n=4a_{n-1}+1(n\geq 2)$ (2) $a_1=-\frac{1}{4},a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}+3(n\geq 2)$
試教評估 與 反思建議	1. 通過多舉例子，引入數列的概念，能加強學生對數列的理解。 2. 強調數列$\{a_n\}$的通項公式中n是由 1 開始。 3. 講解完例題 1 後,問學生若給出一數列的前幾項，能否寫出它的通項公式? 並讓學生說出例題 1 兩數列的規律，為後面例題 2 求數列的通項公式作準備， 能加強學生的學習興趣及求數列通項公式的能力。 4. 教授學生求數列的通項公式時，先讓學生觀看，再找出規律，然後寫出數列的通項公式。 5. 递推公式對於部份學生較難理解，初期應用上也會遇到一定困難，因此應用递推公式求數列各項時，應多舉例，並詳細列出各項的求解過程。

課題	**等差數列　　　　　　　　(第 1 課時)**
教學目標	**1. 理解等差數列的概念。** **2. 掌握等差數列的通項公式，並能用公式解決一些簡單的實際問題。**
教學重點	**等差數列的概念及等差數列的通項公式**
教學難點	**等差數列的通項公式的應用**
教學過程	一. 複習引入 <問>: 數列概念? <答>:按一定次序排列的一列數叫做數列。 1. 讓學生觀察以下數列由第二項起，每一項與前一項之間有什麼關係? (1) 2, 4, 6, 8, 10…… (2) 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, …… 2. 引出本節課題:<<等差數列>> 二. 新課內容 **(一) .等差數列:** 1.等差數列: 一般地，如果一個數列從第 2 項起，每一項與它的前一項的差等於同一個常數，那麼這個數列就叫做**等差數列**。 這個常數叫做等差數列的公差，公差用字母 d 表示。 2. 等差數列 $\{a_n\}$ 的通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 的推導: 已知一等差數列 $\{a_n\}$ 的首項為 a_1，公差為 d <問>: $a_2 = ?$　<答>: $a_2 = a_1 + d$ <問>: $a_3 = ?$　<答>: $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ <問>: $a_4 = ?$　<答>: $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ <問>: $a_n = ?$　(讓同學總結) **等差數列的通項公式:** $a_n = a_1 + (n-1)d$

	(二). 例題: 例 1. (1) 求等差數列 8,5,2, ...的第 20 項 (2) -401是不是等差數列$-5,-9,-13,....$的項? 如果是, 是第幾項? 解: (1) $\because a_1=8, d=5-8=-3, n=20$ $\therefore a_{20}=8+(20-1)(-3)=-49$ **(2)** $\because a_1=-5, d=-9-(-5)=-4$ 由等差數列的通項公式: $a_n=a_1+(n-1)d$ $-401=-5+(n-1)(-4)$ $n=100$ $\therefore -401$是等差數列$-5,-9,-13,....$的項,是第 100 項。 例 2. 在等差數列$\{a\}$中, 已知$a_5=10, a_{12}=31$,求首項a_1與公差 d。 解: 由題意及等差數列的通項公式: $a_n=a_1+(n-1)d$ 得: $\begin{cases}10=a_1+(5-1)d\\31=a_1+(12-1)d\end{cases}$ $\therefore a_1=-2, d=3$
課堂練習	1. 求等差數列 3, 7, 11, ... 的第 4 項與第 10 項。 2. 求等差數列 10, 8, 6, ... 的第 20 項。 3. 在等差數列$\{a\}$中, (1) 已知$a_4=10, a_7=19$,求a_1與d 。 (2) 已知$a_3=9, a_9=3$,求a_{12} 。
課堂小結	1. 什麼叫等差數列? 2. 等差數列的通項公式?
功課	1. 在等差數列$\{a\}$中, (1) 已知a_1=2, d=3, n=10, 求a_n 。 (2) 已知a_1=3, a_n=21, d=2, 求n 。 (3) 已知a_1=12, a_6=27, 求d 。 (4) 已知$d=-\frac{1}{3}$, a_7=8,求a_1 。

	2. 在等差數列$\{a\}$中, (1) 已知$a_5=-1$，$a_8=2$，$d=2$，求a_1與d 。 (2) 已知$a_1+a_6=12$，$a_4=7$，求a_9 。
試教評估與反思建議	等差數列通項公式的推導過程中，利用提問形式，一問一答，逐步引領同學找出規律，然後總結，這樣能有效提升同學的數學思維及加深對相關內容的理解。

<table>
<tr><td>課題</td><td>等差數列 (第 2 課時，第 3 課時)</td></tr>
<tr><td>教學目標</td><td>1. 掌握等差數列的通項公式，並能用公式解決一些簡單的實際問題。
2. 掌握等差中項及其充要條件，並會求兩個數的等差中項。</td></tr>
<tr><td>教學重點</td><td>1. 掌握等差數列的通項公式的應用
2. 會求兩個數的等差中項</td></tr>
<tr><td>教學難點</td><td>等差數列的通項公式的應用</td></tr>
<tr><td>教學過程</td><td>一. 複習引入
<問>: 等差數列?
<答>: 一般地，如果一個數列從第 2 項起，每一項與它的前一項的差等於同一個常數，那麼這個數列就叫做等差數列。
這個常數叫做等差數列的公差，公差用字母 d 表示

<問>: 等差數列的通項公式?
<答>: $a_n = a_1 + (n-1)d$

二. 新課內容:
(一). 例題:
例 1. 梯子的最高一級闊 33cm，最低一級闊 110cm，中間還有 10 級，各級的闊度成等差數列，計算中間各級的闊度。
解: 設梯子由上而下各級闊度成等差數列，由題意:
$a_1 = 33, a_{12} = 110$
$\because a_1 = 33$
$\therefore a_{12} = a_1 + 11d = 33 + 11d = 110$
$\therefore d = 7$
$\therefore a_1 = 33, a_2 = 40, a_3 = 47, a_4 = 54, a_5 = 61, a_6 = 68, a_7 = 75,$
$a_8 = 82, a_9 = 89, a_{10} = 96, a_{11} = 103, a_{12} = 110$
梯子自上而下各級闊度分別
33cm, ,40cm,47cm,54cm,61cm,68cm,75cm,82cm,89cm,96cm,103cm,110cm

【以上例題是已知兩個數，在兩個數之間插入一些數，使其成為等差數列。】

(二). 等差中項:
<問>: 如果在 a 與 b 中間插入一個數 A，使 a 、A、b 成等差數列，則 A 應滿足什麼條件?
【引導學生思考並回答下面問題。】
<問>: 等差數列?
<答>: 如果一個數列從第 2 項起，每一項與它的前一項的差等於同一個常數，</td></tr>
</table>

那麼這個數列就叫做**等差數列**。

<問>: $A-a$ 與 $b-A$ 有什麼關係?

<答>: $A-a=b-A$

因為: $A-a=b-A$

則有: $A=\frac{a+b}{2}$

相反,

若有: $A=\frac{a+b}{2}$

則有: $2A=a+b$

$A-a=b-A$

即 a, A, b 成等差數列

等差中項: 如果 a, A, b 成等差數列, 則 A 叫做 a 與 b 的等差中項。

<問>: 在一個等差數列中, 從第 2 項起, 每一項(有窮等差數列的末項除外)與它的前一項與後一項有什麼關係?

<答>: 每一項是(有窮等差數列的末項除外)是它的前一項與後一項的等差中項。

(三). 例題:

例 2. 已知數列的通項公式為 $a_n=pn+q$, 其中 p, q 是常數, 且 $p\neq 0$, 那麼這個數列是否一定是等差數列? 如果是, 其首項與公差是什麼?

分析: 由等差數列的定義, 要判定 $\{a\}$ 是不是等差數列, 只要看 $a_n-a_{n-1}(n\geq 2)$ 是不是一個與 n 無關的常數就行了。

解: 取數列 $\{a_n\}$ 中的任意相鄰兩項 a_n 與 $a_{n-1}(n\geq 2)$

$a_n-a_{n-1}=(pn+q)-[p(n-1)+q]=p$

p 是一個與 n 無關的常數, 所以 $\{a\}$ 是等差數列, 公差是 p

在通項公式 $a_n=pn+q$ 中令 $n=1$ 得

首項 $a_1=p+q$

所以這個等差數列的首項是 $p+q$, 公差是 p

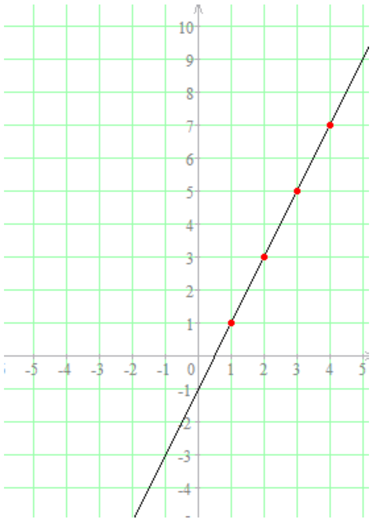
等差數列的通項公式可以表示為: $a_n=pn+q$, (p, q 是常數)

當 $p\neq 0$ 時, 它是關於 n 的一次式, 因此:

從圖像上看, 表示這個數列的各點均在一次函數 $a_n=pn+q$ 的圖像上。

例如: 首項是 1, 公差是 2 的無窮等差數列的通項公式為 $a_n=2n-1$

相應的圖像是直線 $y=2x-1$ 上的均勻排開的無窮多個孤立點。如圖

	
課堂練習	1. 求下列各題中兩個數的等差中項 (1) 100 與 180　　(2) -2 與 6 2. 一種車床變速箱 8 個齒輪的齒數成等差數列，其中首末兩個齒輪的齒數分別是 24 與 45，求其餘各齒輪的齒數。
課堂小結	讓同學說一說本節所學內容。
功課	1. 求下列各題中兩個數的等差中項: (1) $\dfrac{8-\sqrt{2}}{2}$ 與 $\dfrac{12+\sqrt{2}}{2}$　　(2) $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 2. 安裝在一個公共軸上的 5 個皮帶輪的直徑成等差數列，其中最大的與最小的皮帶輪的直徑分別是 216cm 與 120cm，求中間三個皮帶輪的直徑。 3. 已知數列 $\{a\}$ 是等差數列 (1) $2a_5 = a_3 + a_7$ 是否成立? $2a_5 = a_1 + a_9$ 是否成立? (2) $2a_n = a_{n-2} + a_{n+2} (n > 2)$ 是否成立? $2a_n = a_{n-k} + a_{n+k} (n > k > 0)$ 是否成立?
試教評估 與 反思建議	1. 在兩個數中插入一些數，使其成為等差數列，部份同學不知道應如何著手解題，這時候,老師在旁引導學生思考，讓學生動手，能增強同學的學習興趣。 2. 讓學生多動手，多思考是掌握解題技巧，提升數學思維的重要要素。

題目	等差數列的前 n 項和 (第 1 課時，第 2 課時)
教學目標	握等差數列前 n 項和公式，並能運用公式解決一些簡單的問題。
教學重點	等差數列前 n 項和公式
教學難點	用等差數列前 n 項和公式的應用
教學過程	一. 引入 我們學習了數列與等差數列，本節學習如何去求一個等差數列的前 n 項之和。 如何去求等差數列的前 n 項之和？請先解答以下問題: <問>: 1+2+3+⋯⋯+100=? 讓同學思考，看看同學能否有快速方法求之，若有，請同學到黑板講解，分享。 然後再介紹高斯的算法。 德國一位著明的數學家，名叫高斯(GAUSS，C.F.，1777 年~1855 年)，他很快就求出結果，當時他只有 10 歲。 高斯的算法是: 末項與首項之和為: 1+100=101 第 2 項與倒數第 2 項之和為: 2+99=101 第 3 項與倒數第 3 項之和為: 3+98=101 ⋯⋯ 第 50 項與倒數第 50 項之和為: 50+51=101 共有 50 個 101，於是: $1+2+3+\cdots\cdots+100=101\times\frac{100}{2}=5050$ 二. 新課內容 **(一). 等差數列前 n 項和:** <問>.上面的問題，可以看成求等差數列: 1, 2, 3, ⋯, n,⋯的前 100 項的和。 求解過程中，同學能發現其特性嗎? <問>: 已知一等差數列: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$.，如何求前 n 項之和? 【與同學一起推導等差數列前n項和公式】

1. 等差數列的前 n 項和公式推導:

設等差數列$\{a\}$的前 n 項和為S_n，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

由等差數列通項公式，上式寫成:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d)\ldots + [a_1 + (n-2)d + [a_1 + (n-1)d]$$

把各項次序反過來:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-2)d] + [a_n - (n-1)d]$$

把

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-2)d + [a_1 + (n-1)d]$與

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-2)d] + [a_n - (n-1)d]$

兩邊分別相加得:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

等差數列的前 n 項和公式: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

【讓同學把等差數列的通項公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入上式】

得:

等差數列的前 n 項和公式: $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

(二)．例題:

例 1.某長跑運動員 7 天里每天的訓練量(單位:m)是:

7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500

這位長跑運動員 7 天共跑了多少米?

解: 方法一:

這位運動員 7 天里每天的訓練量成等差數列，記作$\{a_n\}$，$a_1 = 7500$，$a_7 = 10500$

$$S_7 = \frac{7 \times (7500 + 10500)}{2} = 63000$$

答: 這位長跑運動員 7 天共跑了 63000 米

<問>: 還有什麼方法?

方法二:

這位運動員 7 天里每天的訓練量成等差數列，記作$\{a_n\}$，$a_1 = 7500$，

$d = 8000 - 7500 = 500, n = 7$

$$S_7 = 7 \times 7500 + \frac{7 \times 6}{2} \times 500 = 63000$$

答: 這位長跑運動員 7 天共跑了 63000 米

<問>: 用哪個公式較方便?為什麼?

(三). 鞏固練習:

1. 根據下列各題中的條件，求相應的等差數列$\{a_n\}$的S_n:
   (1) $a_1 = 5, a_n = 95, n = 10$
   (2) $a_1 = 100, d = -2, n = 50$
   (3) $a_1 = 14.5, d = 0.7, a_n = 32$

(四). 例題:

例 2. 等差數列$-10,-6,-2,2\ldots$前多少項的和是 54?

解: 設題中的等差數列為$\{a_n\}$,前 n 項和為: s_n

則: $a_1 = -10, d = -6 + 10 = 4,$

設s_n=54,由等差數列前 n 項公式:

$$54 = -10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4$$

$$n^2 - 6n - 27 = 0 \rightarrow (n-9)(n+3) = 0$$

$n_1 = 9, n_2 = -3$(捨去)

答:等差數列$-10,\ -6,\ -2,\ 2, \cdots$. 前 9 項的和是 54

【等差數列的前 n 項和公式有兩個，同學解題時，有時候不知道應該選用哪一個去求解，可讓他們去試一試，然後讓同學總結應選用哪一個，並且問他們為什麼這樣選。】

例 3. 已知一個等差數列的前 10 項的和是 310，前 20 項的和是 1220，求其前 n 項和的公式。

解: 由題意: $s_{10} = 310,\quad s_{20} = 1220$

$$\begin{cases} s_{10} = 10a_1 + \frac{10\times 9}{2}d = 310 \\ s_{20} = 20a_1 + \frac{20\times 19}{2}d = 1220 \end{cases}$$

$a_1 = 4, d = 6$

前 n 項和的公式: $s_n = 4n + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 = 3n^2 + n$

例 4.求集合$M = \{m | m = 7n, n \in N^*, 且 m < 100\}$中元素的個數，並求這些元素的和。

解: 由$7n < 100$,得

$$n < \frac{100}{7}$$

	$n < 14\frac{2}{7}$ 滿足不等式正整數 n 共有 14 個，所以集合 M 中的元素共有 14 個，將它們從小到大列出，得：$7, 7\times 2, 7\times 3, ..., 7\times 14$ 即： 7, 14, 21, ⋯, 98 這個數列是等差數列，記為 $\{a_n\}$，其中 $a_1 = 7, a_{14} = 98$,因此: $S_n = \frac{14\times(7+98)}{2} = 735$ 答：集合 M 共有 14 個元素，它們的和等於 735。
鞏固練習	1. 等差數列 5, 4, 3, 2, ⋯前多少項的和是 -30？ 2. 求集合 $M = \{m \mid m = 2n-1, n \in N^*, 且 m < 60\}$ 中元素的個數，並求這些元素的和。 3. 如果等差數列 $\{a_n\}$ 的前 4 項的和是 2，前 9 項的和是 -6，求前 n 項和的公式。
課堂小結	1. 等差數列的前 n 項和公式? 2. 解題前先查看已知條件，再由已知條件判斷應選用哪一個等差數列前 n 項和公式去解題。
功課	1. 求等差數列 13, 15, 17, ⋯, 18 各項的和。 2. 一個等差數列前 4 項的和是 24，前 5 項的和與前 2 項的和的差是 27,求這個等差數列的通項公式。 3. 如果等差數列 $\{a_n\}$ 的前 4 項的和是 28，前 7 項的和是 28，求其前 n 項和的公式。 附加題：【給予有能力的同學】 4. 在小於 100 的正整數中共有多少個數被 3 除餘 2? 這些數的和是多少?
試教評估與反思建議	1. 由問題: 1+2+3+⋯⋯+100=?開始，讓學生進行思考，再介紹高斯解題方法，從中激發學生的學習興趣，然後再引導學生推導等差數列的前 n 項和公式，能提升學生對新課內容的掌握及理解。 2. 等差數列的前 n 項和公式有兩個，同學解題時，有時候不知道應該選用哪一個去求解，可讓他們去試一試，然後讓同學總結應選用哪一個。 3. 兩堂連堂，學生會感到有點攰，所以講完例 1 後，先讓學生進行課堂練習，然後講解其它例題，再進行課堂練習會比較好一點。

參考文獻及相關教材

全日制普通高級中學教科書(必修), **數學** ，第一冊(上), 人民教育出版社。
全日制普通高級中學教科書(必修), 數學第一冊(上), **教師教學用書**, 人民教育出版社。
SUPER, **無敵高一數學**, 海豚出版社。