2017 / 2018 學年教學設計獎勵計畫

對數及其應用舉例

參選編號：C079
科目：數學
適合年級：高一

簡介

本單元教案首先介紹對數產生的歷史激發學生的學習興趣，在學生產生學習慾望時，運用認知同構學習論中的先行組織者的方法對傳統的教學進行重新設計，從而幫助學生在已掌握的基礎上建構新運算——“對數”.

在學生掌握了對數的新概念後，教師創設了一個實際的情景——“如何求兩個大數的乘法”，從而展開對數性質的學習. 在對數性質的學習過程中，教師的處理手法與傳統的教學有所不同，這時候再次使用先行組織者的方法，引導學生使用第一課節已掌握的幾個代數式，對三條運算性質進行證明.

最後，在學完了對數的定義及相關性質後，教師引導學生解決幾個實際問題，這些實際問題來源與經濟、理工及藝術三個方面，看似各不相干，但實際均與對數有藕斷絲連的聯繫，學生在經歷過這樣的學習後，會潛移默化地學會用數學的方法思考身邊的問題.

目次

教學進度表

課節	課題	課題內容	授課時間	課時
第一課節	認識對數	掌握對數運算的概念，學會對數式與指數式的互化，掌握幾個與對數有關的結論.	2017 年 12 月 5 日	1
第二、三課節	對數的運算性質	熟悉對數運算的性質，並學會用已有的知識對其作出證明；掌握對數的換底公式及其運用.	2017 年 12 月 6 日	2
第四課節	對數的應用舉例	從經濟、理工以及藝術三個領域揭示對數的實用性.	2017 年 12 月 8 日	1

壹、教學計畫內容簡介

一、教學目標

本主題對應的教材是《人教版》高中數學第一冊 P83~90 的內容，其教學目標如下：

1. 理解對數的概念；
2. 學會用對數符號表示對數運算
3. 學會對數的基本性質、換底公式及對數的四則運算
4. 能運用上述第 3 點的知識解決對數運算的問題
5. 能運用對數及對數運算的性質解決一些實際的問題

二、基本學力要求

2.1 本單元對應的基本學力要求

A—2—12 理解對數的概念；

A—2—13 理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者間的相互轉化；

A—2—14 瞭解兩個重要對數：常用對數和自然對數；

A—2—15 掌握對數的性質和換底公式；

A—2—16 能夠進行對數四則運算.

三、主要內容

本單元教案首先介紹對數運算的產生背景——“大航海時代”。接下來透過情景教學，讓學生感受到 16 世紀對精準定位的迫切需求：大數字的乘、除法，開平方等的速算成了當務之急，因此對數運算應運而生.

這時候教師從加減法互為逆運算開始，導出本單元的主角——對數，從而揭曉本單元的序幕. 其實對數是冪運算的逆運算，在學習了對數運算的定義後，教師指出指數式與對數式其實是等價的，它們兩者可以等價變換.

接著，教師運用了對數的定義推導了幾個常用的代數式子，這些式子將作為證明對數三個重要性質的法寶.

最後，在同學們學習了對數的性質及換底公式後，教師結合現實生活中的三個不同領域，舉了幾個例子，讓學生感受對數的魅力.

四、設計創意和特色

本單元教案在教學過程中，依照“先行組織者”（奧蘇貝爾）的理論設置了多處的情景導入，使得學生可以進行“有意義的學習”：如將加減法的關係來類比對數與冪運算的關係等等.

在學生經歷了有意義的學習後，在本單元教案的最後一個課節裡，創設了幾個情景，讓學生感受到數學是有用的，雖然現在有了

計算機，但是對數的思想和方法仍滲透在現代社會的各個領域之中，從而使學生明白到，學習對數並不過時.

五、教學重點、難點

對數的定義，對數運算的性質及換底公式

六、教學課時

4 課時

貳、教案

一、認識對數

教學目標：

1、掌握對數運算的定義及對數運算的書寫格式;

2、掌握指數式與對數式的互化;

3、學會對數的兩個基本性質;

4、懂得用對數運算的定義來解決數學問題.

基力要求：

A—2—12　理解對數的概念;

A—2—13　理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者間的相互轉化;

A—2—14　瞭解兩個重要對數：常用對數和自然對數;

教學過程：

一）課前準備（15 至 20 分鐘）

請閱讀下列材料，並回答問題.

從大航海時代到計算尺

十八世紀早期，英法正角逐海上霸主，當時英國海軍上將肖維爾爵士率領他的艦隊，在地中海擊的一場戰役中，非常漂亮地擊敗了法國，準備得勝還朝（圖 1）.

但人算不如天算，1707 年 12 月 22 日這一天，在得勝還朝的回航過程中，一場濃密的大霧拖慢了艦隊的回程速度，這時候由於計算位置時犯了一個細微的錯誤，艦隊逐漸偏離了原來的航線，當天晚上他們進入了一個叫錫利群島的地方（圖 2），其位置就位於英國的西南部，這裡面飽含了各種各樣的暗礁（圖 3），富有經驗的航海家都知道，一旦船隻誤入這個地方，基本上就凶多吉少. 果然，晚上十點多，在短短的幾分鐘時間裡，合共五艘船的艦隊，立有四艘觸礁沉掉了，犧牲了一千多名海員.

其實發生海難前幾個小時，就有一個船員報告說，方位走錯了，可惜肖維爾爵士並沒有採信. 就十八世紀的航海技術而言，精確定位是一件非常困難的事情，因此海上航行所信賴的只能是船長的經驗.

1713 年，英國政府為海上航行安全問題設立了“海上經度確定委員會”，1714 年該委員會懸賞 2 萬英鎊（相當於如今 2 千多萬澳門幣）尋求精確測定經度的方法.

圖 1

圖 2

圖 3

其實不僅是英國，在大航海時代裡整個歐洲的數學家都在解決這個問題. 在那個年代數學家就和現在的 IT、金融的精英一樣，是一個非常熱門的職業.

為什麼確定海上的位置這麼困難？其實定位問題就相當於求出某位置的經緯度，緯度的測定比較簡單，使用恰當的儀器（圖 4）就可方便地測得北極星或太陽的仰角，由此確定緯度.

圖 4

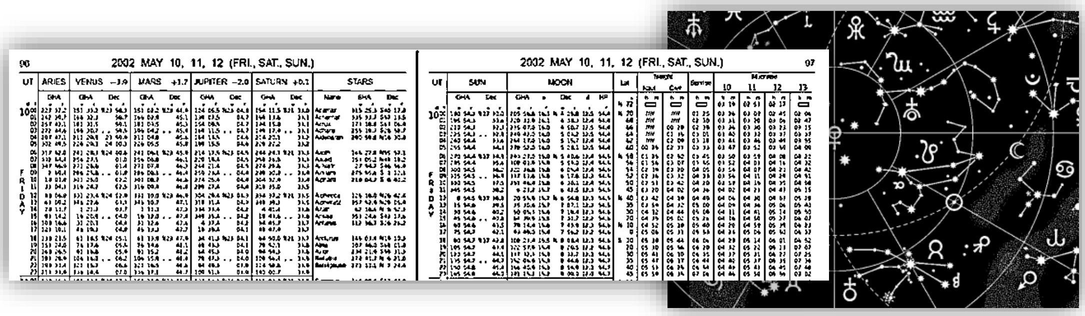

圖 5

然而，經度的測定就十分困難了.首先，天文學家觀測天體，數學家計算出運行的軌道來預測未來幾年每個時間點上某些天體間的夾角從而確定天體在該時刻的位置，再以英國格林尼治天文台為基準，再把對應的格林尼治時間和天體的位置整理成詳細的表格，即航海天文曆（圖 5）.船長在海上航行時，配合觀測天體的儀器測得某指定天體間的夾角由此確定某些天體的位置，再去查航海天文曆，從而求得該時刻船隻與格林尼治的時間差.由兩地的時間差就可以算出船隻的經度.

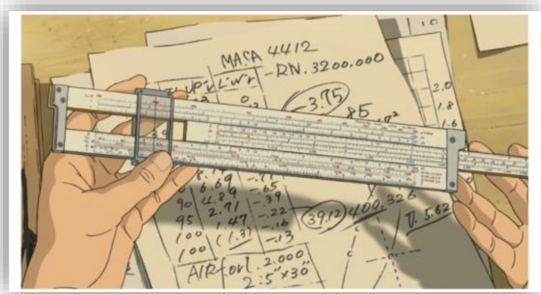

圖 6

雖然知道了原理，但要想預測天體的運行，其計算也是極其繁瑣和浩瀚的，最麻煩的莫過於大數字的乘法、除法、開平方和開立方，計算起來特別費事又傷腦筋.因此，數學家們發明了大量嶄新的數學理論來對應該問題，包括對數、解析幾何、三角恆等變換等等.其中對數的方法可以說是一枝獨秀，依照對數的理論，人們研發出計算尺（圖 6），在計算機出現前的 300 多年來，計算

尺一直是工程技術人員必備的計算工具.如今，計算尺雖然退出了歷史舞台，但對數的思想方法仍具有生命力.

請結合上文回答：

1、為什麼說測定緯度是一件比較簡單的事情？

2、為什麼說測定經度很困難？

3、數學家們打算使用什麼方法來解決大數字的乘法、除法、開平方和開立方的計算問題？

二）認識對數（15 至 20 分鐘）

2.1 從冪運算到對數

教師結合課前準備的閱讀材料，導入本單元課題，教師指出：自 16 世紀至電子計算機出現的幾百年間，繁瑣和浩瀚的大數運算給人類文明的發展造成了障礙，這是一個亟待解決的難題，那麼當時的數學家是怎樣化解這個難題的呢？相信同學們經歷了本單元——“對數及其應用舉例”的學習後，自然會水落石出.

什麼是對數？對數的英文是“logarithm”，它由兩個希臘字“logos”及“arithmos”合組而成，前者意為比例，後者意為數目，合起來的意思就是比例的數目.

Logarithm 傳入中國之初，曾被譯作“比例數”，1702 年，數學家梅文鼎在其著作《勿庵历算书目》（圖 7）中首次將其翻譯為“對數”，指的就是**真數**在**比例數表**中相**對應的數**，並一直沿用至今.

……比例數表者，西算之別傳也.其法一至萬，並設有他數相當，謂之**對數**.假令有所求數（或乘或除），但於本表間兩對數相加減，即得相求.

圖 7

這時候，教師引導學生結合加減法的關係思考冪與指數關係，從而為對數的概念作鋪墊，教師指出：對數是一種新的運算，請我們回憶小時候在學習減法時，也曾把它看成是“新的運算”.

如果我們用加法的逆運算來定義減法，那麼減法就是已知兩個加數的和，以及一個加數，求另一個加數的運算.並且我們發明了它的運算符號——減號“－”，並把兩個運算對象按先後順序寫在運算符號的兩側來表示減法運算.

但並非所有的運算都是把運算對象寫在運算符號的兩側的，例如我們學習過的乘方運算，如指數式①：

$$a^b = N,（a>0，a \neq 1） \qquad \cdots\cdots①$$

這裡的運算對象是a與b，分別稱為底數與指數，其中b以上標的形式出現，a與b之間沒有出現運算符號，但a與b的這種形式就已經可以表示一種運算了. 此外，其結果N稱為a的b次冪或a的b次方.

與減法的定義相類似，請同學們思考，在①式中，如果我們知到了a的b次冪的結果是N，以及冪運算中的指數b，求底數a，那麼這種運算可稱為什麼運算？

同學們議論紛紛，同學們普遍認為是一種“新運算”，部分學生更指出“這就是對數運算！”

這時候教師無需急於否定學生，教師接著舉例：如②式，已知的指數b是2，冪的結果N是 25，那麼底數a是什麼？

$$a^2 = 25,（a>0，a \neq 1） \qquad \cdots\cdots②$$

這時候，同學們一眼就辨認出來了，a=5.

教師指出，在①式中，已知指數b以及冪的結果N，求底數a的運算其實是一種我們都非常熟悉的運算，即開方. 由於這裡的底數a有所規定，所以只需考慮其算術平方根即可. 因此②式中的底數a可使用根號表示：

$$\sqrt{25} = a$$

類似地，①式中求底數a的運算都可表示為：

$$\sqrt[b]{N} = a,（a>0，a \neq 1）$$

接下來，教師強調：雖然這不是“新運算”，但如果在①式中，已知條件是N以及底數a，需要求出指數b，那麼這種運算我們熟悉嗎？

同學們再次議論紛紛，但沒有表態，大部分同學都嘗試代入某些數字來試探性地分析，到底是不是熟悉的運算.

這時候，教師引用剛才的例子進行分析，教師舉例，請思考，5 的幾多次方等於 25？

$$5^b = 25 \qquad \cdots\cdots③$$

同學們指出，b=2.

教師肯定學生的回答，並指出：像這樣，已知底數和冪，求指數的問題是我們未曾接觸過的“新運算”. 這裡我們把 2 稱為以 5 為底 25 的對數.

2.2 對數的定義

類似③式，如果在代數式中$a^b = N$，（$a>0$，$a \neq 1$）已知a與N求b，那麼數b就叫做以a為底N的對數，其中a叫做對數的底數，N叫做真數. 例：

因為 $4^2 = 16$，所以 2 就是以 4 為底 16 的對數.

所以，對數運算指的就是已知底數與冪求指數.

接下來，教師佈置課堂練習 1：

課堂練習 1

1） 因為 $5^4 = 625$，所以______就是以 5 為底 625 的對數.

2） 因為 $3^a = 27$，所以a就是以______為底______的對數.

3） 因為 $2^{(?)}$=128，所以 7 就是以 2 為底 128 的對數.

4） 因為 $10^{(?)} = 0.01$，所以-2就是以______為底______的對數.

在學生熟悉了對數的概念後，教師指出：對數這種新運算有一套獨特的表示方法. 如以 4 為底 16 的對數是 2 可用代數式表示：

$$\log_4 16=2 \qquad \cdots\cdots④$$

其中 log 表示運算符號，參與對數運算的兩個運算對象都寫在 log 的右側，並以下標區分底數與真數，而形如④的代數式統稱為對數式. 下面教師佈置課堂練習 2

課堂練習 2

1） 因為以 5 為底 625 的對數是 4，所以$\log_5 625$=______.

2） 以 3 為底 27 的對數可寫成$\underline{\log\qquad\quad}$.

3） 以 2 為底 128 的對數等於 7 可寫成：______________.

4） 因為$\log_{10} 0.01 = -2$,所以-2 是以 10 為底______的對數.

完成課堂練習後，教師指出：以 10 為底N的對數$\log_{10} N$稱為常用對數，書寫時應省略對數的底數,簡記為$\lg N$. 例如，課堂練習 2 第（4）題$\log_{10} 0.01$應簡記為$\lg 0.01$.

此外，在對數的運算中，以無理數 e=2.718…為底的對數稱為自然對數，書寫時把$\log_e N$簡記為$\ln N$. 例如$\log_e 10$簡記為$\ln 10$.

2.3 關於對數運算的一些限制

完成課堂練習後，教師對定義作小結，教師指出：首先，對數是一種使用底數a及冪的結果N求指數b的運算，它與冪運算互逆. 書寫對數運算時，特別注意，對數的運算符號是“log”，兩個運算對象寫在對數符號的右側，切記對數的底數以下標形式出現.

第二，正如除法運算中的除數不能為 0，開平方運算中的被開方數不能為負數. 對數運算也不例外，參與對數運算中的兩個運算對象均有限制：

1） 對數的底數a被規定為：$a > 0$ 且$a \neq 1$

2） 真數N必須為正數，即零和負數沒有對數.

這時候，學生可能不理解，為什麼會有如此規定？

教師指出，這裡的第 2 點是在第 1 點的基礎上的建立起來的. 因為當底$a > 0$ 且$a \neq 1$時，無論指數b取何值，其a的b次冪的結果a^b必為正數，即N＞0，所

以零和負數沒有對數，例如代數式中，是找不到一個指數b，使得式子
$2^b=-8$ 成立，即$\log_2(-8)$不存在.

接下來，教師繼續強調第 1 點的情況：為何底數a被規定為：$a>0$ 且$a\neq 1$？因為：

1) 當底數a為 1 時，無論指數b取何值，代數式 $1^b=1$ 恒成立，因此$\log_1 1$的值可以是任意实数，这時候運算結果不唯一；
   此外，當底數a為 1 時，若 $1^b\neq1$，例如 $1^b=3$，則無論指數b取何值，等式都不成立的；
2) 當底數a為 0 時，無論指數b取何值，代數式 $0^b=0$ 恒成立，則$\log_0 0$的值可以是任意实数，这時候運算結果不唯一；
   當底數a為 0 時，若代數式 $0^b\neq0$，例如 $0^b=2$，則無論指數b取何值，等式都不成立的；
3) 當底數a為負數時，a的n次冪有可能是正數或負數，例如$a^3<0$，$a^2>0$，這時候我們不妨考慮$a=-2$，$N=-8$，-4，4，8 的情況：
   若 $(-2)^b=(-8)$，$(-2)^{b'}=4$，
   則 $b=3$，$b'=2$，
   即 $\log_{(-2)}(-8)$，$\log_{(-2)}4$ 都存在；

但式子 $(-2)^b=8$，$(-2)^{b'}=-4$ 中，都無法找到合適的指數使它們成立，所以 $\log_{(-2)}8$，$\log_{(-2)}(-4)$不存在.（如表 1）

表 1　對數的底數為負數時的情況

$a<0$，對數是否存在與N的取值有關				
指數式	$(-2)^b=(-8)$	$(-2)^b=-4$	$(-2)^b=4$	$(-2)^b=8$
對數式	$\log_{(-2)}(-8)=b$	$\log_{(-2)}(-4)=b$	$\log_{(-2)}4=b$	$\log_{(-2)}8=b$
運算結果是否存在	存在，$b=3$	不存在	存在，$b=2$	不存在

因此若底數a為負數，則N为某些值时，是无法求出b的.出於上述各種情況下的考慮，最終把底數a被規定為：$a>0$ 且$a\neq1$.

三）對數式與指數式（15 至 20 分鐘）

3.1 對數的兩個基本性質

教師引導學生回憶冪運算的有兩個基本性質，來類比對數的兩個性質，教師指出：對於a，（$a>0$ 且$a\neq1$），總有$a^0=1$ 以及 $a^1=a$成立. 由於對數與冪運算互逆，由此直接得到：$log_a 1=0$ 以及$log_a a=1$，我們把它們稱為**對數的基本性質**.

由於同學們初次接觸對數運算，對符號還很陌生，這時候教師有必要再次強調：在對數運算時，如果真數是 1，那麼對數必為 0；如果真數與底數相等，那麼對數必為 1.

講解完畢後，佈置課堂練習：

課堂練習 3

根據對數的基本性質，求下列代數式的值：

1） $log_2 1 + 2log_7 7$；

2） $lg10 \cdot lg1 + lne$；

3.2 對數式與指數式的互化

在對數運算中，為了直觀地求出對數的值，有時候需要還原為指數式，然後對照著指數，那麼所求的對數的值就可以觀察出來了.

例如計算$\log_5 125$，先令$\log_5 125 = x$，則有 $5^x = 125$，這時候請同學們思考 5 的幾多次方等於 125?

對 125 分解質因數：125=5×5×5=5^3，因此x=3，即$\log_5 125 = 3$.

接下來，教師佈置佈置課堂練習：

課堂練習 4

一、將對數式寫成指數式（a＞0 且a≠1）：

1） $\log_5 625 = 4$

2） $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

3） $\lg 0.01 = -2$

4） $\ln e = 1$

5） $\log_a a^n = b$

二、將指數式寫成對數式：

1） $2^{-6} = \frac{1}{64}$

2） $\left(\frac{1}{3}\right)^m = 5.73$

三、證明：$\log_a a^n = n$，（a＞0 且a≠1）

教師給出證明過程：

證明：$\because a^n = a^n$

$\therefore \log_a a^n = n$

教師指出，在本題中，把a^n看成一個整體，從而使用對數的定義將指數式化為對數式即可解決問題，本題的結論已經證明可直接使用.

四、運用$\log_a a = 1$，$\log_a 1 = 0$，$\log_a a^n = n$，求下列各式的值

1） $\log_{15} 15$

2） $\log_{0.4} 1$

3） $\log_2 32$

4） $\lg 100$

5） $\log_7 343$

3.3 對數定義的巧妙運用

在對數運算中，其實大部分的結果都不是有理數，例如 $\log_5 625 = 4$，但 $\log_5 626$就已經是一個無理數了，它的值約為 4.0009933414……. 現在，請同學們思考，代數式$5^{\log_5 626}$的值，是有理數還是無理數？

學生們議論後，一致認為，它是一個無理數.

這時候，教師指出：代數式$5^{\log_5 626}$雖然很複雜，但它的計算結果出乎大家的意料！首先$\log_5 626 \approx 4.0009933414 \ldots$，而$5^4 = 625$，那麼請同學們繼續猜一猜，$5^{4.0009933414} =$？，它會是 626 嗎？

這時候部分同學使用計算器驗證，發現$5^{4.0009933414} = 625.999999996 \ldots$，於是大家都一致認定，這結果是 626，是一個有理數.

教師這時候提問，我們可否證明這個發現？同學們討論後，均表示要讓老師來解答，於是教師指出：

方法一、對於$5^{log_5 626}$而言，我們令： $\log_5 626 = b$ …⑤，

於是，將⑤式化為指數式得：

$$5^b = 626 \qquad \cdots⑥，$$

最後一步，把⑤代入⑥得： $5^{\log_5 626} = 626$ ，證畢.

方法二、不妨令 $5^{\log_5 626} = x$ …⑦

於是將⑦化為對數式得：

$$\log_5 x = \log_5 626$$

因此： $x = 626$

解答完畢後，教師指出：其實兩種方法提現了兩種思考的方式. 方法一，注重局部，它關注代數式中存在對數式的部分，然後把對數式化為指數式，從而解決了問題；而方法二，注重代數式的整體，它把代數式看成一個冪，5 是冪的底數，再把$\log_5 626$看成是一個整體，這個整體是冪的指數.因此這指數式可以化為對數式，從而解決了問題.

最後，我們還可以對此進行推廣：對於a，（$a > 0$ 且$a \neq 1$），

$$a^{\log_a N} = N \qquad \cdots⑧$$

四）小結與功課（5 分鐘）

對數運算是一種新運算，它的本質是已知底數和冪，求指數；在書寫對數運算時，必須使用下標表示對數的底數；此外，在對數運算中，其運算的對象的取值範圍均有限制的，對數的底數必須大於 0 且不等於 1，而真數則不能為零或負數.

另外，對數式可以和指數式互化的.在對應的代數式里，雖然數字的含義一樣但部分的名稱有所不同.下表中兩者的關係就一目了然：

代數式（$a>0$，$a\neq1$）	a	b	N
指數式$a^b=N$	底數	指數	冪值
對數式$\log_a N=b$	底數	對數	真數

除此，本課節還學到了四條代數式，分別為$\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，$\log_a a^n=n$，$a^{\log_a N}=N$. 它們均來自於對數的定義，對後續對數性質的學習十分重要.

功課

書 P85，練習 3，

書 P87，習題 2.7, 1

書 P87, 2

二、對數的運算性質（2 個課時）

教學目標：

1、掌握對數運算的三個性質；

2、掌握對數的換底公式.

基力要求：

A—2—15　掌握對數的性質和換底公式

A—2—16　能夠進行對數四則運算

教學過程：

一）對數的運算性質 1（20 分鐘）

1.1 大數乘法的秘密

在學習了對數的概念後，我們可以嘗試分析，在沒有計算機的大航海時代裡，數學家如何利用對數工具解決大數運算的煩惱.

假如現在有一個任務，讓我們計算：

151115727451828646838272×4611686018427387904=?

可以想象，這結果將會是一個“天文數字”，假如手上的計算器稍有落後的話，也無法求得其精確值. 如果能把這樣的一個大數的乘法恆等地轉換為某種對應關係下的加法運算，那麼這運算效率就可以大大提高了.

於是，數學家的思路是這樣想的：首先求出這兩個因數以某個數a為底的對數，再把這兩個對數相加，然後再計算以a為底兩對數之和為指數的冪，那麼這個冪就是所求的答案了.

教師繼續舉例說明，例如：數學家預製作了一張乘方表（表 1 左），他們先設定一個底數 2，再把 2 的 n 次方逐一計算出來，最後根據乘方表，編制出對數表（表 1 右）.

有了這張表格，某些數字的乘法就有捷徑可循了，如計算 16×32 …①

1) 首先在對數表（表 1 右）找出真數為 16 和 32 的對數：4，5
2) 然後把上述的兩個對數相加：4+5=9
3) 最後把對數為 9 的真數找出來：512，於是，16×32=512

簡單地說，就是“對數——求和——真數”這一過程.

類似地，如果這張表格一直往下寫下去，我們將發現：當真數是4611686018427387904 與 151115727451828646838272 時，那麼它們以 2 為底的對數分別為 62，77. 所以，在計算大數的乘積時，

151115727451828646838272×4611686018427387904

不必直接計算，可先在表格裡找到其對數，再求和：

$$77+62=139$$

最後在表格中找出對數 139 的真數：

696898287454081973172991196020261297061888

因此，151115727451828646838272×4611686018427387904
=696898287454081973172991196020261297061888

這時候，教師提問：在沒有計算機的時代，大數乘法的秘密是什麼？

學生小作議論後，部分學生認為是“對數表”，也有部分學生認為是“乘法轉換為加法”.

這時候教師肯定了學生的發現，教師繼續指出：同學們的回答都十分正確，這裡的速算，涉及到對數的定義以及對數中乘與加轉化，那麼其中的依據是什麼？請同學們帶著這個問題往下繼續學習.

表 1　乘方表與對數表

乘方表		對數表		
n	2 的 n 次方	真數	以 2 為底真數的對數	
1	2	2	1	
2	4	4	2	
3	8	8	3	對數
4	16	$\boxed{16}$	$\boxed{4}$	求積
5	32	$\boxed{32}$	$\boxed{5}$	
6	64	64	6	
7	128	128	7	求和
8	256	256	8	
9	512	$\boxed{512}$	$\boxed{9}$	
10	1024	1024	10	真數
11	2048	2048	11	
12	4096	4096	12	
13	8192	8192	13	
14	16384	16384	14	
15	32768	32768	15	
16	65536	65536	16	
17	131072	131072	17	
18	262144	262144	18	
…	…	…	…	
		$\boxed{4611686018427387904}$	$\boxed{62}$	
		…	…	
		$\boxed{151115727451828646838272}$	$\boxed{77}$	
		…	…	
		$\boxed{696898287454081973172991196020261297061888}$	$\boxed{139}$	

1.2 證明對數運算的性質 1

教師指出，其實在①式中，求 16×32 的乘積就相當於在表格中找到 16×32 的對數.當對數確定了，由其定義可知乘積的值就是該對數所對應的真數. 例如，以 2 為底 16×32 的對數是 9，那麼根據對數的定義，對數 9 所對應的真數 512 就是 16×32 運算後的結果，即 16×32=512.

那麼，怎樣快速地求出以 2 為底 16×32 所對應的對數$\log_2(16\times32)$？

在剛才的步驟里，我們分別求出 16 與 32 的對數，再把它們相加便為所求，即：

$$\log_2(16\times32)=\log_2 16+\log_2 32=4+5=9$$

類似地，我們還發現，對於其他情況，當$a>0, a\neq 1$，$M>0$，$N>0$時，代數式

$$\log_a(MN)=\log_a M + \log_a N$$

恒成立，這就是**對數運算的性質 1**，簡稱為積的對數等於對數的和.

為什麼會這樣呢？下對此進行證明. 這時候，教師以例題的方式講解性質 1 的證明.

例 1 已知：$a>0, a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，

求證：$\log_a(MN)=\log_a M + \log_a N$

證明： $\because$ $M=a^{\log_a M}$，$N=a^{\log_a N}$

$$\therefore \log_a(MN)=\log_a\left(a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}\right)$$

$$=\log_a a^{\log_a M+\log_a N}$$

$$=\log_a M + \log_a N$$

這時候，教師強調：這裡的性質 1 的最要作用是通過對數將乘法運算轉換為加法運算. 特別地提醒學生，對數跟以往我們所熟悉的運算符號不一樣：在這以前，運算符號都不寫成字母，如“＋，－，×，÷，$\sqrt{\ }$”，但對數運算例外，它是高中階段所學習的第一個使用字母來表示運算的符號.

“log，lg，ln”這三者所表示的僅僅是一種求冪的指數的運算，它並非將字母相乘，如 log≠l•o•g，它衹是眾多運算符號中的一種（圖 1），運算時謹記勿犯“類乘法分配率”的錯誤，如：

$$\log_a(M+N)\neq\log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a(MN)\neq\log_a M \cdot \log_a N$$

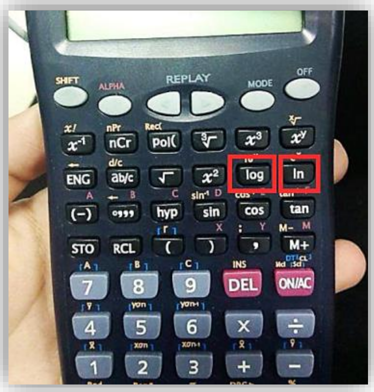

圖 1

二）對數運算的其他性質（15 分鐘）

對於求除法的指數，請同學們猜想，$\log_a\frac{M}{N}$的結果是什麼？

學生指出，由於減法是加法的逆運算，所以很容易就會想到

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

這時候，教師指出：類似對數的性質 1，其證明過程如下：

例 2 已知：$a > 0, a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$，求證：$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

證明：$\because$ $M = a^{\log_a M}$，$N = a^{\log_a N}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \frac{M}{N} &= \log_a \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} \\ &= \log_a a^{\log_a M - \log_a N} \\ &= \log_a M - \log_a N \end{aligned}$$

這就是**對數運算的性質 2，**簡稱為商的對數等於對數的差.

接下來，如果是求冪的對數，同學們能否猜想一下$\log_a M^n$的結果是什麼？

學生指出，$\log_a M^n = n\log_a M$，這時候教師佈置課堂練習 1，請同學們聯想剛才的證明過程，證明這個結論.

課堂練習 1

已知：$a > 0, a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$，求證：$\log_a M^n = n\log_a M$

證明過程如下：

證明：$\because$ $M = a^{\log_a M}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a M^n &= \log_a (a^{\log_a M})^n \\ &= \log_a (a^{\log_a M})^n \\ &= \log_a a^{n\cdot\log_a M} \\ &= n\log_a M \end{aligned}$$

這就是**對數運算的性質 3，**簡稱為n次方的對數等於對數的n倍.

三）對數運算性質的應用（20 至 25 分鐘）

在學會了對數運算的三個性質後，教師佈置課堂練習 2.

課堂練習 2

已知：$\log_2 262144 = 18$，$\log_2 128 = 7$，

（1）求$\log_2 \frac{262144}{128}$,

（2）結合表 1，求$\frac{262144}{128}$的值，

（3）結合表 1，求$\sqrt[6]{262144} + 128^2$ 的值

解：（1）$\log_2 \frac{262144}{128} = \log_2 262144 - \log_2 128 = 18 - 7 = 11$

（2）$\because$ $\log_2 \frac{262144}{128} = 11$，查表得：$\log_2 2048 = 11$，

$\therefore\ \frac{262144}{128}=2048.$

（3）$\because\ \log_2\sqrt[6]{262144}$= $\log_2(262144)^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\cdot\log_2 262144=\frac{1}{6}\cdot 18=3$，

查表得：$\log_2 8$=3，

$\therefore\sqrt[6]{262144}=8$

又$\because\log_2 128^2=2\log_2 128=2\cdot 7=14$，查表得$\log_2 16384=14$，

$\therefore 128^2=16384.$

$\therefore\sqrt[6]{262144}+128^2=8+16384=16392$

課堂練習 3

在以a為底的對數表中，真數x,y,z的對數分別為A,B,C 求

1） 以a為底xyz的對數.

2） 以a為底$\frac{xy}{z}$的對數.

3） 以a為底$\frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$的對數.

解：$\because\log_a x$=A，$\log_a y$=B，$\log_a z$=C

$\therefore$ (1)$\log_a xyz$=$\log_a x+\log_a y+\log_a z=A+B+C$

(2) $\log_a\frac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z=\log_a x+\log_a y-\log_a z=A+B-C$

(3) $\log_a\frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$=$\log_a\left(x^2\sqrt{y}\right)-\log_a\sqrt[3]{z}$

=$\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$

=$2\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z$

=$2A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{3}C$

課堂練習 4

求值：$\log_2(4^7\times 2^5)$+lg$\sqrt[5]{100}$；

解：原式=$\log_2 4^7+\log_2 2^5+\lg 100^{\frac{1}{5}}$

=$\log_2 2^{14}+5\log_2 2+\lg 10^{\frac{2}{5}}$

=$14\log_2 2+5\log_2 2+\frac{2}{5}\lg 10$

=$14+5+\frac{2}{5}$

$=19\frac{2}{5}$

四）換底公式及其應用（10 分鐘）

我們知道，對數的性質為大數的乘法運算提供了便利.但如果遇到這種情況，計算 81×64，其中表 1 里 $\log_2 64=6$，但找不到 81 的對數，怎麼辦呢？用什麼方法可估算出 $\log_2(81\times64)$ 的值？

而另一方面，我們知道 $\log_3 81=4$，那麼這時候能不能想辦法把底數不同的兩個對數變成相同呢？例如我們想把 $\log_3 81=4$，變為以 2 為底的對數，可行嗎？

這時候由對數的定義，由 $\log_3 81=4$ 得指數式 $3^4=81$，

然後寫出以 2 為 81 的對數：　$\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4\log_2 3$　…②

這時候，我們成功地把底數更換為 2.於是

$$\log_2(81\times64) = \log_2 81+\log_2 64 = 4\log_2 3 + \log_2 64 = 4\log_2 3 + 6$$

由於真數 3 介於 2 至 4 中間，所以我們估計 3 的對數 $\log_2 3$ 也可能是 1 至 2 的中間，若

$$\log_2 3\approx1.5,\quad\cdots③$$

則　$\log_2(81\times64) =4\log_2 3 + 6\approx12$；　…④

這時候，由於對數 $\log_2 4096=12$，所以 81×64 與表格中的 4096 最為接近.

在此，我們得到一個轉化對數底數的思路：如果想把$\log_a b$中的底數a換為c,可以這樣做，

令$\log_a b = p$，由對數的定義得指數式：$a^p = b$,這時候，類似上述②式，寫出以c為底b的對數,再把a^p代入以c為底的對數式中，即：

$$\log_c b = \log_c a^p = p\log_c a$$

整理後得：

$$\log_c b = p\log_c a\quad\cdots⑤$$

所以，如果p與$\log_c a$已知，則可求出$\log_c b$.例如，

已知 $\log_3 81=4$，$\log_2 3\approx1.585$（上述③式中 $\log_2 3\approx1.5$ 的誤差較大，導致④式的誤差繼續擴大）則可以求出$\log_2 81=4\cdot\log_2 3\approx6.34$

如果p未知，則⑤式可寫成：

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

將$p = \log_a b$代入後，得：

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\quad\cdots⑥$$

在這裡，我們把⑥稱為對數的換底公式.有時候，當$\log_a b$較難求的時候，可以使用換底公式，進行化簡求值.例如：

例 3，求$\log_8 128$的值

解：由換底公式得：

$$\log_8 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 8}$$

所以，$\log_8 128 = \frac{7}{3}$

例 4，求$\log_2 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 8$的值

解：由換底公式得：

$$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 8 &= \frac{\lg 3 \cdot \lg 7 \cdot \lg 8}{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 7} \\ &= \frac{\lg 2^3}{\lg 2} \\ &= \frac{3\lg 2}{\lg 2} \\ &= 3\end{aligned}$$

講解完畢後，教師佈置課堂練習

課堂練習 5，求$\log_8 9 \cdot \log_{27} 32$的值.

五）對數的四則運算（5 分鐘）

在學習了換底公式後，教師作小結：至今關於對數的運算，一共有以下幾個重要的性質和公式，分別是：

性質 1：$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

性質 2：$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

性質 3：$\log_a M^n = n\log_a M$

換底公式：$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

由於式子的恆等的，如果同學們從右往左看，這些公式類似於對數的加減乘除四則運算：

對數的加法：$\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$

對數的減法：$\log_a M - \log_a N = \log_a(MN)$

對數的除法：$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$

對數的乘法：$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

由此，我們總結出對數四則運算的四條法則：

對數的加法法則：同底的兩個對數相加，底數不變，真數相乘.

對數的減法法則：同底的兩個對數相減，底數不變，真數相除.

對數的除法法則：同底的兩個對數相除，除數的真數作商的底數，被除數的真數作商的真數.

對數的乘法法則：若兩個對數中，真數與底數相同，則這兩個對數相乘後，其積的底數和真數分別是因數的底數與真數.

六）小結與功課（5 分鐘）

本節課，我們學習了對數運算的三個性質以及對數的換底公式，並結合對數的定義，分別對其作出了證明.

此外，我們還從對數的性質及換底公式得出對數的四則運算法則.

其實對數的四則運算法則與對數的性質由同一條代數式演變而成，但各有不同的側重點：

1) 對數的三條性的對象是對數式的真數，其關注的是真數的乘法，除法及乘方運算.
2) 對數的四則運算的對象是整條對數式子，其關注的是怎樣的對數式子可以進行運算，其中對數的加法、減法、除法均要求對數的底數相同才能進行運算.

最後，在運用對數的性質及相關公式解題時，需特別注意“類乘法分配率”的誤區.同學們可以結合對數發明的初衷來記憶這些對數的運算性質.

功課

書 P87，練習 1,2,3

書 P88，3,4,5

三、對數的應用舉例

教學目標：

1、能運用對數運算的性質解決實際的數學問題；

2、學會解一些簡單的對數方程.

基力要求：

A－2－12　理解對數的概念；

A－2－13　理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者間的相互轉化；

A－2－15　掌握對數的性質和換底公式；

A－2－16　能夠進行對數四則運算.

教學過程：

一）對數的簡單應用（20 至 25 分鐘）

我們已經學習了對數及其運算的性質，知道對數可以用於大數間的乘除法等速算，那麼除此以外，它們還能不能解決一些實際的問題？其實對數的應用，除可減少大數運算的運算量外，還越來越多地應在經濟、地理、工程等方面.

現請大家思考這樣一個情景：

例 1 改革開放以來，我國經濟保持了高速的增長，假設 2002 年我國 GDP 是a億元，如果每年 GDP 的平均增長率為 8%，那麼經過多少年後 GDP 約為 2002 的 2 倍？

解：設經過x年後， GDP 為 2002 年的 2 倍，依題意得

$$a(1+8\%)^x = 2a$$

$$1.08^x = 2$$

$$x=\log_{1.08}2$$

∵經計算器求得 $\log_{1.08}2 \approx 9.0065$

∴$x \approx 9.006/5$

答： 即 9 年後，GDP 約為 2002 年的 2 倍.

例 2 2017 年全世界共發生了 8 次 7 級以上的地震，詳見下表格.地震的強弱通常用里氏震级M表示，其計算公式為$M = \lg\frac{A}{A_0}$，其中 A 為被測地震的最大振幅，A_0是一個常數代表標準地震的最大振幅.請問 2017 年 9 月 20 日在墨西哥沿岸近海域發生的 8.2 級地震的最大振幅是 2017 年 8 月 8 日在四川阿坝州九寨沟县發生的 7 級地震的多少倍？

例 2 2017 年全球 7 級以上地震一覽表

序号	发震时刻	纬度(°)	经度(°)	深度(KM)	震级	参考地名
1	2017/1/22	-6.19	-155.14	160	7.9	所罗门群岛
2	2017/4/29	5.51	125.08	50	7	菲律宾棉兰老岛
3	2017/6/14	15.11	-91.8	100	7.1	危地马拉
4	2017/7/18	54.36	168.95	10	7.8	科曼多尔群岛地区

5	2017/8/8	33.2	103.82	20	7	四川阿坝州九寨沟县
6	2017/9/8	15.05	−93.9	20	8.2	墨西哥沿岸近海域
7	2017/9/20	18.58	−98.47	50	7.1	墨西哥
8	2017/11/13	34.9	45.75	20	7.8	伊拉克

解：設在墨西哥沿岸近海域發生的地震的最大振幅為x，在四川阿坝州九寨沟县發生的地震的最大振幅為y.依題意得：

$$\begin{cases} 8.2 = \lg\frac{x}{A_0} & ① \\ 7 = \lg\frac{y}{A_0} & ② \end{cases}$$

由①得：$8.2 = \lg x - \lg A_0$

$\therefore \lg x = 8.2 + \lg A_0$　③

由②得：$7 = \lg y - \lg A_0$

$\therefore \lg y = 7 + \lg A_0$　④

③-④得：$\lg x - \lg y = 1.2$

$$\therefore \lg\frac{x}{y} = 1.2$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 10^{1.2}$$

答：2017 年 9 月 20 日在墨西哥沿岸近海域發生的 8.2 級地震的最大振幅是 2017 年 8 月 8 日在四川阿坝州九寨沟县發生的 7 級地震的$10^{1.2}$倍（約 15.8 倍）.

教師講解完畢後，佈置課堂練習：

課堂練習 1

參考例 2 的表格，在所罗门群岛發生的地震的最大振幅是在菲律宾棉兰老岛的地震的多少倍？

二）對數與視覺藝術（15 分鐘）

在學生完成相關的課堂練習後，教師指出對數除了在理工類有所應用外，隨著人類文明的進步，它還可以應用於視覺藝術的創作場合上，如——攝影.

攝影就是用光作的畫，一幅好的攝影作品離不開兩個因素：構圖與曝光.

如圖 1，如果沒有正確的曝光，那麼更好的構圖也會黯然失色.

四張照片的E_v值

$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
- 6	0

圖 1

照片的曝光由三要素決定，分別是曝光時間 T、光圈的 F 值、感光度 ISO. 當感光度 ISO=100 時，設某單反相機的曝光量E_v的計算公式為：

$$E_v = \log_2\left(\frac{T}{F^2}\right)$$

例如 T=1″，F=$\sqrt{2}$，則$E_v = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}^2}\right) = \log_2\frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

下面老師以此為題材，設計例題.

例 3 如圖 1 所示，這組照片都是使用上述的單反相機拍攝且感光度 ISO=100.已知這四張照片的E_v值分別為$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，－6，0，如果第 1 張照片的 F 值為 F=$\sqrt{2}$，（1）求第 1 張照片的曝光時間；（2）若第 2 張照片與第 1 張照片的 F 值一樣，問第 1 張照片的曝光時間是第 2 張照片的幾倍？（3）若第 3，4 張照片的曝光時間都一樣，問第 3 張照片的 F 值是第 4 張的幾倍？

解：（1）由於該相機的 $E_v = \log_2\left(\frac{T}{F^2}\right)$，依題意得：

$$\frac{1}{2} = \log_2\left(\frac{T}{\sqrt{2}^2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \log_2 T - \log_2 \sqrt{2}^2$$

$$\frac{1}{2} = \log_2 T - \log_2 2$$

$$\log_2 T = \frac{1}{2} + 1$$

$$\log_2 T = \frac{3}{2}$$

$$T=2^{\frac{3}{2}}\text{（即 T}\approx 2.8\text{ 秒）}$$

（2）設第 1，2 張照片的曝光時間分別為T_1，T_2，由$E_v=\log_2(\frac{T}{F^2})$得：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=\log_2(\frac{T_1}{F^2})\\ -\frac{1}{2}=\log_2(\frac{T_2}{F^2})\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=\log_2 T_1-\log_2 F^2 \text{①}\\ -\frac{1}{2}=\log_2 T_2-\log_2 F^2 \text{②}\end{cases}$$

① -②得

$$1=\log_2 T_1-\log_2 T_2$$

$$\log_2\frac{T_1}{T_2}=1$$

$$\frac{T_1}{T_2}=2$$

$$T_1=2T_2$$

即第 1 張照片的曝光時間為第 2 張的兩倍.

（3）設第 3，4 張照片的 F 值分別為F_1，F_2，由$E_v=\log_2(\frac{T}{F^2})$得：

$$\begin{cases}-6=\log_2(\frac{T}{{F_1}^2})\\ 0=\log_2(\frac{T}{{F_2}^2})\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}-6=\log_2 T-\log_2 {F_1}^2\\ 0=\log_2 T-\log_2 {F_2}^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6=\log_2 T-2\log_2 F_1 \quad \text{③}\\ 0=\log_2 T-2\log_2 F_2 \quad \text{④}\end{cases}$$

③-④得：

$$-6=2\log_2 F_2-2\log_2 F_1$$

$$-6=2(\log_2 F_2-\log_2 F_1)$$

$$-3=\log_2 F_2-\log_2 F_1$$

$$\log_2 \frac{F_2}{F_1} = -3$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 2^{-3}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{8}$$

$$F_1 = 8F_2$$

即第 3 張照片的 F 值為第 4 張的 8 倍.

三）小結與功課（5 分鐘）

雖然我們現在有了計算機，在大數的運算方面計算尺、對數表都不再重要了，但是對數的思想方法仍具生命力.

其實對數的本質是指數運算，當指數式用對數表達時，很多科技、工程等問題得到了更好的表達. 這裏所舉的三個例子，均取自當今社會的三個不同領域：金融、理工以及藝術，由於用了對數的形式進行表達，因此可以很方便地沿用解方程（組）的思路來解決實際的數學問題. 因此，一套較好的符號系統對於數學甚至人類文明的發展來說都至關重要，好的符號體系能大大節省人的思維負擔.

功課：書 P88, 6

三、試教評估

對數是高中數學階段所定義的一種新運算. 通常學習對數時，教師都是設計大量的習題，讓學生在做題的過程中慢慢熟悉對數的運算. 但是這個熟悉的過程很漫長. 以往，學生在學習對數後的一段很長時間里，都會時不時不自覺地用了錯誤的“對數公式”，在同學們經歷了無數次錯誤後，逐漸地避免再次犯錯. 不過這樣的學習方式同樣會有一個問題，即使能降低了大部分學生犯錯誤的概率，但當問到什麼是對數，對數的概念該怎樣解析時，大部分學生的表現都十分惘然.

因此，本教案從對數的起源出發，重新鋪排了對數的教學內容. 在幫助學生理解對數的概念這一環節上，加入了大量的人文歷史知識，從而提高了學生的學習興趣.

此外，本單元教案使用了奧蘇貝爾的“先行組織者”的學習理論，從學生已有的知識體系出發，通過類比加減法運算的定義，幫助學生建構對數的概念，從而使學生經歷一個“有意義的學習”的過程.

學生經歷過本單元的學習後，同學們都感到定義對數這種新運算是一件很很有意義的事情，大部分同學都對此概念留下了深刻的印象，這將潛移默化地使學生產生持續性的影響. 例如學生在計算時不

小心煩犯了錯，他們都會自覺地從對數的起源的初衷——“化乘為加”進行反思.

在學生學習本單元的最後一課時，同學們對這些例題都很驚訝，因為本課節中所選取的三道例題全都取材於學生的身邊，雖然例題的背景來自於三個不同的領域，但它們都有一個共同點——就是可以使用對數的思想和方法解題. 學生學習之後，都感嘆原來數學能應用在很多意想不到地方，數學非常有用.

肆、反思與建議

在實施本單元教案時，避免過於注重求解本教案內的習題或過度追求如何計算對數的值，教學時應多角度全方位地闡述從對數與指數的關係，力求讓學生透切地理解對數這一種新的運算.

另外，對數起源的那段歷史的閱讀材料是本人在網上資料收集後整理所得，缺乏嚴密性以及未經過相關的歷史考證，這裡之所以會提及，其目的在於引起學生的好奇心，激發同學們的學習興趣，如有錯漏請相關老師批評指正.

此外，在本教案中關於對數運算性質的證明與書本的鋪排有所不同，其原因在於本教案採用了“先行組織者”的原則進行設計，注重知識體系的前後關聯性，從而促使學生運用第一課節的結論來建構對數的運算性質.

另，對於換底公式，本教案創設了一個情景，從而聯想到一個問題——能否把對數的底數換掉，繼而展開論述. 這情況創設的目的在於提高學生的學習興趣，在實施教學時無需過於強調如何運用對數表來解決大數之間的乘法運算這一問題.

總而言之，本教案所提及到的計算尺以及對數表只是起引導作用，讓學生感到對數運算是有實際意義的，而不必過於強調如何使用對數表來解決乘積問題.

最後，本教案對數的應用部分是亮點，表達了雖然對數運算的便利性比不上現代的計算機，但對數的思想已深入到各個領域. 教學時應注重對數在實際問題中如何延伸，如何通過已知條件建立起合適的數學模型來解決實際的問題.

參考文獻

[1]奧蘇貝爾（David Paul Ausubel）.教育心理學[M]. 1968

附錄

教材

习题 2.6

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=2^{3-x}$； (2) $y=3^{2x+1}$；

(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}$； (4) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$.

2. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $3^{0.8}$，$3^{0.7}$； (2) $0.75^{-0.1}$，$0.75^{0.1}$；

(3) $1.01^{2.7}$，$1.01^{3.5}$； (4) $0.99^{3.3}$，$0.99^{4.5}$.

3. 已知下列不等式，比较 m、n 的大小：

(1) $2^m<2^n$； (2) $0.2^m>0.2^n$；

(3) $a^m<a^n$ $(0<a<1)$； (4) $a^m>a^n$ $(a>1)$.

*4. 设 $y_1=a^{3x+1}$，$y_2=a^{-2x}$，其中 $a>0$，$a\neq1$. 确定 x 为何值时，有

(1) $y_1=y_2$； (2) $y_1>y_2$.

*5. 设 $f(x)=3^x$，求证：

(1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$；

(2) $f(x)\div f(y)=f(x-y)$.

三　对数与对数函数

2.7　对数

1. 对数的概念

改革开放以来，我国经济保持了持续高速的增长. 假设 2002 年我国国内生产总值为 a 亿元，如果每年平均增长 8%，那么经过多少年国内生产总值是 2002 年时的 2 倍？

假设经过 x 年国内生产总值为 2002 年时的 2 倍，根据题意有

$$a(1+8\%)^x=2a,$$

即

$$1.08^x=2.$$

这是已知底数和幂的值，求指数的问题，也就是我们这节将要学习的对数问题.

一般地，如果 a $(a>0,\ a\neq1)$ 的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做**以 a 为底 N 的对数**，记作

$$\log_a N=b,❶$$

其中 a 叫做**对数的底数**，N 叫做**真数**.

从定义可知，负数和零没有对数. 事实上，因为 $a>0$，所以不论 b 是什么实数，都有 $a^b>0$，这就是说不论 b 是什么数，N 永远是正数，因此**负数和零没有对数**.

例如，因为 $4^2=16$，所以以 4 为底，16 的对数是 2，记作

$$\log_4 16=2.$$

因为 $4^{\frac{1}{2}}=2$，所以以 4 为底，2 的对数是 $\frac{1}{2}$，记作 $\log_4 2=\frac{1}{2}$.

又例如，因为 $10^2=100$，所以以 10 为底，100 的对数是 2，记作

❶ “log”是拉丁文 logarithm（对数）的缩写.

$$\log_{10}100=2.$$

因为 $10^{-2}=0.01$，所以以 10 为底，0.01 的对数是 -2，记作

$$\log_{10}0.01=-2.$$

根据对数的定义，可以证明

$$\log_a 1=0，\log_a a=1\ (a>0，a\neq 1).$$

通常将以 10 为底的对数叫做**常用对数**，为了简便，N 的常用对数 $\log_{10}N$ 简记作 $\lg N$. 例如 $\log_{10}5$ 简记作 $\lg 5$，$\log_{10}3.5$ 简记作 $\lg 3.5$.

在科学技术中常常使用以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数，以 e 为底的对数叫做**自然对数**，为了简便，N 的自然对数 $\log_e N$ 简记作 $\ln N$. 例如自然对数 $\log_e 3$ 简记作 $\ln 3$，自然对数 $\log_e 10$ 简记作 $\ln 10$.

例 1 将下列指数式写成对数式：

(1) $5^4=625$；　　(2) $2^{-6}=\frac{1}{64}$；

(3) $3^a=27$；　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^m=5.73$.

解：(1) $\log_5 625=4$；

(2) $\log_2 \frac{1}{64}=-6$；

(3) $\log_3 27=a$；

(4) $\log_{\frac{1}{3}}5.73=m$.

例 2 将下列对数式写成指数式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$；　　(2) $\log_2 128=7$；

(3) $\lg 0.01=-2$；　　(4) $\ln 10=2.303$.

解：(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$；

(2) $2^7=128$；

(3) $10^{-2}=0.01$；

(4) $e^{2.303}=10$.

练 习

1. 把下列指数式写成对数式：

(1) $2^3=8$；　　(2) $2^5=32$；

(3) $2^{-1}=\frac{1}{2}$；　　(4) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_3 9=2$；　　(2) $\log_5 125=3$；

(3) $\log_2 \frac{1}{4}=-2$；　　(4) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_5 25$；　　(2) $\log_2 \frac{1}{16}$；

(3) $\lg 100$；　　(4) $\lg 0.01$；

(5) $\lg 10\ 000$；　　(6) $\lg 0.000\ 1$.

4. 求下列各式的值：

(1) $\log_{15}15$；　　(2) $\log_{0.4}1$；

(3) $\log_9 81$；　　(4) $\log_{2.5}6.25$；

(5) $\log_7 343$；　　(6) $\log_3 243$.

2. 对数运算性质

我们知道，根据对数的定义可将对数式

$$\log_a N=b\ (a>0，a\neq 1，N>0)$$

写成指数式

$$a^b=N，$$

即

$$\log_a N=b \Leftrightarrow a^b=N.\ (a>0，a\neq 1，N>0)$$

根据这个关系式，我们可以证得对数的运算性质：

如果 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M\ (n\in \mathbf{R})$.

现在我们来证明运算性质（1）、（3）.

性质（1）的证明：

设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$.

由对数的定义可以得

$$M=a^p,\ N=a^q,$$

∴ $MN=a^p\cdot a^q=a^{p+q}$，

∴ $\log_a(MN)=p+q$，

即证得 $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

性质（3）的证明：

设 $\log_a M=p$.

由对数定义可以得

$$M=a^p,$$

∴ $M^n=a^{np}$，

∴ $\log_a M^n=np$，

即证得 $\log_a M^n=n\log_a M$.

同学们可以仿照性质（1）的证明，自己证明性质（2）.

例3 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a \dfrac{xy}{z}$；　　（2）$\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解：（1）$\log_a \dfrac{xy}{z}$

$=\log_a(xy)-\log_a z$

$=\log_a x+\log_a y-\log_a z$；

（2）$\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

$=\log_a(x^2\sqrt{y})-\log_a\sqrt[3]{z}$

$=\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$

$=2\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z$.

例4 求下列各式的值：

（1）$\log_2(4^7\times 2^5)$；　　（2）$\lg\sqrt[5]{100}$.

解：（1）$\log_2(4^7\times 2^5)=\log_2 4^7+\log_2 2^5$

$=7\log_2 4+5\log_2 2$

$=7\times 2+5\times 1$

$=19$；

（2）$\lg\sqrt[5]{100}$

$=\dfrac{1}{5}\lg 10^2$

$=\dfrac{2}{5}\lg 10=\dfrac{2}{5}$.

练习

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

（1）$\lg(xyz)$；　　（2）$\lg\dfrac{xy^2}{z}$；

（3）$\lg\dfrac{xy^3}{\sqrt{z}}$；　　（4）$\lg\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

2. 计算：

（1）$\log_3(27\times 9^2)$；　　（2）$\lg 100^2$；

（3）$\lg 0.000\ 01$；　　（4）$\log_7\sqrt[3]{49}$.

3. 求下列各式的值：

（1）$\log_2 6-\log_2 3$；　　（2）$\lg 5+\lg 2$；

（3）$\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{3}$；　　（4）$\log_3 5-\log_3 15$.

4. 利用计算器求 $1.08^x=2$ 中的 x.

习题 2.7

1. 把下列各题的指数式写成对数式：

（1）$4^x=16$；　　（2）$3^x=1$；

都乘上 10^7. 于是，就有了线段 AB 的长度为 10^7 单位. 这样，用现在的数学符号来叙述，纳皮尔的对数中，x 与 y 的对应关系就是：

$$y=10^7\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

其中，e 为自然对数的底. 利用对数，纳皮尔制作了 $0^\circ\sim90^\circ$ 每隔 $1'$ 的八位三角函数表.

将对数加以改造使之广泛流传的是纳皮尔的朋友布里格斯（H. Briggs，1561 年～1631 年）. 他通过研究《奇妙的对数定律说明书》，感到其中的对数用起来很不方便，于是与纳皮尔商定，使 1 的对数为 0，10 的对数为 1，这样就得到了现在所用的以 10 为底的常用对数. 由于我们的数系是十进制，因此它在数值计算上具有优越性. 1624 年，布里格斯出版了《对数算术》，公布了以 10 为底包含 1 至 20 000 及 90 000 至 100 000 的 14 位常用对数表.

根据对数运算原理，人们还发明了对数计算尺. 300 多年来，对数计算尺一直是科学工作者，特别是工程技术人员必备的计算工具，直到 20 世纪 70 年代才让位给电子计算器. 尽管作为一种计算工具，对数计算尺、对数表都不再重要了，但是，对数的思想方法仍然具有生命力.

从对数发明的过程我们可以发现，纳皮尔在讨论对数概念时，并没有使用指数与对数的互逆关系. 造成这种状况的主要原因是当时还没有明确的指数概念，就连指数符号也是在 20 多年后的 1637 年才由法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596 年～1650 年）开始使用. 直到 18 世纪，才由瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707 年～1783 年）发现了指数与对数的互逆关系. 在 1770 年出版的一部著作中，欧拉首先使用 $y=a^x$ 来定义 $x=\log_a y$. 他指出，“对数源出于指数”. 对数的发明先于指数，成为数学史上的珍闻.

从对数的发明过程可以看到，社会生产、科学技术的需要是数学发展的主要动力. 建立对数与指数之间联系的过程表明，使用较好的符号体系对于数学的发展是至关重要的. 实际上，好的数学符号能够大大地节省人的思维负担. 数学家们对数学符号体系的发展与完善作出了长期而艰苦的努力.

2.8 对数函数

我们研究指数函数时，曾经讨论过细胞分裂问题. 某种细胞分裂时，得到的细胞的个数 y 是分裂次数 x 的函数，这个函数可以用指数函数

$$y=2^x$$

表示.

现在我们来研究相反的问题. 如果要求这种细胞经过多少次分裂，大约可以得到 1 万个，10 万个……细胞，那么，分裂次数 x 就是要得到的细胞个数 y 的函数. 根据对数的定义，这个函数可以写成对数的形式就是

$$x=\log_2 y.$$

如果用 x 表示自变量，y 表示函数，这个函数就是

$$y=\log_2 x.$$

由反函数的概念可知，$y=\log_2 x$ 与指数函数 $y=2^x$ 互为反函数.

一般地，函数 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$ 就是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 因为 $y=a^x$ 的值域是 $(0,\ +\infty)$，所以，函数 $y=\log_a x$ 的定义域是 $(0,\ +\infty)$.

函数 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$ 叫做**对数函数**，其中 x 是自变量. 函数的定义域是 $(0,\ +\infty)$.

现在研究对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$ 的图象和性质.

因为对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，所以 $y=\log_a x$ 的图象与 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 因此，我们只要画出和 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线，就可以得到 $y=\log_a x$ 的图象.

例如，画出与第 2.6 节中的 $y=2^x$ 的图象（图 2-13）关于直线 $y=x$ 对称的

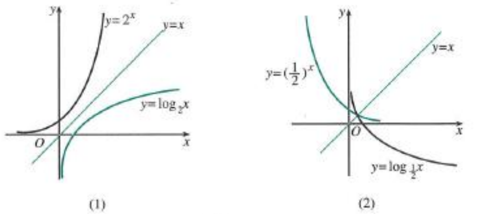

图 2-16