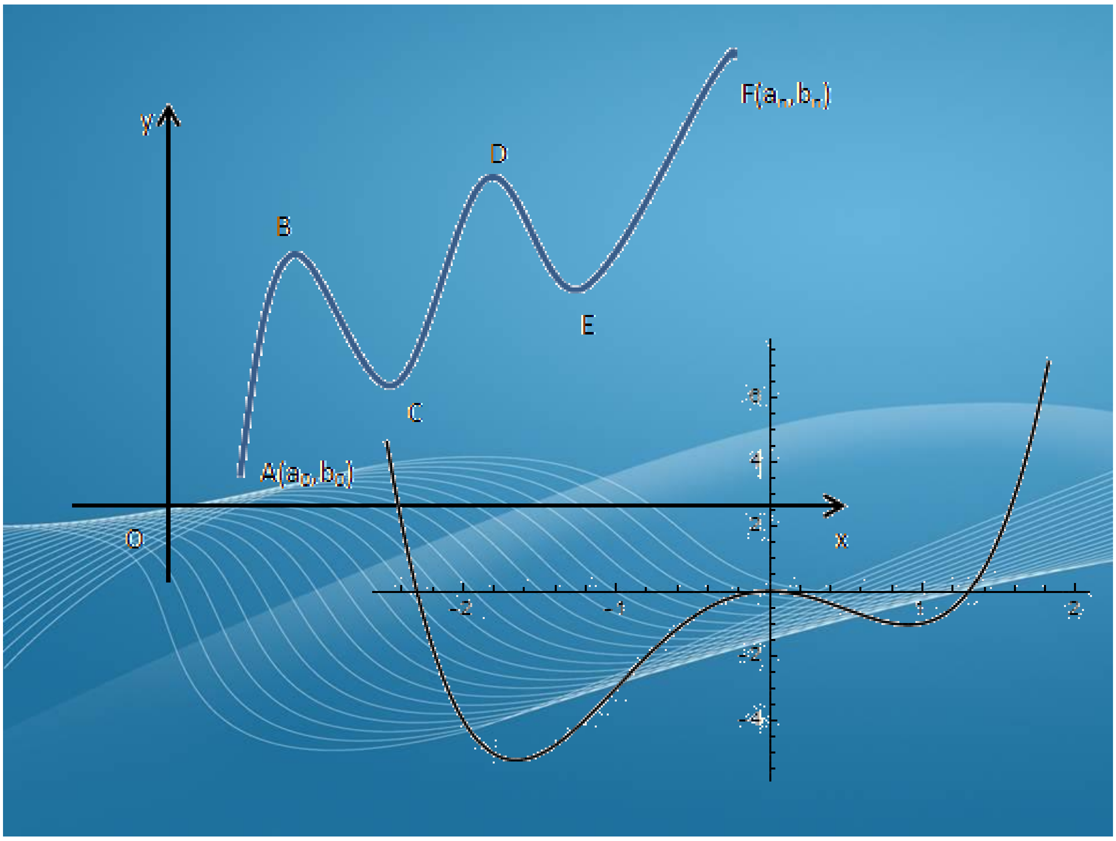
2017/2018 學年教學設計獎勵計劃

函數的單調性及最值
（利用輔助軟件）之實踐探究



參賽編號：C210

科目：數學

實施年級：高一

簡介

函數單調性是函數的重要性質之一，也是後面學習函數奇偶性、指數函數、對數函數和冪函數的重要理論基礎；在解決函數值域、定義域、不等式、比較兩數大小等具體問題中均有著廣泛的應用；在升學試題中最值問題更是試題中的常客，而且函數的最值實際是函數單調性的應用。因此，本教案教授函數單調性概念外，還延伸教授最值的概念，輔以 DM_Lab 及 Geogebra 軟件輔助畫圖，利用函數圖像來研究函數性質的數形結合思想，這種技巧將貫穿學習整個高中數學。利用圖像也有利於學生理解函數單調性的概念，且在”作差、變形、定號”過程中使學生更易掌握証明方法、形成証明思路有所幫助。

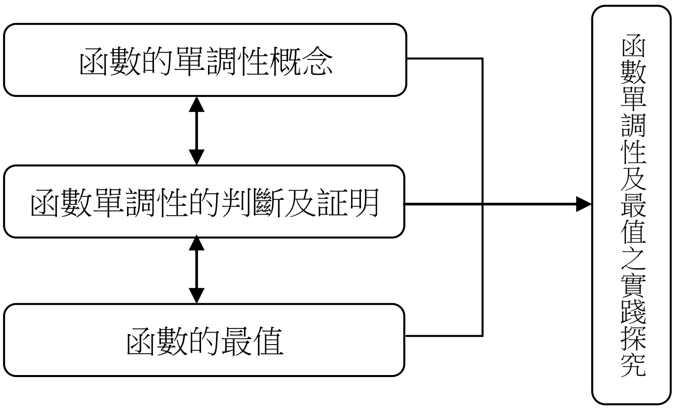
利用 DM_Lab 及 Geogebra 軟件輔助畫圖，結合教學目標和探究學習相結合的教學方法使學生更容易解決函數單調性和最值的問題。透過探究實驗活動引導學生深入了解函數單調性及最值的意義，繼而增加對學習數學的信心。提升學生數學解難能力，懂得善用科技輔助學習，是學習函數的有效法門，也是走上新時代步伐的必要元素。

另外，本校學生數學屬中等水平，故此本設計之例題及練習均按本校學生能力設計。

本教案配應基力要求如下：

編號	基力內容
A-5-6	理解函數的單調性概念，能求一些常見函數的單調區間；
A-5-8	能運用函數的有關性質來描述函數的圖像，學會運用函數圖像理解和研究函數的性質；
E-1-1	積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗証等數學活動，能表達、交流自己的思維過程。

本單元課程教學內容框架如下圖：



目次

簡介 i

目次 iii

教學進度表 iv

壹、教學計劃內容簡介 1

　　一、教學目標 1

　　二、主要內容 1

　　三、設計創意和特色 1

　　四、教學重點 2

　　五、教學難點 2

　　六、教學用具 2

貳、教案 2

叁、試教評估 30

肆、反思建議 31

伍、參考文獻 33

陸、相關教材 34

　　輔助教學資料

　　一、 導學案 34

　　二、 投影簡報 55

附錄 61

　　課堂照片 61

教學進度表

課節	課題	課題內容	授課時間	課時
第一課節	函數的單調性概念	引入函數單調性概念，並判斷函數在給定區間上的單調性。	2017-10-13	1
第二課節	函數單調性的判斷及証明	函數單調性的判斷及証明方法。	2017-10-16	1
第三課節	函數的最值	函數的最大(小)值的概念，利用函數的單調性求函數的最大(小)值。	2017-10-17	1
第四課節	函數單調性及最值之應用	利用 Geogebra 軟件進行探究活動，根據函數圖像發現及探究各種函數的單調性及最值等性質。	2017-10-18	1

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

(一）知識與技能：

1. 理解函數的單調性及最值概念；

2. 掌握証明及判斷函數在給定區間上的單調性；

3. 善用輔助軟件分析函數的單調性及最值，能根據圖像說出函數的單調性及最值。

(二）過程與方法：

在教學過程中，教師引導學生每人都利用輔助軟件畫出函數圖像進行探究活動，結合函數表示的圖像進行觀察和分析，透過分析圖像得出函數在指定區間上的單調性及最值，體會數形結合的必要性及優越性。

(三）情感、態度與價值觀：

1. 培養學生的觀察和分析能力；

2. 體驗數學的探索精神；

3. 體會從特殊到一般，從具體到抽象，從感性到理性的數學思維方法。

二、主要內容

1. 函數單調性的概念

2. 函數單調性的判斷及証明

3. 函數的最值

4. 函數單調性及最值之應用

三、設計創意和特色

1. 善用科技輔助教與學。

2. 學生自主探索及學習。

3. 透過輔助軟件充分展現數形結合之必要性及優越性。

4. 過往函數的單調性證明是本章之難點，透過工具引導學生明白函數單調性的概念及原理，讓學生更易掌握証明方法。

四、教學重點

1. 函數單調性及最值的概念。
2. 函數單調性的判斷及証明。
3. 函數單調性及最值之探究及應用。

五、教學難點

1. 函數單調性的判斷及証明。
2. 求函數局部自變量範圍內的最大(小)值。

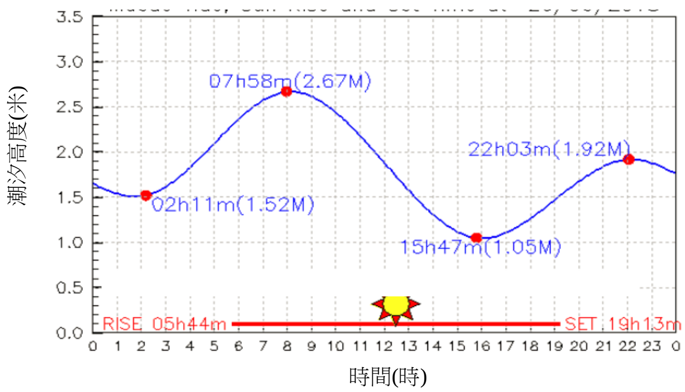
六、教學用具

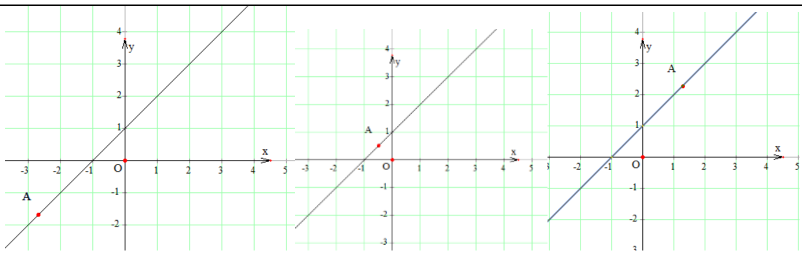
平板或電腦、DM_Lab 軟件、

Geogebra 軟件 (免費網上軟件，網址：https://www.geogebra.org/graphing)

貳、教案

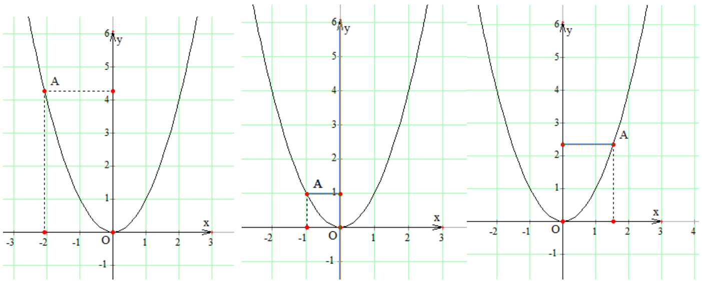
班級	高一級	人數	25 人
實施日期	2017 年 10 月 13 日	時間	40 分鐘
課題	函數的單調性概念		
配應基力要求編號	A-5-6		
教學目標	**知識與技能：** 1. 理解函數的單調性，能判斷函數在給定區間上的單調性。 2. 瞭解函數單調區間的概念，並能根據圖像說出函數的單調區間。 3. 會求某些函數的定義域。		
	過程與方法： 1.以生活情境引入教學內容，探索新知識，從圖像的變化轉化到函數單調性的具體表徵。 2.體會從特殊到一般，從具體到抽象，從感性到理性的數學思維方法。 3.利用平板電腦及 Geogebra 軟件輔助教與學，尋找及發現含有參數的函數的變化規律。		
	情感、態度與價值觀： 1. 利用熟悉的生活情境，感受數學無處不在。 2. 積極參與數學活動，對數學有好奇心和求知欲。		
重點	把增函數及減函數形式化地定義。		
難點	1. 函數單調性的判斷。 2. 從圖像升降的直觀感知過渡到函數增減的數學符號語言表述。		
教學資源	導學案、平板電腦或電腦、DM_Lab 軟件、Geogebra 軟件		
教材	校本教材選材自以下教材： 1. 全日制普通高級中學教科書(必修)數學 第一冊(上) 。人民教育出版社。 2. 一課 3 練 高一數學上/下。延邊教育出版社。 3. 教材快線 數學必修 4(配人教 A 版) 。光明日報出版社。 4. 高效學習法 高中數學必修 5。團結出版社。 5. 新世代數學 4AB。牛津出版社。 6. 高中人教版數學教案。孔隆教育。 7. 高中優秀教案[必修 1]數學。南方出版社。		

教學流程	教學活動	設計意圖
一. 創設情境	在 2017 年 8 月 23 日颱風天鴿吹襲澳門，造成三人在颱風期間意外死亡，四人失蹤，一艘停泊於內港的漁船沉沒。澳門和離島廣泛地區水浸，出現海水倒灌，一度水深及肩。此次風災主要成因是天鴿進入澳門期間本澳的潮汐偏高，加上颱風時雨水突然暴增，於是引發災情。有見及此，我們有必要學懂看潮汐變化圖，下圖是澳門某天的潮汐變化曲線及日出日落時間圖。(下圖資料來源：澳門地球物理暨氣象局)  圖 1 澳門某天的潮汐變化曲線及日出日落時間圖 問題 1：隨著時間的變化，潮汐變化趨勢如何？(甚麼時候潮汐上升？甚麼時候潮汐下降？) 事實上，除了潮汐變化外，我們生活中還有很多資料的變化都是有規律的，瞭解這些資料的變化規律，對我們的生活很有幫助。 本節課我們將要學習函數值的變化，透過觀察滿足函數關係的資料變化規律：隨著自變量的變化時，函數值的變化如何？這就是我們今天要研究的課題《函數的單調性》。	1. 透過生活情境引入課題，讓學生學習更投入及提升學生的學習興趣。 2. 藉由潮汐隨時間的變化上升或下降情況，轉化到函數值隨自變量的變化趨勢，繼而提出本節課題。
二.新知識探究	1、直觀感知定義： 觀察下列函數的圖像，由學生討論交流並回答下列問題： （利用 DM_Lab 動態展示） (1) $f(x)=x+1$ [說明：使用 DM_Lab 軟件展示函數 $f(x)=x+1$ 中點 A 從左到右的變化規律，下面三幅圖是點 A 在函數 $f(x)=x+1$ 上的移動變化圖。參見附件"軟件示範片 1"]	3. 善用教學軟件動態展示，演示函數圖像的變化，觀察出函數值

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


(2) $f(x)=x^2$

[說明：使用 DM_Lab 軟件展示函數 $f(x)=x^2$ 中點 A 從左到右的變化規律，下面三幅圖是點 A 在函數 $f(x)=x^2$ 上的移動變化。參見附件"軟件示範片 2"]



問題 1:這兩個函數圖像有怎樣的變化趨勢？（上升？下降？）
答：左圖中,從左到右, 圖像<u>上升</u>。
右圖中, 在 x<0 範圍內,從左到右, 圖像<u>下降；</u>
在 x≥0 範圍內, 從左到右, 圖像<u>上升</u>。

問題 2: 函數 $f(x)=x^2$

(1) 在區間 $\underline{(-\infty,0)}$ 上 y 隨 x 的增大而減小；

當 $x_1=-2$ 時， $f(x_1)=\underline{4}$；當 $x_2=-1$ 時， $f(x_2)=\underline{1}$

於是有 $x_1<x_2<0$ 時，有 $f(x_1)\underline{\quad > \quad}f(x_2)$ 。

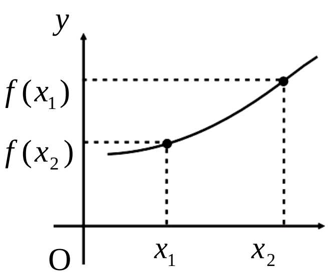
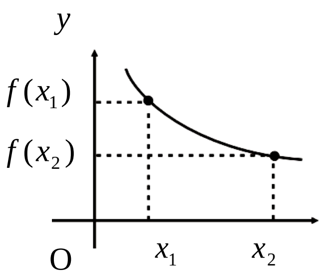
(2) 在區間 $\underline{[0,+\infty)}$ 上 y 隨 x 的增大而增大；

當 $x_3=1$時， $f(x_3)=\underline{1}$；當 $x_4=2$ 時， $f(x_4)=\underline{4}$

於是有 $0\le x_3<x_4$時，有 $f(x_3)\underline{\quad < \quad}f(x_4)$ 。
</td>
<td>
隨自變量變化的規律，理解增函數及減函數的概念。

4. 在單調性定義的探究過程中，有兩個方面是學生理解的難點：其一，利用兩個點的坐標值的大小關係來描述圖像的上升或下降趨勢；其二，兩個引數取值的任意性。利用
</td>
</tr>
</table>

總結到一般情況如下：

	在區間 D 內	在區間 D 內
圖像		
圖像特徵	從左到右，圖像上升。	從左到右，圖像下降。
數量特徵	(1) y 隨 x 的增大而增大； (2) 當 $x_1 < x_2$ 時，有 $f(x_1)$ < $f(x_2)$。	(1) y 隨 x 的增大而減小； (2) 當 $x_1 < x_2$ 時，有 $f(x_1)$ > $f(x_2)$。
直觀性定義	單調遞增函數	單調遞減函數

2. 歸納定義

1. 單調性

一般地，設函數 $f(x)$ 的定義域為 I:

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2，當 $x_1 < x_2$ 時，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那麼就說函數 $f(x)$ 在區間 D 上是**單調遞增函數**。

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2，當 $x_1 < x_2$ 時，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那麼就說函數 $f(x)$ 在區間 D 上是**單調遞減函數**。

2. 單調性與單調區間

若函數 $y = f(x)$ 在某個區間是增函數或減函數，則就說函數 $y = f(x)$ 在一區間具有(嚴格的)**單調性**，這一區間叫做函數 $y = f(x)$ 的**單調區間**。此時也說函數是這一區間上的單調函數。

圖形中局部區域上任意兩個點坐標的比較，實現圖和數值的同時對比，說明學生實現形和數的轉化，最終感知利用描述任意的兩個點的坐標大小的不等式，刻畫整個函數圖像的上升或下降趨勢，通過"任意"實現有限和無限之間的轉化。

5. 透過學生討論活動給學生總括知識，更有效地認識函數單調性的定義，強調函數必

注意:

(1)x_1 ,x_2三大特徵：①屬於同一區間；②任意性；③有大小：通常規定 $x_1 < x_2$

(2)相對於定義域，函數單調性是針對某一個區間而言的，是一個局部性質。

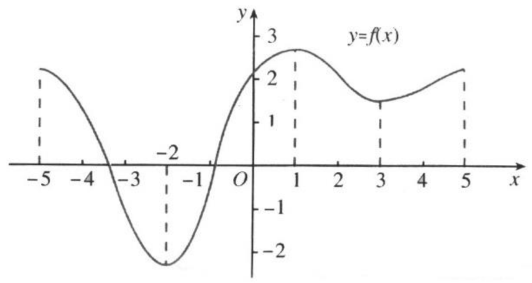
例：$y = x^2$在$(0,\ +\infty)$上是單調增函數，但在整個定義域上不是增（減）函數。

(3)有些函數在整個定義域內是單調的；有些函數在定義域內的部分區間上是增函數，在部分區間上是減函數；有些函數是非單調函數，例：常數函數。

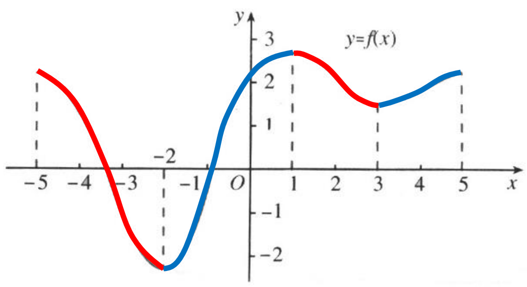
(4)函數的單調區間是其定義域的子集。

3.定義應用:

例 1、下圖是定義在[−5，5]上的函數$y = f(x)$的圖像，根據圖像說出函數$y = f(x)$的單調區間，以及在每一單調區間上，$y = f(x)$是增函數還是減函數。



[說明：這例子我會用簡報展示給學生，我把曲線按升降情況分成 4 段，以不同顏色顯示給學生觀看，如下圖。參見附件"軟件示範片 3"]



解：$y = f(x)$的單調區間有[−5，−2)，[−2，1)，[1，3)，[3，5]。

其中$y = f(x)$在 [−5，−2)及[1，3) 上是減函數；

在[−2，1)及[3，5]上是增函數。

須以同一區間上的任意兩個自變量，再由該兩自變量的對應函數值大小比較得出函數在該區間上的單調性。函數單調性是針對某一個區間而言的，是一個局部性質。

6. 例 1 加強學生對函數單調性定義的理解，分區間討論函數的變化趨勢。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

問題 1：減函數的區間可否寫成[－5，－2)⋃[1，3)？

問題 2：寫成[－5，－2）還是寫成[－5，－2]？

注意：

(1) 要瞭解函數在某一區間是否具有單調性，從圖像上進行觀察是一種常用而又較為粗略的方法。嚴格地說，它還需要根據單調函數的定義進行証明，下一節課將教授單調性的証明方法。

(2) 對於閉區間上的連續函數來說，只要在開區間上單調，它在閉區間上也就單調。因此，在考慮它的單調區間時，包括不包括端點都可以。

(3) 對於某些點上不連續的函數，單調區間不包括不連續點。

小結：（1）單調區間一般不能求並集；

（2）當端點滿足單調性定義時，可開可閉；

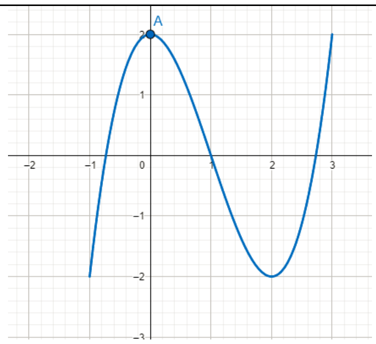
</td>
<td>7.以上兩個問題都是學生常犯錯或不清楚的情況，透過討論讓學生更清楚單調區間的正確寫法，然後進行小結。</td>
</tr>
<tr>
<td>三.課堂練習：</td>
<td>

A.基礎練習

請學生利用平板內的 Geogebra 軟件畫出以下函數

1. 輸入以下兩個函數, 然後觀察電腦的圖像填寫下表，說出函數的單調區間， 以及在每一單調區間上， 函數是增函數還是減函數。

[說明：學生需開啟平板電腦內的 Geogebra 軟件，在輸入框內打 Function[x^3-3x^2+2 ,-1,3]，然後按圖像分析。過程展示參見附件"軟件示範片 4"]

<table>
<tr><td>函數</td><td>(1) $y=x^3-3x^2+2,\quad(-1\le x\le 3)$</td></tr>
<tr><td>Geogebra 輸入框</td><td>Function[x^3-3x^2+2 ,-1,3]</td></tr>
<tr><td>簡圖</td><td>
</td></tr>
<tr><td>單調性</td><td>函數在區間[-1,0]及(2,3]上是增函數；
在區間(0,2]上是減函數。</td></tr>
</table>

</td>
<td>8. 利用教學軟件畫圖能使學生直觀感知圖像的單調變化規律，並借用科技探索一次函數、反比例函數及二次函數 $y=ax^2$ 的一般單調情況。
9. 學生透過軟件能直接得出函數圖像，學生觀察圖像特徵</td>
</tr>
</table>

2. 輸入函數 $y = mx + b$, 其中 m 及 b 是參數, 拉動參數 m 的滑桿, 並觀察函數在區間 $(-\infty, +\infty)$ 上的單調性:

[說明：要求學生使用平板內的 geogebra 軟件，畫出函數 $y = mx + b$ 圖像，如下圖(1)(2)，圖中紅圈部份是參數的大小變化滑桿，只要拉動滑桿，就能根據參數 m 的變化得出圖像 $y = mx + b$ 的變化。參見附件"軟件示範片 5"]

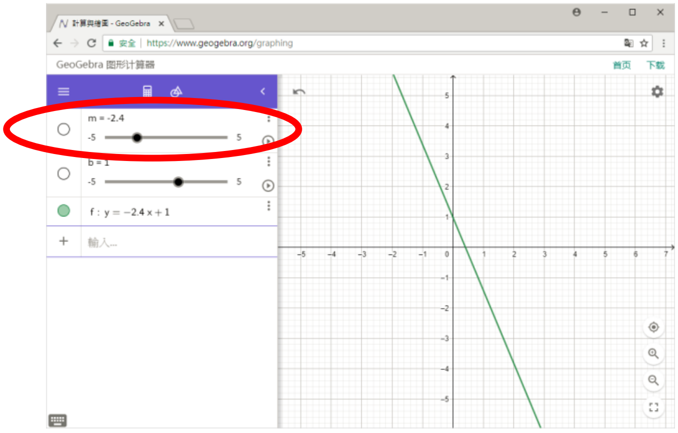


圖 1

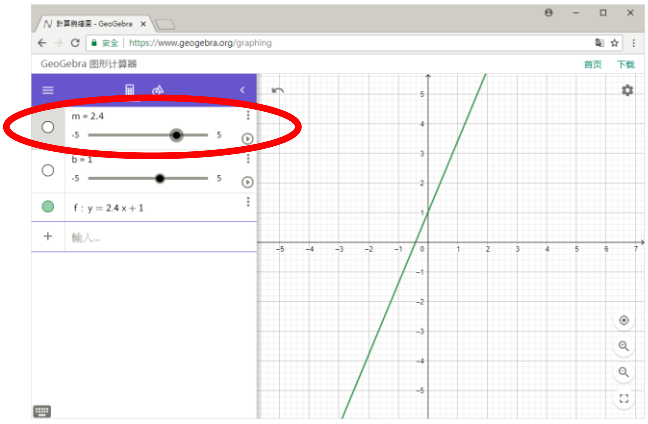


圖 2

函數	$y = mx + b$	
	$m > 0$	$m < 0$
單調性	減函數	增函數

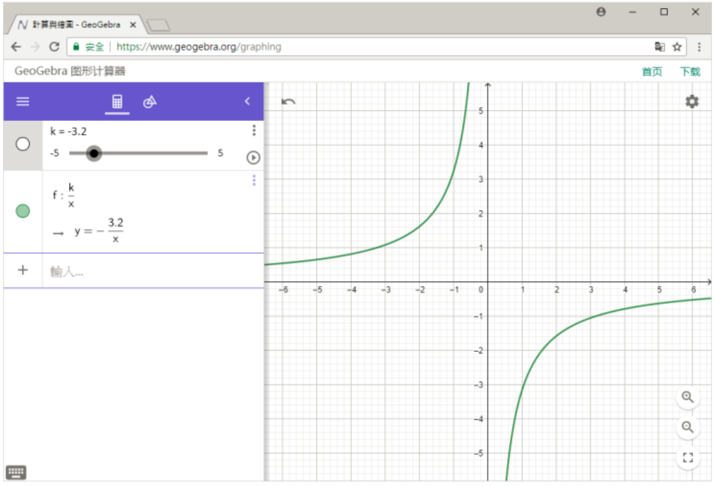
後還要求學生描出函數的簡圖，感受函數圖形的單調性，進而抽象概括相應概念。數與形的結合，加強知識內涵的認識。

3. 輸入函數 $y = \dfrac{k}{x}$，其中 k 是參數, 拉動參數 k 的滑桿,觀察函數圖像然後填寫下表:

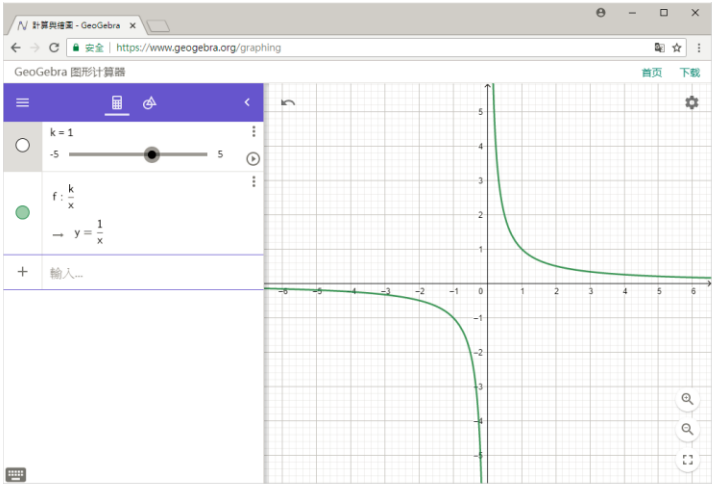
[說明：要求學生使用平板內的 geogebra 軟件，畫出函數 $y = \dfrac{k}{x}$ 圖

10. 反比例函數是經典的分段不連續函數，其

像，如下圖(3)(4)，為根據參數 k 的變化得出圖像 $y=\dfrac{k}{x}$ 的變化。參見附件"軟件示範片 6"]



圖(3)



圖(4)

函數	$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$	
	$k>0$	$k<0$
單調區間	$(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$
單調性	減函數	增函數

4. 輸入函數 $y=ax^2$, 其中 a 是參數, 拉動參數 a 的滑桿,觀察函數 $y=ax^2$ 是否具有單調性，如果有，是增函數還是減函數？

[說明：要求學生使用平板內的 geogebra 軟件，畫出函數 $y=ax^2$ 圖像，如下圖(5)(6)，為根據參數 a 的變化得出圖像 $y=ax^2$ 的變化。

中 $x=0$ 不屬於此函數的定義域，因此單調遞減區間分為 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 兩段，而且區間不包括點 $x=0$。

參見附件"軟件示範片 7"]

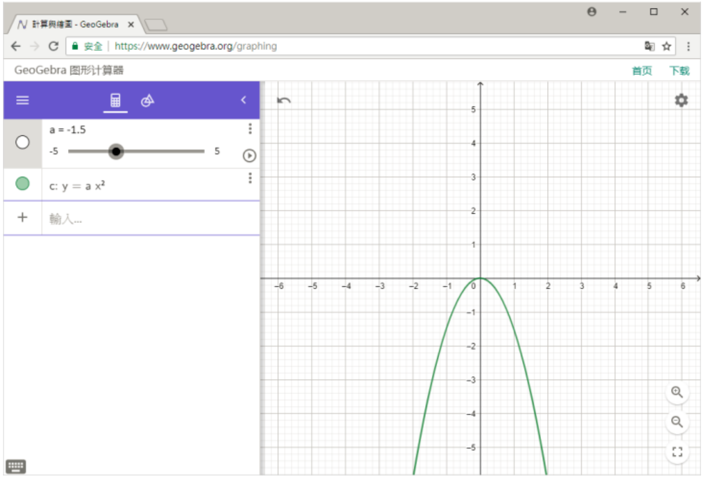


圖 5

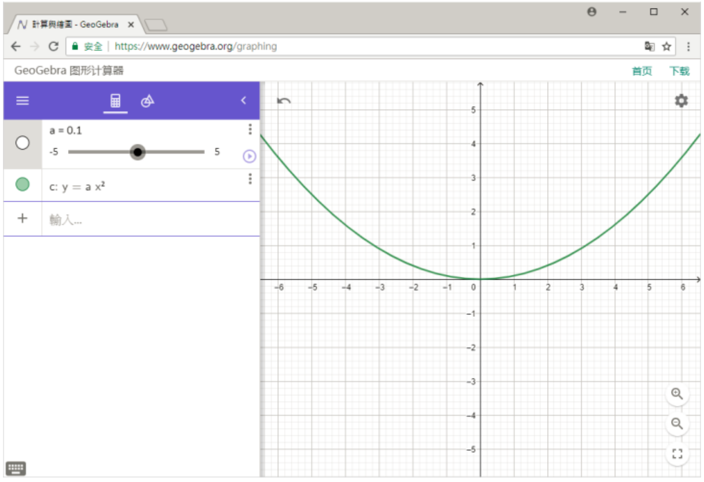


圖 6

函數	$y=ax^2$			
	$a>0$		$a<0$	
單調區間	(-∞,0)	[0,+∞)	(-∞,0)	[0,+∞)
單調性	減函數	增函數	增函數	減函數

四.作業佈置

1. 畫出下列函數的圖像，並根據圖像說出 $y=f(x)$ 的單調區間，以及在各單調區間上，函數 $y=f(x)$ 是增函數還是減函數。

（1）$y=x^2-5x+6$ ；　　（2）$y=9-x^2$ 。

2.設 $f(x)=(2a-1)x+b$ 在 R 上是減函數，則 a 的取值範圍是______。

3.判斷函數 $y=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,2]$ 、$[2$ ，$+\infty)$ 上的單調性。

<table>
<tr><td>班級</td><td>高一級</td><td>人數</td><td>25 人</td></tr>
<tr><td>實施日期</td><td>2017 年 10 月 16 日</td><td>時間</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td>課題</td><td colspan="3">函數單調性的判斷及証明</td></tr>
<tr><td>配應基力要求編號</td><td colspan="3">A-5-6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">教學目標</td><td colspan="3">知識與技能：
1. 熟練掌握證明函數單調性的方法。
2. 會證明一些較複雜的函數在某個區間上的單調性。
3. 能利用函數的單調性定義解決一些簡單的問題。
4. 學會運用圖像來理解及研究函數的性質，能熟練地畫出函數的圖像，領悟學習數形結合思想的重要性。</td></tr>
<tr><td colspan="3">過程與方法：
1. 培養學生利用數學概念進行判斷推理的能力。
2. 知道用圖像法、列表法來判斷單調性都是直觀猜想，我們還必須從定義出發去嚴格地證明 ，証明猜想的正確性。</td></tr>
<tr><td colspan="3">情感、態度與價值觀：
1. 初步養成樂於思考、勇於質疑、言必有據等良好品質。
2. 在運用數學知識和方法解決問題的過程中，認識數學的價值。</td></tr>
<tr><td>重點</td><td colspan="3">函數單調性的証明。</td></tr>
<tr><td>難點</td><td colspan="3">掌握函數單調性的証明方法。</td></tr>
<tr><td>教學資源</td><td colspan="3">導學案、畫圖工具。</td></tr>
<tr><td>教材</td><td colspan="3">校本教材選材自以下教材：
1. 全日制普通高級中學教科書(必修)數學 第一冊(上) 。人民教育出版社。
2. 一課 3 練 高一數學上/下。延邊教育出版社。
3. 教材快線 數學必修 4(配人教 A 版) 。光明日報出版社。
4. 高效學習法 高中數學必修 5。團結出版社。
5. 新世代數學 4AB。牛津出版社。
6. 高中人教版數學教案。孔隆教育。
7. 高中優秀教案[必修 1]數學。南方出版社。</td></tr>
</table>

教學流程	教學活動	設計意圖
一. 複習回顧	(1)請學生 畫出函數 $f(x)=x+2$ 、 $f(x)=x^2$ 的圖像。	1. 要求學生動手畫出函數的圖

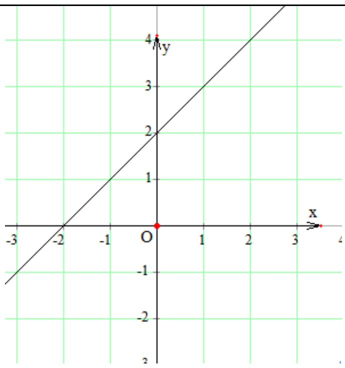


圖 1: $f(x)=x+2$

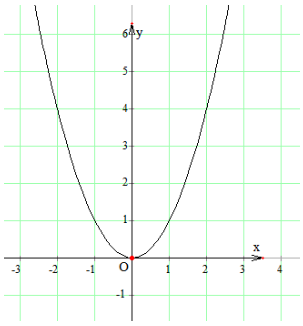


圖 2: $f(x)=x^2$

(2)思考：根據 $f(x)=x+2$ 、 $f(x)=x^2$ $(x>0)$ 的圖像。

進行討論：隨 x 的增大，函數值怎樣變化？當 $x_1<x_2$ 時，$f(x_1)$與 $f(x_2)$的大小關係怎樣？

觀察 $f(x)=x+2$ 及 $f(x)=x^2$ $(x>0)$ 可得兩個函數在定義域上函數值都是隨 x 增大而增大。當 $x_1<x_2$ 時，$f(x_1)<f(x_2)$。

1. 函數單調性的定義：

設函數$f(x)$的定義域為 I:

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值x_1，x_2，

當$x_1<x_2$時，都有$f(x_1)<f(x_2)$，則函數$f(x)$在區間 D 上是增函數。

當$x_1<x_2$時，都有$f(x_1)>f(x_2)$，則函數$f(x)$在區間 D 上是減函數。

像，在列表及畫圖過程中體驗函數圖像的單調性，同時要求學生思考函數在同一單調區間上任意兩點的自變量及函數值變化情況，進而猜想出判定函數單調性的一般性條件。

二. 新知識探究

例 1. 試判斷函數 $f(x)=x^2+x$ 在區間（0，$+\infty$）上是增函數還是減函數？並給予證明。

分析：問 1：除了圖像法判定函數單調性還有什麼方法？

2：如何用定義法判定函數單調性？

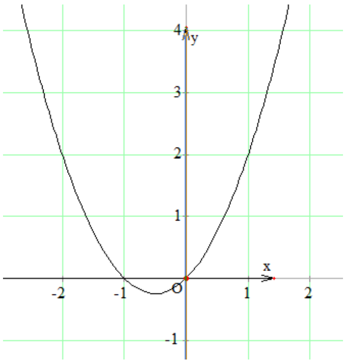
3：用定義判定函數單調性的關鍵是什麼？

解：i)列表

x	-2	-1	-0.5	0	1
y	2	0	-0.25	0	2

2. 透過例題強調函數除了用圖像法去判斷單調性外，還有列表法。但這兩種方法都是直觀猜

ii)簡圖



iii) 觀察上圖可得函數 $f(x)=x^2+x$ 在（0，＋∞）上是<u>增函數</u>。

iv)

證明 設 x_1、x_2 是$(0,+\infty)$上的任意兩個值，且 $x_1<x_2$， 取值

有 $f(x_1)=\underline{x_1^2+x_1}$及 $f(x_2)=\underline{x_2^2+x_2}$

則 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1{}^2+x_1)-(x_2{}^2+x_2)$

$=\underline{x_1^2-x_2^2+x_1-x_2}$

$=\underline{(x_1-x_2)(x_1+x_2)+x_1-x_2}$ 作差變形

$=\underline{(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)}$

又 $0<x_1<x_2$，故 $\underline{x_1-x_2<0}$，$\underline{x_1+x_2+1>0}$ 定號

則 $f(x_1)-f(x_2)$ <u><0</u>，即：$f(x_1)$ <u><</u> $f(x_2)$

因此，函數 $f(x)=x^2+x$ 在（0，＋∞）上是<u>增函數</u>。 下結論

歸納

證明函數單調性的步驟：

第一步：設x_1 ,x_2∈給定的區間，且$x_1<x_2$；

第二步：計算並化$f(x_1)-f(x_2)$至最簡；

第三步：判斷差的符號；

第四步：下結論。

例 2：根據下列函數的圖像，指出它們的單調區間及單調性，並運用定義進行證明。

（1） $f(x)=-3x+2$ ；

解：i)列表

想，我們還必須從定義出發去嚴格地證明，証明猜想的正確性。提醒學生用定義判定函數單調性的關鍵是在給定的自變量區域上取任意兩自變量，再由該兩自變量的對應函數值大小比較得出函數在該區間上的單調性。

3. 給學生合作討論總結，共同梳理新知識，讓知識更加牢固。

4. 讓學生掌握運用列表法及圖像法找出函數的單

x	0	$\frac{2}{3}$
y	2	0

ii) 由上表可得函數 $f(x)=-3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是減函數。

iii)證明如下:

設 x_1、x_2 是 R 上的任意兩個值，且 $x_1<x_2$，

有 $f(x_1)=-3x_1+2$ 及 $f(x_2)=-3x_2+2$

則 $f(x_1)-f(x_2)=-3x_1+2-(-3x_2+2)$

$=-3(x_1-x_2)$

又 $0<x_1<x_2$，故 $x_1-x_2<0$，

則 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

即： $f(x_1)>f(x_2)$

因此，函數 $f(x)=-3x+2$ 在 R 上是減函數。

調區間及單調性，並利用單調性定義去驗證猜想，善用數形結合的思想方法去解決問題。

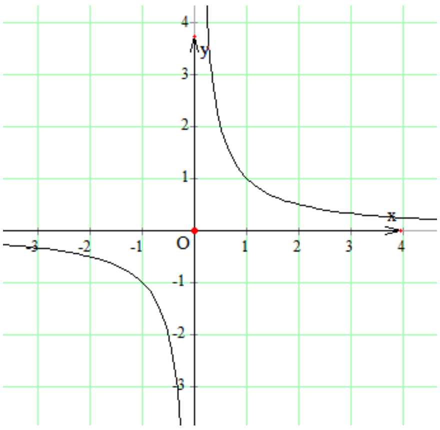
（2） $f(x)=\frac{1}{x}$

解：定義域是 $\{x\mid x\neq 0\}$ 。

i) 列表

x	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

ii)簡圖



5. 透過例題體驗反比例函數單調性証明中作差變形化簡技巧，運算更精煉。

iii)函數 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上是減函數。

iv)證明如下:

設 x_1、x_2 是 R 上的任意兩個值，且 $x_1<x_2<0$ ，

有 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}$ 及 $f(x_2)=\dfrac{1}{x_2}$

則 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}$

$=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$

又 $0<x_1<x_2$ ，故 $x_2-x_1>0$ 且 $x_1x_2>0$ ，

則 $f(x_1)-f(x_2)>0$ ，

即： $f(x_1)>f(x_2)$ 。

因此，函數 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

同理可証得函數在 $(0,+\infty)$ 上是減函數。

例 3：判斷函數 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ $(x\in(0,+\infty))$ 的單調性，並用單調性的定義證明你的結論。

證明：設 $x_1,x_2\in(0,\ +\infty)$，且 $x_1<x_2$

有 $f(x_1)=x_1^2-\dfrac{1}{x_1}$ 及 $f(x_2)=x_2^2-\dfrac{1}{x_2}$

則 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-\dfrac{1}{x_1}-(x_2^2-\dfrac{1}{x_2})$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2})$

$=(x_1-x_2)(x_1+x_2+\dfrac{1}{x_1x_2})$

又 $0<x_1<x_2$ ，故 $x_1-x_2<0$ 且 $x_1+x_2+\dfrac{1}{x_1x_2}>0$ ，

則 $f(x_1)-f(x_2)<0$ ，

6. 體會學習深入淺出，此函數由二次函數和反比例函數兩個部份組成，透過此例題讓學生知道証明中作差變形時綜合運用因式分解和不等式的方法是一般單

	即：$f(x_1) < f(x_2)$。 因此，函數 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數。 例 4： (1)若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 在 $[-2,+\infty)$ 上是增函數，在 $(-\infty,-2]$ 上是減函數，則實數 m 的值為_____； 解：因函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 是開口向上的拋物線，且根據題意在 $[-2,+\infty)$ 上是增函數，在 $(-\infty,-2]$ 上是減函數可得知當 $x=-2$ 時函數有最小值，即 $x=-2$ 為此函數中頂點的橫坐標。 於是有 $x_{頂點}=-\frac{-m}{2\times 4}=-2$ 得 $m=-16$。 答案：-16 (2) 若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 的單調遞增區間為 $[-2,+\infty)$，則實數 m 的值為_____。 解：此題中單調遞增區間為 $[-2,+\infty)$，且沒有提及單調遞減區間，於是有函數圖像的頂點橫坐標 $x_{頂點}\le -2$，即 $-\frac{-m}{2\times 4}\le -2$ 得 答案 $m\le -16$。	調性証明的技巧。 7. 例 4 訓練學生逆向思考，把難題轉化為簡單的問題。利用已知條件中函數的單調性，並根據單調性的定義求出原二次函數的未知值。第例 4(1)題已知中所給定的兩個連續的單調區間，這樣我們就能根據函數圖像的連續性得出 x=-2 實際是圖像的頂點橫坐標。而第例 4 (2)題只提供單調遞增區
三. 課堂總結	定義法證明函數單調性的步驟： 1.取值:設任意 x_1、x_2 屬於給定的區間，且 $x_1 < x_2$； 2.作差變形: $f(x_1)-f(x_2)$ 變形的常用方法: 因式分解、配方、有理化等； 3.定號:確定 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正負號； 4.下結論:由定義得出函數的單調性。 這種證明方法稱為：作差比較法。	
四. 課堂練習	1. 下列函數，在區間（0，+∞）上為增函數的是____　答案: ② ①y=3-2x　②y=x²-1　③y=$\frac{1}{x}$　④y=-|x| 解：①y=3-2x 是單調遞減函數；　(不合題意)	

②y=x^2-1 是開口向上的拋物線，且頂點坐標是(0,-1)，即有在區間（0，+∞）上為增函數；　(合題意)

③y=$\dfrac{1}{x}$ 在區間 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是減函數；(不合題意)

④y=-|x|$=\begin{cases}-x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$ 在區間（0，+∞）上為減函數。(不合題意)

2. .證明：

(1) 函數 $f(x)=-2x+1$ 在 R 上是減函數；　答案:略

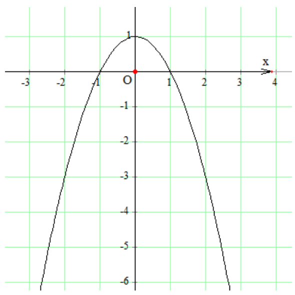
(2) 函數 $f(x)=\dfrac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數.　答案:略

3. 判斷函數 y=-x^2+1 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數還是減函數? 並證明你的判斷。

解：i) 列表

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	0	1	0	-3

ii) 畫圖



iii) 觀察圖像可得函數 y=-x^2+1 在 $(0,+\infty)$ 上是減函數。

iv) 証明略

五. 佈置作業

1.判斷函數 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數還是減函數，並證明你的判斷；如果 $x\in(0,+\infty)$，函數 $f(x)$ 是增函數還是減函數？

（提示：可利用公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$）

2.證明：

（1）函數 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數；

（2）函數 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數.

間，這反映該單調性為函數的局部單調性，這樣則需要判斷圖像頂點的取值範圍。

8. 課堂練習加強學生對單調性定義的理解，學會思辯的思維方法。多做練習鞏固計算步驟及方法。

	3. 證明二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 在區間 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上是增函數.	

<table>
<tr><td>班級</td><td>高一級</td><td>人數</td><td>25 人</td></tr>
<tr><td>實施日期</td><td>2017 年 10 月 17 日</td><td>時間</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td>課題</td><td colspan="3">函數的最值</td></tr>
<tr><td>配應基力要求編號</td><td colspan="3">A-5-8, E-1-1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">教學目標</td><td colspan="3">知識與技能：
1. 理解函數的最大(小)值的概念、其代數意義及幾何意義。
2.理解函數的最大(小)值是在整個定義域上研究函數。體會求函數最值是函數單調性的應用之一。
3.利用函數的單調性求函數的最大(小)值。</td></tr>
<tr><td colspan="3">過程與方法：
1. 在學習本節內容時，學生觀察、歸納、表述、交流和合作形成知識。
2. 利用平板電腦及 Geogebra 軟件輔助教與學，讓學生體會數與形結合的作用，加快課堂教學節奏。
3. 培養學生觀察力及動手能力。
4. 培養學生數感，訓練學生圖與數的語言表達。</td></tr>
<tr><td colspan="3">情感、態度與價值觀：
1. 培養學生的探索精神，自主學習的能力。
2. 增強學習知識的趣味和自信心。</td></tr>
<tr><td>重點</td><td colspan="3">會求區間上連續函數的最大(小)值。</td></tr>
<tr><td>難點</td><td colspan="3">用圖像法、列表法、比較解析法求函數局部自變量範圍內的最大(小)值。</td></tr>
<tr><td>教學資源</td><td colspan="3">導學案、平板電腦及 Geogebra 軟件。</td></tr>
<tr><td>教材</td><td colspan="3">校本教材選材自以下教材：
1. 全日制普通高級中學教科書(必修)數學 第一冊(上) 。人民教育出版社。
2. 一課 3 練 高一數學上/下。延邊教育出版社。
3. 教材快線 數學必修 4(配人教 A 版) 。光明日報出版社。
4. 高效學習法 高中數學必修 5。團結出版社。
5. 新世代數學 4AB。牛津出版社。
6. 高中人教版數學教案。孔隆教育。
7. 高中優秀教案[必修 1]數學。南方出版社。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教學流程</th><th>教學活動</th><th>設計意圖</th></tr>
<tr><td>一. 複習回顧</td><td>

1. 請學生指出函數 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 及 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 的單調區間及單調性

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$</th><th colspan="2">$f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$</th></tr>
<tr><td>頂點坐標</td><td colspan="2">$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$</td><td colspan="2">$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$</td></tr>
<tr><td>單調區間</td><td>$(-\infty,-\frac{b}{2a})$</td><td>$(-\frac{b}{2a},+\infty)$</td><td>$(-\infty,-\frac{b}{2a})$</td><td>$(-\frac{b}{2a},+\infty)$</td></tr>
<tr><td>單調性</td><td>減函數</td><td>增函數</td><td>增函數</td><td>減函數</td></tr>
</table>

2.函數 $f(x)=x^2$ 在(－ ∞ ，0)上是減函數，在[0，+∞) 上是增函數。

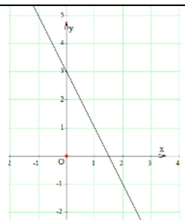
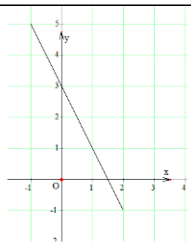
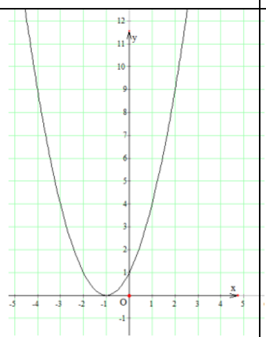
當 $x\le 0$ 時，則 $f(x)$__≥__$f(0)$；當 $x\ge 0$ 時， 則 $f(x)$__≥__$f(0)$。

從而 $x\in R$ 都有 $f(x)$__≥__$f(0)$。

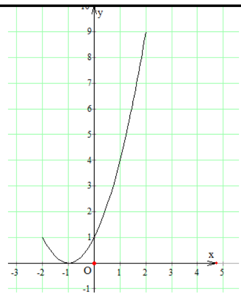
A. 探究任務：**函數最大（小）值的概念**

</td><td>1. 鞏固所學習的知識，培養邏輯思維，為新課打好基礎。</td></tr>
<tr><td>二. 新知識探究</td><td>

思考：請學生利用 Geogebra 畫出下列函數，然後完成下表：

<table>
<tr><th>函數</th><th>描出簡圖</th><th>最高點坐標</th><th>最低點坐標</th></tr>
<tr><td>$f(x)=-2x+3$</td><td></td><td>沒有</td><td>沒有</td></tr>
<tr><td>$f(x)=-2x+3$,
$x\in[-1,2]$</td><td></td><td>(-1,5)</td><td>(2,-1)</td></tr>
<tr><td>$f(x)=x^2+2x+1$</td><td></td><td>沒有</td><td>(-1,0)</td></tr>
</table>

</td><td>2. 善用教學軟件輔助學習，培養學生觀察力及動手能力，體現數與形的結合，透過活動讓學生發現有兩端的定義域範圍實際是原函數圖像的局部截取，函數的最高(低)點坐</td></tr>
</table>

$f(x)=x^2+2x+1$, $x\in[-2,2]$		(2, 9)	(-1,0)

標受定義範圍而變化。

討論：觀察上表，你能體現了函數值的什麼特徵？

3. 提出問題討論，激發學生思考，培養學生數感及觀察力，訓練學生圖與數的語言表達。

定義：

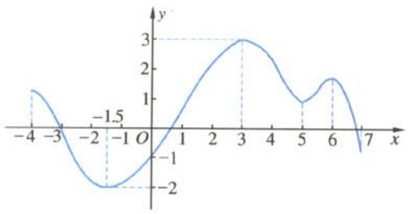
設函數 $y=f(x)$的定義域為 I，如果存在實數 M 滿足：對於任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\le M$；存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0) = M$。那麼，稱 M 是函數 $y=f(x)$的最大值（Maximum Value）。

同樣地，對於任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\ge M$；存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0) = M$。那麼，稱 M 是函數 $y=f(x)$的最小值（Minimum Value）。

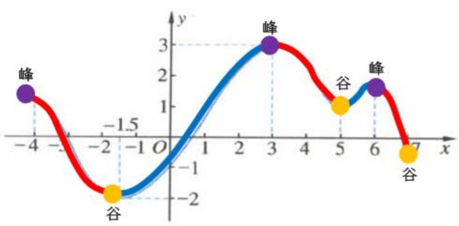
代數意義	最小值即定義域中函數值的最小值，最大值即定義域中函數值的最大值。
幾何意義	函數圖像的最高（低）點的縱坐標即為該函數的最大（小）值。

B.例題解析

例 1：如圖為函數 $y=f(x)$，$x\in[-4,7]$的圖像，指出它的單調區間、最大值及最小值。



[說明：利用動畫展示。根據函數圖的定義域及升降情況把曲線分成 5 段，並用顏色分段顯示，表明圖中的峰點及谷點，然後再判斷最高點及最低點，如下圖。參見附件"軟件示範片 8"]



4. 利用圖像法及新舊知識應用練習，鞏固所學知識。透過此例題給學生體會到單調性是最值的基本條件，並訓練學生的判別能力，篩選眾中之”最”。

解：

(1) 單調遞增區間有:$(-1.5,3]$及$(5,6]$；

(2) 單調遞減區間有: $[-4,-1.5]$及$(3,5]$及$(6,7]$；

(3) 圖中的最高點坐標是$(3,3)$，於是有最大值 3；

(4) 圖中的最低點坐標是$(-2,-2)$，於是有最小值-2。

例 2：求下列函數的頂點坐標、最大值或最小值。

（1） $y=2x^2-3x+1$；　（2） $f(x)=-x^2+2x+3$。

解：(1) 函數 $y=2x^2-3x+1$ 的開口向上，頂點坐標是$\left(\frac{3}{4},\frac{-1}{8}\right)$

有最小值 $\frac{-1}{8}$。

(2)函數 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的開口向下，頂點坐標是$(1,4)$

有最大值 4。

例 3：求函數 $y=8+2x-x^2$ 分別在區間：（1） $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$；（2） $[-2,2)$ 上的最大值和最小值。

解：(1) 函數 $y=8+2x-x^2$ 開口向下。

頂點坐標的橫坐標是 1 ，縱坐標 9 ；

在區間$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$上，當 $x_1=-1$ 時，函數值 $y_1=$ 5 ；

當 $x_2=\frac{1}{2}$ 時，函數值 $y_2=\frac{35}{4}$。

比較 y_1及y_2 兩個值，得出最大值是 $\frac{35}{4}$ ；最小值是 5 。

(2) 在區間$[-2,2)$上，當 $x_1=-2$ 時，函數值 $y_1=$ 0 ；當 $x_2=2$ 時，函數值 $y_2=$ 8 。

提示：因為 $y=8+2x-x^2$ 開口向下，而且區間範圍未包括圖像中 $x=2$ 的點，所以我們先比較 y_1及y_2 來找出最小值，再由頂點坐標得出最大值。

因此，最大值是 9 ；最小值是 0 。

5. 例 2 中二次函數圖像是最值問題的經典，透過兩個開口相反的二次函數例子，給學生知道並掌握開口向上時頂點縱坐標就是函數的最小值；相反開口向下時頂點縱坐標就是函數的最大值。

6. 例 3 中給學生體會求最值除了可用圖像法外，還可用比較解析法解題。此題中當二次函數取局部區間範圍時，提醒學生必須注意兩端及頂點的函數

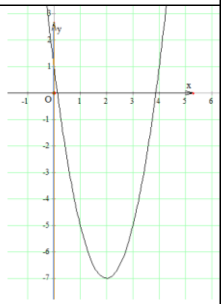
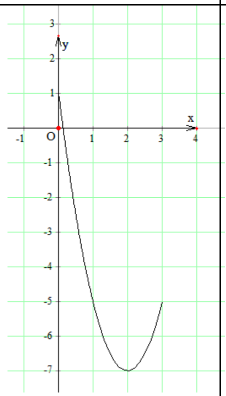
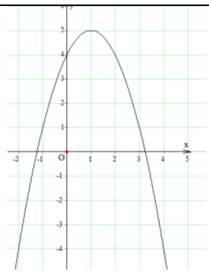
三. 小結

函數最大(小)值的定義.

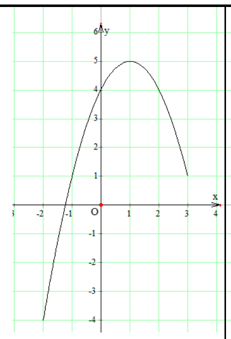
值比較。特別是第(2)題中局部區間圖像未有包含其中一個端點。

四. 課堂練習

根據函數圖像填寫下表：

函數	簡圖	最大值	最小值
$y=2x^2-8x+1$		沒有	-7
$y=2x^2-8x+1, x\in[0,3]$		1	-7
$y=-x^2+2x+4$		5	沒有

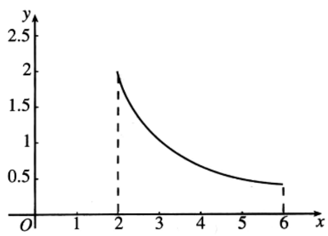
7. 課堂練習模仿前面的例題，鼓勵學生練習，提升動手能力，建立自信。

$y=-x^2+2x+4, x\in[-2,3]$		5	-4

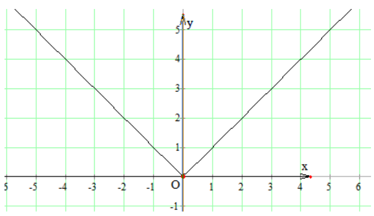
五.作業佈置

1.已知函數 $f(x)=x^2-2x-3$，若 $x\in[-3, 1]$時，求函數 $f(x)$的最值。

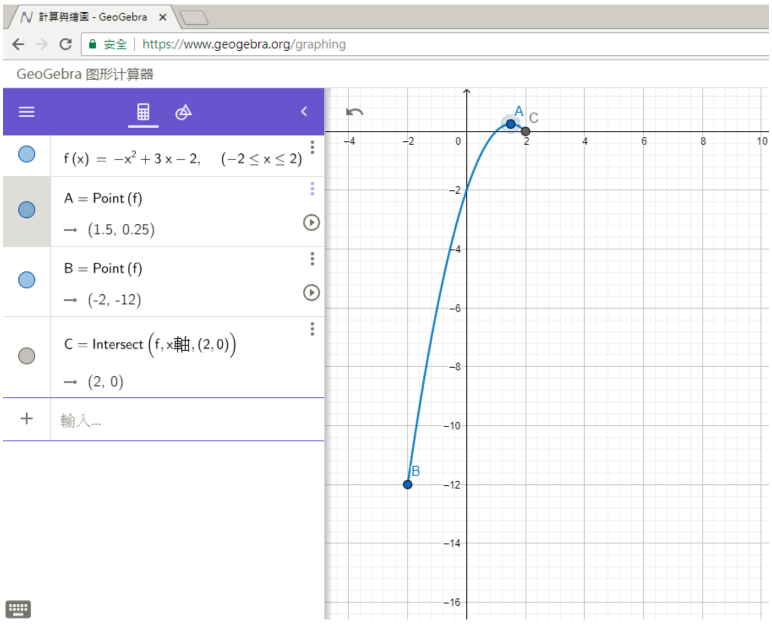
2. 如圖，已知函數 $y=\dfrac{2}{x-1},(x\in[2,6])$ ，求函數的最大值和最小值。



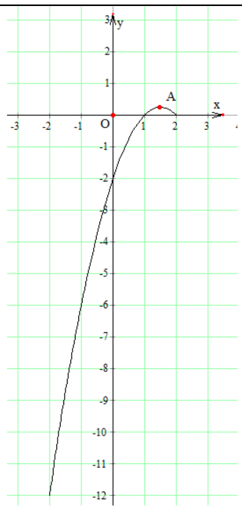
3. “菊花”煙花是最壯觀的煙花之一. 製造時一般是期望在它達到最高點時爆裂. 如果煙花距地面的高度 h m 與時間 t s 之間的關係為 $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$，那麼煙花冲出後什麼時候是它爆裂的最佳時刻？這時距地面的高度是多少（精確到 1m）？

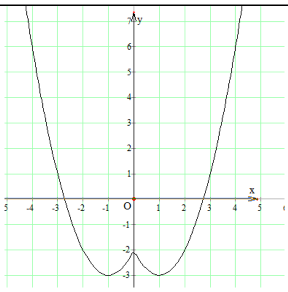
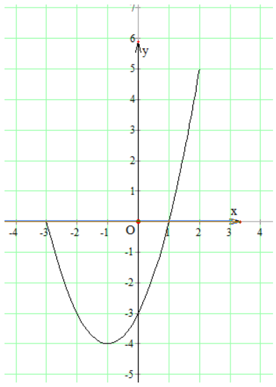
<table>
<tr><td>班級</td><td>高一級</td><td>人數</td><td>25 人</td></tr>
<tr><td>實施日期</td><td>2017 年 10 月 18 日</td><td>時間</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td>課題</td><td colspan="3">函數單調性及最值之應用 (探究實驗課)</td></tr>
<tr><td>配應基力要求編號</td><td colspan="3">A-5-6, A-5-8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">教學目標</td><td colspan="3">知識與技能：
1. 利用 Geogebra 軟件畫出函數圖像，結合函數表示的圖像法與實驗分析，體會數形結合的必要性及優越性。
2. 老師啟發式問題引導，學生自主探究。讓學生根據函數圖像發現及探究各種函數的性質。</td></tr>
<tr><td colspan="3">過程與方法：
1. 透過數學探究實驗給學生自主探究各類函數的單調性及最值。
2. 培養學生觀察力及動手能力。
3. 培養學生數感，訓練學生圖與數的語言表達。</td></tr>
<tr><td colspan="3">情感、態度與價值觀：
在數學實驗過程中，體驗獲得成功的樂趣，鍛煉克服困難的意志，建立自信心。</td></tr>
<tr><td>重點</td><td colspan="3">運用 Geogebra 軟件輔助分析各類函數的單調性及最大(小)值。</td></tr>
<tr><td>難點</td><td colspan="3">觀察函數圖像的特點，讓學生掌握運用數學語言來表述出函數的性質。</td></tr>
<tr><td>教學資源</td><td colspan="3">導學案、電腦、Geogebra 軟件。</td></tr>
<tr><td>教材</td><td colspan="3">無</td></tr>
<tr><td>教學流程</td><td colspan="2">教學活動</td><td>設計意圖</td></tr>
<tr><td>一. 探究
實驗</td><td colspan="2">[說明：本節課以電腦軟件探究各種圖像的性質，導學案主要分兩個部份：探究實驗、課堂小結及課堂練習，全程以啟發式問題引導學生思考，探究部份老師示範，由學生合作完成答案；課堂練習由學生自己完成，然後完成練習後由老師批改。]
實驗一
請學生利用 Geogebra 軟件畫出函數 $y=|x|$
[說明：操作步驟參見附件"軟件示範片 9"。]
實驗步驟:
1. 請在輸入框內輸入函數：
$y=|x|$
2. 圖像是直線嗎？
答：不是， 是折線。
</td><td>1. 實驗一中透過分段函數 $y=|x|$ 給學生實踐探究函數的單調性及最值。強調”分段函數，分段觀察”的概念。類化前面幾節課的知識內</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
3.　在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。
提示：函數是 $y=|x|$ 分段函數，$\boxed{\text{”分段函數，分段觀察”}}$。
4.　觀察圖像可得，
(1) 當 $x<0$ 時，函數值隨 x 增大而<u>減小</u>；
(2) 當 $x\geq 0$ 時，函數值隨 x 增大而<u>增大</u>。
因此，函數在區間 <u>$[0,+\infty)$</u> 上是增函數； 在區間 <u>$(-\infty,0)$</u> 上是減函數。
5.　根據圖像能看到圖像是關於<u>　y　</u>軸對稱。
6.　當 x=<u>　0　</u>時，函數 $y=|x|$ 有最<u>低</u>點，點坐標為<u>(0,0)</u>，函數有最<u>小</u>值 <u>0</u>。

實驗二
請學生利用 Geogebra 教學軟件畫出函數
$y=-x^2+3x-2 \quad (-2\leq x\leq 2)$
[說明：這個函數的圖像 $y=-x^2+3x-2$ 的頂點不是整點，提醒學生這情況下我們不能直觀得出最高點坐標，要在曲線圖像上描出頂點 A，然後透過軟件中點 A 的數據顯示得到此函數的最高點坐標。操作步驟參見附件"軟件示範片 10"。]


實驗步驟:
1.　請在輸入框內輸入函數：Function[$-x^2+3x-2$,-2,2]
2.　在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。
3.　圖像是 $y=-x^2+3x-2$ 在區間[-2, 2]的<u>拋物</u>線圖像，頂點坐標是
</td>
<td>
容並加強應用，直接觀察圖像來分析函數中各點的坐標變化，概括所學知識，學習把圖像整理及量化，強化數學語言表達。
2. 實驗二中教導學生利用軟件畫出函數的局部圖像，然後要求學生必須動手描出簡圖，強化單調性及最值的概念。透過軟件能直接得到圖像的最高點及標，提醒學最低點縱坐生適當使用科技能提高學習效能，更快更準確地得到資訊。
3. 給學生合作討論歸納，共同梳理知識，讓知識
</td>
</tr>
</table>

	(1.5,0.25)  4. 觀察圖像可得， (1) 當 $-2 \le x \le 1.5$ 時，函數值隨 x 增大而增大； (2) 當 $1.5 \le x \le 2$ 時，函數值隨 x 增大而減小。 因此，函數在區間[-2,1.5]上是增函數； 在區間[1.5,2]上是減函數。 5. 函數 $y = -x^2 + 3x - 2$ 開口向下，圖像的最高點坐標是(1.5,0.25)，於是有最大值 $y_{\max} = 0.25$。 6. 圖中當 $x_1 = -2$ 時，則 $y_1 = -12$；當 $x_2 = 2$ 時，則 $y_2 = 0$。比較 y_1 及 y_2 的值，得出最小值 $y_{\min} = -12$。	更加牢固。
二. **課堂小結**	利用圖示法求函數單調性及最值的步驟： 1. 確定函數的定義域； 2. 利用定義域畫出函數的簡圖； 3. 觀察函數的圖像，找出函數在定義域範圍內的單調性、最大值及最小值。	
三. **課堂練習**	**練習一** 請學生利用 Geogebra 教學軟件畫出函數 $y = x^2 - 2\|x\| - 2$ **[說明：操作步驟參見附件"軟件示範片 11"。]** 實驗步驟: 1. 請在輸入框內輸入函數： $y = x^2 - 2\|x\| - 2$。 2. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。 3. 觀察圖像可得 (1) $x \le -1$ 時，函數值隨 x 增大而減小； (2) $-1 < x \le 0$ 時，函數值隨 x 增大而增大； (3) $0 < x \le 1$ 時，函數值隨 x 增大而減小； (4) $x > 1$，函數值隨 x 增大而增大。 因此，函數在區間 $(1,+\infty)$ 及 $(-1,0]$ 上是增函數； 在區間	**4.** 讓學生透過多練習來鞏固所學知識，題目的深淺度有所提升，加強知識的應用，提升自我學習效能，學習數學更有自信。其中練習一的函數只有最小值，根據最

	(-∞,-1]及(0,1] 上是減函數。  4. 根據圖像能看到圖像是關於 y 軸對稱。 5. 根據圖像可以看到當 x=-1 及 x=1 時，函數有最小值-3。 **練習二** 請學生利用 Geogebra 教學軟件畫出函數 $y=x^2+2x-3 \quad (-3\le x\le 2)$ [說明：操作步驟參見附件"軟件示範片 12"。] 實驗步驟: 1. 請在輸入框內輸入函數： Function[x^2+2x-3,-3,2] 2. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。  3. 函數在區間(-1,2]上是增函數，在區間[-3,-1]上是減函數。 4. 函數 $y=-x^2-2x+3 \quad (-3\le x\le 2)$ (1) 拋物線 $y=x^2+2x-3$ 的頂點坐標為(-1,-4) (2) 圖像中最高點坐標為(2,5)； 即當 x=2 時，函數有最大值 5。 (1) 圖像中最低點坐標為(-1,-4)； 即當 x=-1 時，函數有最小值-4。	值必須為"眾中之最"原則下，此函數沒有最大值。本練習也為函數的奇偶性及其他性質打好紮實的基礎。
四. **作業佈置**	1. (四校 2017 年) 求函數 y =6 $(7-x)+[9-(7-x)]x$的最小值。 2. 已知函數 $y=x^2+8x-k$ 的最小值是-7，求 k 的值。 3. 已知函數 $y=(x-2)(3-2x)+x-k$ 的最值是 1， (1) 指出該最值是最大值還是最小值。 (2) 求 k 的值。 4. 已知舉辦一個派對售出 x 張入場票所得的盈利($P)可表示成函數 $P=3200x-80x^2$。求舉辦該派對的最大盈利及其對應售出的入場票數量。	

叁、試教評估

一、嘗試衝破教學難點

過往學生在學習函數單調性時， 利用函數的單調性的定義證明具體函數的單調性是一個難點。本教學設計透過運用 DM_Lab 及 Geogebra 軟件畫圖，展示增函數和減函數的圖像特徵，讓學生更清楚明白函數單調性的概念，然後才運用定義進行具體証明，這樣能更有效深入淺出地使學生明白單調性証明過程的本意，突出數與形結合的優越性。

二、函數單調性與最值的關係

函數的最值問題實際是函數單調性的應用，尤其對於二次函數而言，由於二次函數圖像皆由一個單調遞增區間及一個單調遞減區間所組成，然而最值問題還須強調函數局部自變量範圍中函數值之”最”，這是函數單調性問題的延伸學習部份，這也是函數單調性是函數中重要性質之一的原因。

三、學生自主探究，啟發思考

本設計包括積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗証等數學活動。利用 DM_Lab 及 Geogebra 軟件輔助畫圖，培養學生數與形結合的思想方法，結合教學目標和探究學習相結合的教學方法使學生更容易解決函數單調性和最值的問題。透過探究實驗活動引導學生深入了解函數單調性及最值的意義，繼而增加對學習數學的信心。提升學生數學解難能力，懂得善用科技輔助學習，是學習函數的有效法門，也是走上新時代步伐的必要元素。

肆、反思建議

一、創設情境的教學反思

颱風”天鴿”是 2017 年內的重要新聞之一，它成為澳門的歷史，它也是 2017 年裏令澳門人民、基建及經濟造成最大傷害的天災，教案以構成”天鴿”的重要因素之一---潮汐變化引入課題，提升學生的學習興趣，由澳門的潮汐上升或下降變化圖轉化成函數值隨自變量的變化趨勢，即本節課題函數的單調性，使學生體會研究數學的價值。

二、突破函數單調性証明的教學反思

利用軟件輔助畫圖，透過函數圖像中上升或下降的變化特徵，認識函數單調性的概念，大部份學生都能明白增函數及減函數的條件和特徵，這為函數單調性的判斷及証明打下良好的基礎。傳統教授單調性課題時大多數學生都存在以下疑問:為什麼單調遞增函數及單調遞減函數有這樣的定義？經過一系列圖像分析及理解後，學生更易明白証明函數單調性的必要條件及意義。

三、使用軟件輔助的教學反思

本教學設計在教授函數單調性及最值概念之後，補充一節運用 Geogebra 軟件輔助畫圖，以協助探究函數相關性質，由圖形轉化為數學語言表述，使學生更易掌握運用函數單調性求取函數的最值，學習更加深刻，所學的知識由抽像變為具體。而且學生在探究活動過程中重覆操作及總結所學的知識，能鞏固本課題的知識，能有效提升學生的學習自信心，對函數單調性及最值的學習滿有成就感。

四、學科知識與現實的聯系

回應課題的引入情境，研究函數單調性及最值的問題，實際可應用於現實生活中很多報表之數值變化分析。所以我們身處這時代，除了要懂學科的基本概念之外，還要學懂應用知識於現實生活中，並且運用科技互相結合來解決生活中的問題。

五、函數畫圖的重要性體現

很多學生在解有關函數的題目時都會不知道應該從何入手，本教案由頭至尾也強調畫圖是學習函數的重要步驟。因此，善用圖像法、列表法、解析法、比較法等手法是解決函數難題的有效方法。

伍、參考文獻

1.全日制普通高級中學教科書(必修)數學 第一冊(上) 。人民教育出版社。

2. 全日制普通高級中學教科書(必修)數學 第一冊(上) 教師教學用書。人民教育出版社。

3. 一課 3 練 高一數學上/下。延邊教育出版社。

4. 教材快線 數學必修 4(配人教 A 版) 。光明日報出版社。

5. 高效學習法 高中數學必修 5。團結出版社。

6. 新世代數學 4AB。牛津出版社。

7. 高中人教版數學教案。孔隆教育。

8. 高中優秀教案[必修 1]數學。南方出版社。

陸、相關教材

導學案

高一第一段數學導學案一

班別：高一________ 姓名：______________ 學號：_________

課題一：函數的單調性的概念

教學目標：

1. 理解函數單調性，能判斷函數在給定區間上的單調性。

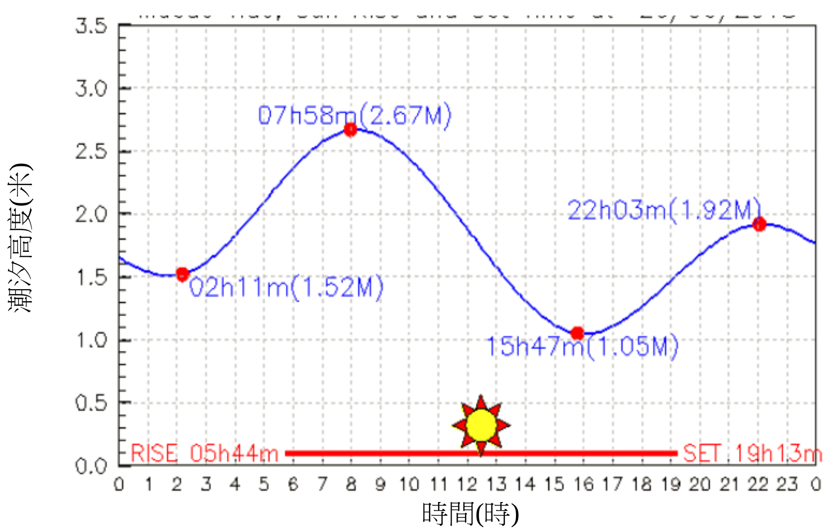
2. 瞭解函數單調區間的概念，並能根據圖像說出函數的單調區間。

3. 會求某些函數的定義域。

課堂流程：

一、 創設情境：

在 2017 年 8 月 23 日颱風天鴿吹襲澳門，造成三人在颱風期間意外死亡，四人失蹤，一艘停泊於內港的漁船沉沒。澳門和離島廣泛地區水浸，出現海水倒灌，一度水深及肩。此次風災主要成因是天鴿進入澳門期間本澳的潮汐偏高，加上颱風時雨水突然暴增，於是引發災情。有見及此，我們有必要學懂看潮汐變化圖，下圖是澳門某天的潮汐變化曲線及日出日落時間圖。



澳門某天的潮汐變化曲線及日出日落時間圖

問題 1：隨著時間的變化，潮汐變化趨勢如何？(甚麼時候潮汐上升？甚麼時候潮汐下降？)

事實上，除了潮汐變化外，我們生活中還有很多資料的變化都是有規律的，瞭解這些資料的變化規律，對我們的生活很有幫助。

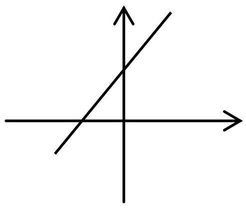
本節課我們將要學習函數值的變化，透過觀察滿足函數關係的資料變化規律：隨著自變量的變化時，函數值的變化如何，這就是我們今天要研究的課題《函數的單調性》。

二.、新知識探究

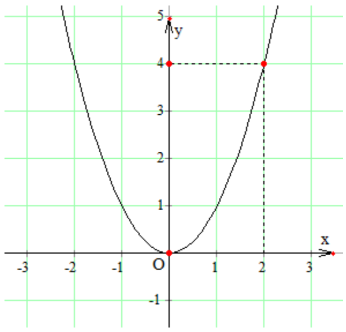
1、直觀感知定義：

觀察下列函數的圖像,由學生討論交流並回答下列問題（可用多媒體動態展示）

(1) $f(x)=x+1$



(2) $f(x)=x^2$



問題 1:這兩個函數圖像有怎樣的變化趨勢？（上升？下降？）

答：左圖中,從左到右, 圖像____。

右圖中, 在 x<0 範圍內,從左到右, 圖像___；

在 x≥0 範圍內, 從左到右, 圖像_____。

問題 2: 函數 $f(x)=x^2$

(1) 在區間_____上 y 隨 x 的增大而減小；

當 $x_1=-2$ 時，$f(x_1)=$____；當 $x_2=-1$ 時，$f(x_2)=$____。

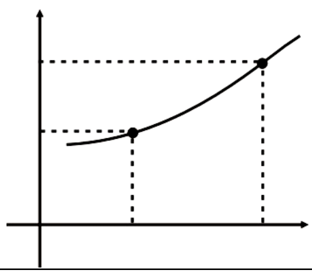
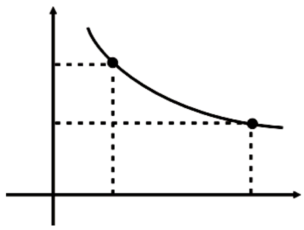
於是有 $x_1 < x_2 < 0$ 時，有 $f(x_1)$ ______ $f(x_2)$ 。

(2) 在區間 $[0,+\infty)$ 上 y 隨 x 的增大而增大；

當 $x_3 = 1$ 時， $f(x_3) =$ ____；當 $x_4 = 2$ 時， $f(x_4) =$ ____ 。

於是有 $0 \le x_3 < x_4$ 時，有 $f(x_3)$ ______ $f(x_4)$ 。

總結到一般情況如下：

	在區間 D 內	在區間 D 內
圖像		
圖像特徵	從左到右，圖像________	從左到右，圖像________
數量特徵	(1) y 隨 x 的增大而________ ； (2) 當 $x_1 < x_2$ 時， 有 $f(x_1)$ ___ $f(x_2)$ 。	(1) y 隨 x 的增大而________ ； (2) 當 $x_1 < x_2$ 時， 有 $f(x_1)$ ___ $f(x_2)$ 。
直觀性定義	單調____函數	單調____函數

2、歸納定義

(1) 單調性

一般地，設函數 $f(x)$ 的定義域為 I:

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2，當

$x_1 < x_2$

時，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那麼就說函數 $f(x)$ 在區間 D 上是**單調遞增函數**。

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值_____，當___時，都有______，那麼就說函數_____在區間 D 上是**單調遞減函數**。

1、 單調性與單調區間

若函數 $y = f(x)$ 在某個區間是增函數或減函數，則就說函數 $y = f(x)$ 在一區間具有(嚴格的)**單調性**，這一區間叫做函數 $y = f(x)$ 的**單調區間**。此時也說函數是這一區間上的單調函數

注意:

(1) x_1, x_2三大特徵：①屬於同一區間；②任意性；③有大小：通常規定$x_1 < x_2$

(2) 相對於定義域，函數單調性是針對某一個區間而言的，是一個局部性質。

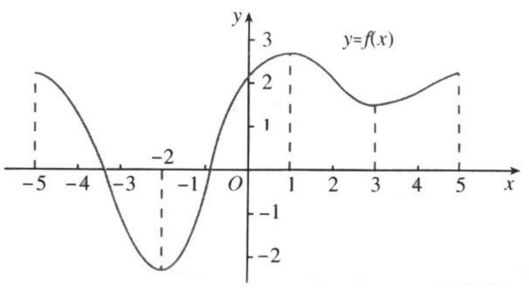
例：$y = x^2$在$(0,\ +\infty)$上是單調增函數，但在整個定義域上不是增（減）函數。

(3) 有些函數在整個定義域內是單調的；有些函數在定義域內的部分區間上是增函數，在部分區間上是減函數；有些函數是非單調函數，例：常數函數。

(4) 函數的單調區間是其定義域的子集。

3.定義應用:

例 1、下圖是定義在[−5，5]上的函數$y = f(x)$的圖像，根據圖像說出函數$y = f(x)$的單調區間，以及在每一單調區間上，$y = f(x)$是增函數還是減函數。



解：$y = f(x)$的單調區間有[−5，−2)，[−2，1)，[1，3)，[3，5]。

其中$y = f(x)$在____________________上是減函數；

在_____________________上是增函數。

強調單調區間的寫法：

問題 1：減函數的區間可否寫成[－5，－2)∪[1，3)？

問題 2：寫成[－5，－2）還是寫成[－5，－2]？

注意：

(1) 要了解函數在某一區間是否具有單調性，從圖像上進行觀察是一種常用而又較為粗略的方法。嚴格地說，它還需要根據單調函數的定義進行証明，下一節課將教授單調性的証明方法。

(2) 對於閉區間上的連續函數來說，只要在開區間上單調，它在閉區間上也就單調。因此，在考慮它的單調區間時，包括不包括端點都可以。

(3) 對於某些點上不連續的函數，單調區間不包括不連續點。

小結：（1）單調區間一般不能求並集；

（2）當端點滿足單調性定義時，可開可閉；

(3） 函數單調性的證明，必須從定義出發去證明 。

三. 課堂練習：

A.基礎練習

利用電腦內的 Geogebra 軟件畫出以下函數

1. 輸入以下兩個函數, 然後觀察電腦的圖像填寫下表, 說出函數的單調區間, 以及在每一單調區間上, 函數是增函數還是減函數。

函數	(2) $y = x^3 - 3x^2 + 2, \quad (-1 \le x \le 3)$
Geogebra 輸入框	Function[$x^3 - 3x^2 + 2$,-1,3]
簡圖	
單調性	函數在區間________________上是增函數； 在區間________________上是減函數。

2. 輸入函數 $y = mx + b$, 其中 m 及 b 是參數, 拉動參數 m 的滑桿, 並觀察函數在區間 $(-\infty, +\infty)$ 上的單調性:

函數	$y = mx + b$	
	$m > 0$	$m < 0$
單調性	____(增/減)函數	____(增/減)函數

3. 輸入函數 $y = \dfrac{k}{x}$, 其中 k 是參數, 拉動參數 k 的滑桿,觀察函數圖像然後填寫下表:

函數	$y = \dfrac{k}{x} (k \neq 0)$	
	$k > 0$	$k < 0$
單調區間		
單調性		

4. 輸入函數 $y = ax^2$, 其中 a 是參數, 拉動參數 a 的滑桿,觀察函數 $y = ax^2$ 是否具有單調性，如果有，是增函數還是減函數？

函數	$y = ax^2$			
	$a > 0$		$a < 0$	
單調區間				
單調性				

四.作業佈置

1. 畫出下列函數的圖像，並根據圖像說出 $y=f(x)$ 的單調區間，以及在各單調區間上，函數 $y=f(x)$ 是增函數還是減函數。

（1） $y=x^2-5x+6$ ；　　（2） $y=9-x^2$.

2.設 $f(x)=(2a-1)x+b$ 在 R 上是減函數，則 a 的取值範圍是______

3.判斷函數 $y=x+\frac{4}{x}$ 在 $\left(0,2\right]$ 、$\left[2，+\infty\right)$ 上的單調性

高一第一段數學導學案二

班別：高一________ 姓名：______________ 學號：__________

課題二：函數單調性的判斷及証明

教學目標：

1. 熟練掌握證明函數單調性的方法。
2. 會證明一些較複雜的函數在某個區間上的單調性。
3. 能利用函數的單調性定義解決一些簡單的問題。
4. 學會運用圖像理解及研究函數的性質，能熟練地畫出函數的圖像，領悟學習數形結合思想的重要性。

課堂流程：

一. 複習回顧

(1) 畫出函數 $f(x)=x+2$ 、 $f(x)=x^2$ 的圖像。

(2)思考：根據 $f(x)=x+2$ 、 $f(x)=x^2$ $(x>0)$ 的圖像。

進行討論：隨 x 的增大，函數值怎樣變化？當 $x_1<x_2$ 時，$f(x_1)$與 $f(x_2)$的大小關係怎樣？

(3) 函數單調性的定義：設函數$f(x)$的定義域為 I:

如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值x_1 ,x_2，

當$x_1<x_2$時，都有$f(x_1)<f(x_2)$，則函數$f(x)$在區間 D 上是__________函數。

當$x_1<x_2$時，都有$f(x_1)>f(x_2)$，則函數$f(x)$在區間 D 上是__________函數。

二.新知識探究：

例 1. 試判斷函數 $f(x)=x^2+x$ 在區間（0，＋∞）上是增函數還是減函數？並給予證明。

分析：問 1：除了圖像法判定函數單調性還有什麼方法？

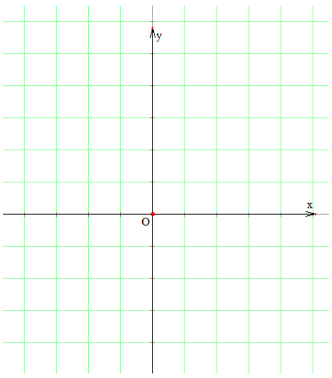
2：如何用定義法判定函數單調性？

3：用定義判定函數單調性的關鍵是什麼？

解：i)列表

x						
y						

ii)簡圖



iii) 觀察上圖可得函數 $f(x)=x^2+x$ 在（0，＋∞）上是________函數。

iv) 證明設 x_1、x_2 是$(0,+\infty)$上的任意兩個值，且 $x_1<x_2$， 取值

有 $f(x_1)=$____________及 $f(x_2)=$____________

則 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1{}^2+x_1)-(x_2{}^2+x_2)$

=______________________________ 作差變形

=______________________________

=______________________________

又 $0<x_1<x_2$ ，故 x_1-x_2____ ，x_1+x_2+1____ 定號

則 $f(x_1)-f(x_2)$____ ，即： $f(x_1)$___ $f(x_2)$

因此，函數 $f(x)=x^2+x$ 在（0，＋∞）上是_____函數。 下結論

歸納

證明函數單調性的步驟：

第一步：設x_1, x_2∈給定的區間，且$x_1 < x_2$；

第二步：計算並化$f(x_1) - f(x_2)$至最簡；

第三步：判斷差的符號；

第四步：下結論。

例 2：根據下列函數的圖像，指出它們的單調區間及單調性，並運用定義進行證明。

（1） $f(x) = -3x + 2$ ；

（2） $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 。

例 3：判斷函數 $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0, +\infty))$ 的單調性，並用單調性的定義證明你的結論。

證明：設$x_1, x_2 \in (0,\ +\infty)$，且$x_1 < x_2$

例 4：

(1)若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 在 $[-2,+\infty)$ 上是增函數，在 $(-\infty,-2]$ 上是減函數，則實數 m 的值為_____；

(2) 若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 的單調遞增區間為 $[-2,+\infty)$，則實數 m 的值為_____。

三. 課堂總結:

定義法證明函數單調性的步驟：

1.取值:設任意______屬於給定的區間，且______；

2.作差變形:________變形的常用方法: 因式分解、配方、有理化等；

3.定號:確定__________的正負號；

4.下結論:由定義得出函數的 __________。

這種證明方法稱為：作差比較法。

四. 課堂練習：

1. 下列函數，在區間（0，+∞）上為增函數的是____

①y=3-2x　②y=x^2-1　③$y=\dfrac{1}{x}$　④y=-|x|

2. .證明：

(1) 函數 $f(x)=-2x+1$ 在 **R** 上是減函數；

(3) 函數 $f(x)=\frac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

3. 判斷函數 y=-x^2+1 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數還是減函數? 并證明你的判斷。

五. 佈置作業

1.判斷函數 $f(x)=-x^3+1$在 $(-\infty,0)$上是增函數還是減函數，并證明你的判斷；如果 $x\in(0,+\infty)$，函數 $f(x)$ 是增函數還是減函數？

（提示：可利用公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ）

2.證明：（1）函數 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數；

（2）函數 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數。

3. 證明二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 在區間 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上是增函數。

高一第一段數學導學案三

班別：高一________ 姓名：______________ 學號：_________

課題三：函數的最值

教學目標：

1. 理解函數的最大(小)值的概念、其代數意義及幾何意義。

2. 理解函數的最大(小)值是在整個定義域上研究函數. 體會求函數最值是函數單調性的應用之一。

3. 利用函數的單調性求函數的最大(小)值。

課堂流程：

一. 複習回顧

1. 指出函數 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 及 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 的單調區間及單調性

	$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$		$f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$	
頂點坐標				
單調區間				
單調性				

2.函數 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty$，$0)$上是減函數，在$[0$，$+\infty)$上是增函數。

當 $x\le 0$ 時，則 $f(x)$__$f(0)$；當 $x\ge 0$ 時，$f(x)$____$f(0)$。

從而 x__R 都有 $f(x)$__$f(0)$。

二. 新知識探究

A. 探究任務：**函數最大（小）值的概念**

思考：利用 Geogebra 畫出下列函數，然後完成下表：

函數	描出簡圖	最高點坐標	最低點坐標
$f(x)=-2x+3$			
$f(x)=-2x+3$, $x\in[-1,2]$			
$f(x)=x^2+2x+1$			
$f(x)=x^2+2x+1$, $x\in[-2,2]$			

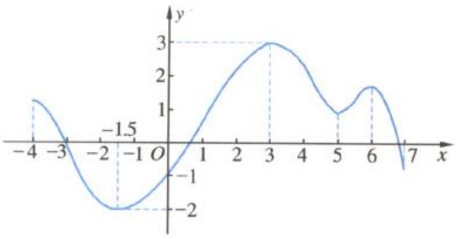
討論：觀察上表，你能體現了函數值的什麼特徵？

定義：設函數 $y=f(x)$的定義域為 $\boldsymbol{I}$，如果存在實數 M 滿足：對於任意的 $x\in\boldsymbol{I}$，都有 $f(x)\le M$；存在 $x_0\in\boldsymbol{I}$，使得 $f(x_0)=M$。那麼，稱 M 是函數 $y=f(x)$的最大值（Maximum Value）。同樣地，對於任意的 $x\in\boldsymbol{I}$，都有 $f(x)\ge M$；存在 $x_0\in\boldsymbol{I}$，使得 $f(x_0)=M$。那麼，稱 M 是函數 $y=f(x)$的最小值（Minimum Value）。

代數意義	最小值即定義域中函數值的最小值，最大值即定義域中函數值的最大值。
幾何意義	函數圖像的最高（低）點的縱坐標即為該函數的最大（小）值。

B.例题解析

例 1：如圖為函數 $y = f(x)$，$x \in [-4, 7]$ 的圖像，指出它的單調區間、最大值及最小值。



解：(1) 單調遞增區間有:______________；

(2) 單調遞減區間有:______________；

(3) 圖中的最高點坐標是(____,____)，於是

有最大值_________；

(4) 圖中的最低點坐標是(____,____)，於是有最小值_________。

例 2：求下列函數的頂點坐標、最大值或最小值。

（1） $y = 2x^2 - 3x + 1$；（2） $f(x) = -x^2 + 2x + 3$，

解：(1) 函數 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的開口向____，頂點坐標是(____,____)

有最____值______。

(2)函數 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 的開口向____，頂點坐標是(____,____)

有最____值______。

例 3：求函數 $y = 8 + 2x - x^2$ 分別在區間：（1）$\left[-1, \frac{1}{2}\right]$；（2）$[-2, 2)$ 上的最大值和最小值。

解：(1) 函數 $y = 8 + 2x - x^2$ 開口向___。

頂點坐標的橫坐標是_________，縱坐標________；

在區間 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 上，當 $x_1 = -1$ 時，函數值 $y_1 =$ ______；

當 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 時，函數值 $y_2=$ ___ $\dfrac{35}{4}$ ___ 。

比較 y_1 及 y_2 兩個值，得出最大值是_________；最小值是_________。

(2) 在區間 $[-2,2)$ 上，當 $x_1=-2$ 時，函數值 $y_1=$ ______；當 $x_2=2$ 時，函數值 $y_2=$ ______。

[提示：因為 $y=8+2x-x^2$ 開口向下，而且區間範圍未包括圖像中 $x=2$ 的點，所以我們先比較 y_1 及 y_2 來找出最小值，再得出最大值。]

因此，最大值是_________；最小值是_________。

三. 課堂小結:

函數最大(小)值的定義.

四. 課堂練習

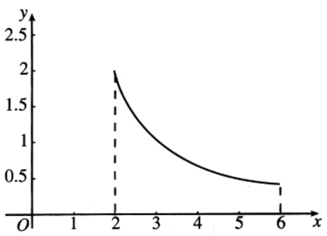
函數	簡圖	最大值	最小值
$y=2x^2-8x+1$			
$y=2x^2-8x+1, x\in[0,3]$			

$y=-x^2+2x+4$			
$y=-x^2+2x+4, x\in[-2,3]$			

五.作業佈置

1.已知函數 $f(x)=x^2-2x-3$，若 $x\in[-3，1]$時，求函數 $f(x)$的最值。

2. 已知函數 $y=\dfrac{2}{x-1},(x\in[2,6])$ ，求函數的最大值和最小值。



3.“菊花”煙花是最壯觀的煙花之一. 製造時一般是期望在它達到最高點時爆裂.

如果煙花距地面的高度 h m 與時間 t s 之間的關係為 $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$，

那麼煙花沖出後什麼時候是它爆裂的最佳時刻？這時距地面的高度是多少（精

確到 1m）？

高一第一段數學導學案工作紙四-探究實驗課

班別：高一________ 姓名：______________ 學號：_________

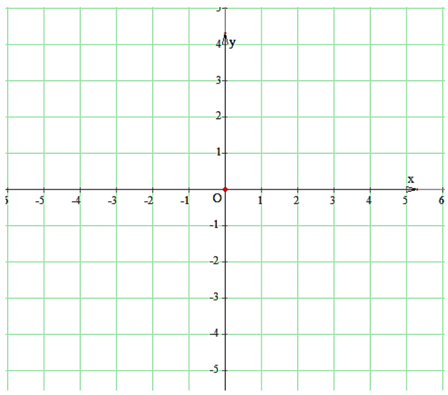
課題四：函數單調性及最值之應用(探究實驗課)

教學目標：

1. 利用軟件 Geogebra 畫出函數圖像，結合函數表示的圖像法與實驗分析，體會數形結合的必要性及優越性。
2. 老師啟發式問題引導，學生自主探究。讓學生根據函數圖像發現及探究各種函數的性質。

一. 探究：

探究一



利用 Geogebra 軟件畫出函數 $y=|x|$

實驗步驟:

1. 請在輸入框內輸入函數： $y=|x|$
2. 圖像是直線嗎？

   答：________________ 。
3. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。

   提示：函數是 $y=|x|$分段函數，$\boxed{\text{” 分段函數，分段觀察”}}$。
4. 觀察圖像可得，

   (1) 當 $x<0$時，函數值隨 x 增大而________；

   (2) 當 $x\geq 0$時，函數值隨 x 增大而________。

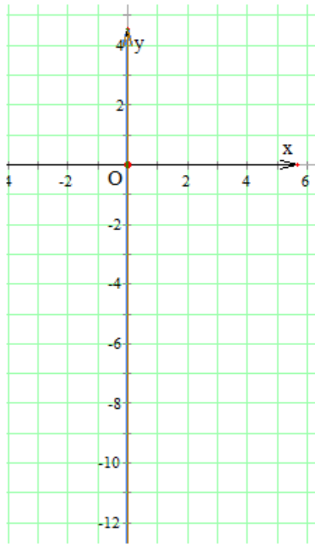
   因此，函數在區間_______________上是增函數； 在區間_______________上是減函數。
5. 根據圖像能看到圖像是關於______軸對稱。

6. 當 x=____時，函數 $y=|x|$ 有最________(高/低)點，點坐標為__________，

函數有最____值______。

探究二

利用 Geogebra 軟件畫出函數 $y=-x^2+3x-2\quad(-2\le x\le 2)$



實驗步驟:

1. 請在輸入框內輸入函數：Function[$-x^2+3x-2$,-2,2]
2. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。
3. 圖像是 $y=-x^2+3x-2$ 在區間[-2, 2]的________線圖像，頂點坐標是(___,____)
4. 觀察圖像可得，

   (1) 當 $-2\le x\le 1.5$ 時，函數值隨 x 增大而________；

   (2) 當 $1.5\le x\le 2$ 時，函數值隨 x 增大而________。

   因此，函數在區間_______________上是增函數； 在區間_______________上是減函數。
5. 函數 $y=-x^2+3x-2$ 開口向______，圖像的最高點坐標是(____,___)，於是有最大值 $y_{\max}=$______。
6. 圖中當 $x_1=-2$ 時，則 $y_1=$________；當 $x_2=2$ 時，則 $y_2=$________。比較 y_1 及 y_2 的值，得出最小值 $y_{\min}=$_______。

二. 課堂小結：

利用圖示法求函數單調性及最值的步驟：

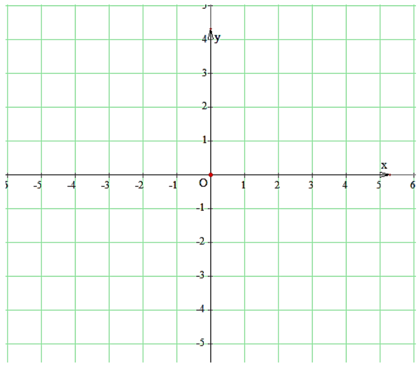
1. 確定函數的定義域；
2. 利用定義域畫出函數的簡圖；
3. 觀察函數的圖像，找出函數在定義域範圍內的單調性、最大值及最小值。

三. 課堂練習：

練習一

利用 Geogebra 軟件畫出函數 $y = x^2 - 2|x| - 2$

實驗步驟:



1. 請在輸入框內輸入函數： $y = x^2 - 2|x| - 2$ 。
2. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。
3. 觀察圖像可得

 (1) $x \le -1$ 時，函數值隨 x 增大而_____；

 (2) $-1 < x \le 0$ 時，函數值隨 x 增大而______；

 (3) $0 < x \le 1$ 時，________________________________；

 (4) $x > 1$，________________________________。

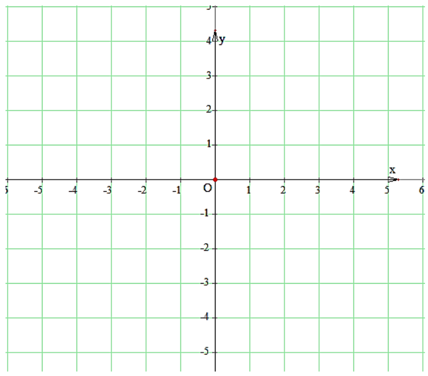
 因此，函數在區間_______________上是增函數； 在區間_______________上是減函數。

4. 根據圖像能看到圖像是關於______軸對稱。
5. 根據圖像可以看到當 x=____及 x=_____時，函數有最小值______ 。

 當 x=____時，函數有最大值______ 。

練習二

利用 Geogebra 軟件畫出函數 $y = x^2 + 2x - 3 \quad (-3 \le x \le 2)$



實驗步驟:

1. 請在輸入框內輸入函數：Function[$x^2 + 2x - 3$,-3,2]
2. 在右邊直角坐標系上描出此函數的簡圖。
3. 函數在區間____________上是增函數，在區間______________上是減函數。
4. 函數 $y = -x^2 - 2x + 3 \quad (-3 \le x \le 2)$

(1) 拋物線 $y = x^2 + 2x - 3$ 的頂點坐標為(____, ____)

(2) 圖像中最高點坐標為____________；即當 x=______時，函數有最大值____。

(3) 圖像中最低點坐標為____________；即當 x=______時，函數有最小值____。

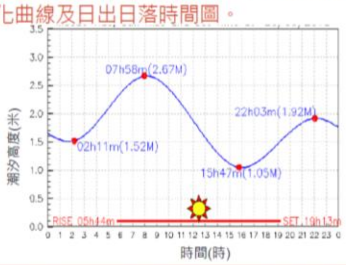
投影簡報

函數的單調性及最值（利用輔助軟件）之實踐探究

2017年8月23日

颱風天鴿吹襲澳門，造成三人在颱風期間意外死亡，四人失蹤，一般停泊於內港的漁船沉沒。澳門和離島廣泛地區水浸，出現海水倒灌，一度水深及肩。此次風災主要成因是天鴿進入澳門期間本澳的潮汐偏高，加上颱風時雨水突然暴增，於是引發災情。

我們有必要學懂看潮汐變化圖，下圖是澳門某天的潮汐變化曲線及日出日落時間圖。



問題1：隨著時間的變化，潮汐變化趨勢如何？(甚麼時候潮汐上升？甚麼時候潮汐下降？)

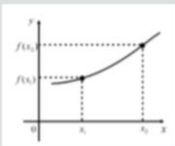
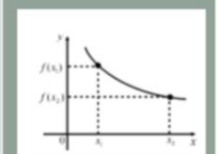
直觀感知定義

觀案下列函數的圖像，然後討論交流並回答下列問題

(1) $f(x)=x+1$　　(2) $f(x)=x^2$

問題1:這兩個函數圖像有怎樣的變化趨勢？請同學討論後在導學案上填寫

總結

	在區間D內	在區間D內
圖像		
圖像特徵	從左到右，圖像 上升 。	從左到右，圖像 下降 。
數量特徵	(1) y隨x的增大而 增大 ； (2) 當 $x_1<x_2$ 時， 有 $f(x_1)<f(x_2)$ 。	(1) y隨x的增大而 減小 ； (2) 當 $x_1<x_2$ 時， 有 $f(x_1)>f(x_2)$ 。
直觀性定義	單調 遞增 函數	單調 遞減 函數

歸納定義

一般地，設函數 $f(x)$ 的定義域為I:

如果對於定義域I內某個區間D上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2，當 $x_1<x_2$ 時，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那麼就說函數 $f(x)$ 在區間D上是**單調遞增函數**。

如果對於定義域I內某個區間D上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2，當 $x_1<x_2$ 時，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那麼就說函數 $f(x)$ 在區間D上是**單調遞減函數**。

歸納定義

若函數 $y=f(x)$ 在某個區間是增函數或減函數，則就說函數 $y=f(x)$ 在這一區間具有(嚴格的)**單調性**，這一區間叫做函數 $y=f(x)$ 的**單調區間**。此時也說函數是這一區間上的單調函數。

注意

(1) x_1, x_2 三大特徵：①屬於同一區間；②任意性；③有大小：通常規定 $x_1 < x_2$ 。

(2)相對於定義域，函數單調性是針對某一個區間而言的，是一個局部性質。

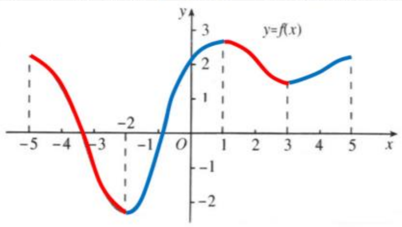
例：$y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是單調增函數，但在整個定義域上不是增（減）函數。

(3) 有些函數在整個定義域內是單調的；有些函數在定義域內的部分區間上是增函數，在部分區間上是減函數；有些函數是非單調函數，例：常數函數。

(4) 函數的單調區間是其定義域的子集。

例題

例1、下圖是定義在[－5，5]上的函數 $y=f(x)$ 的圖像，根據圖像說出函數 $y=f(x)$ 的單調區間，以及在每一單調區間上 $y=f(x)$ 是增函數還是減函數。



問題1：減函數的區間可否寫成[－5，－2)∪[1，3)？

問題2：寫成[－5，－2）還是寫成[－5，－2]？

課堂練習

- 完成導學案中的練習

2.3.2 函數的單調性判斷及証明

複習回顧

(1)請在導學案上 畫出以下函數 的圖像並回答問題。

$f(x)=x^2$ $f(x)=x+2$

(2)思考：根據 $f(x)=x+2$ $f(x)=x^2$ $(x>0)$ 、的圖像進行討論：隨x的增大，函數值怎樣變化？當$x_1<x_2$時，$f(x_1)$與$f(x_2)$的大小關係怎樣？

定義

設函數$f(x)$ 的定義域為I:

如果對於定義域I內某個區間D上的任意兩個自變量 x_1,x_2 的值，

當 $x_1<x_2$ 時，都有$f(x_1)<f(x_2)$ ，則函數 在區間D上是增函數。

當 $x_1<x_2$ 時，都有 $f(x_1)>f(x_2)$ ，則函數 在區間D上是減函數。

新知識探究

例1. 試判斷函數$f(x)=x^2+x$ 在區間（0，+∞）上是增函數還是減函數？並給予證明。

問1 ：除了圖像法判定函數單調性還有什麼方法？

2：如何用定義法判定函數單調性？

3：用定義判定函數單調性的關鍵是什麼？

歸納

證明函數單調性的步驟：

第一步： (取值)設x_1,x_2 ∈給定的區間，且$x_1<x_2$

第二步： (作差變形) 計算並化 $f(x_1)-f(x_2)$ 至最簡

第三步： (定號) 判斷差的符號；

第四步：(下結論)。

例題

例2 ：根據下列函數的圖像，指出它們的單調區間及單調性，並運用定義進行證明。

（1） $f(x)=-3x+2$ （ 2 ）$f(x)=\frac{1}{x}$

例題

例3：判斷函數$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ $(x\in(0,+\infty))$ 的單調性，並用單調性的定義證明你的結論。

例題

例4：

(1)若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 在$[-2,+\infty)$ 上是增函數，在 $(-\infty,-2]$ 上是減函數，則實數m 的值為_____；

(2) 若函數 $f(x)=4x^2-mx+5-m$ 的單調遞增區間為$[-2,+\infty)$ ，則實數 m 的值為_____ 。

課堂總結

定義法證明函數單調性的步驟：

1.取值:設任意x_1、x_2 屬於給定的區間，且 $x_1 < x_2$ ；

2.作差變形:$f(x_1)-f(x_2)$ 變形的常用方法: 因式分解、配方、有理化等；

3.定號:確定 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正負號；

4.下結論:由定義得出函數的單調性。

這種證明方法稱為：**作差比較法**。

課堂練習

- 完成導學案中的練習

2.3.3 函數的最值

複習回顧

請學生指出函數 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 及 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 的單調區間及單調性

	$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$		$f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$	
頂點坐標	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$		$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$	
單調區間	$(-\infty,-\frac{b}{2a})$	$(-\frac{b}{2a},+\infty)$	$(-\infty,-\frac{b}{2a})$	$(-\frac{b}{2a},+\infty)$
單調性	減函數	增函數	增函數	減函數

複習回顧

2.函數$f(x)=x^2$在$(-\infty，0)$上是減函數，在$[0，+\infty)$ 上是增函數。

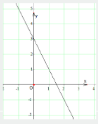
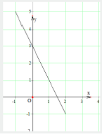
當$x\le 0$時，則$f(x)$ $\underline{\ >\ }$ $f(0)$；

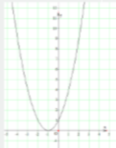
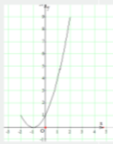
當 $x\ge 0$時，則$f(x)$ $\underline{\ >\ }$ $f(0)$。

從而$x\in R$ 都有$f(x)$ $\underline{\ >\ }$ $f(0)$。

新知識探究

思考：請利用Geogebra畫出下列函數，然後完成下表：

函數	描出簡圖	最高點坐標	最低點坐標
$f(x)=-2x+3$		沒有	沒有
$f(x)=-2x+3$ $x\in[-1,2]$		(-1,5)	(2,-1)

函數	描出簡圖	最高點坐標	最低點坐標
$f(x)=x^2+2x+1$		沒有	(-1,0)
$f(x)=x^2+2x+1$ $x\in[-2,2]$		(2, 9)	(-1,0)

定義

設函數$y=f(x)$的定義域為I，如果存在實數M滿足：對於任意的$x\in I$，都有$f(x)\le M$；存在$x_0\in I$，使得$f(x_0) = M$。那麼，稱M是函數$y=f(x)$的**最大值**（Maximum Value）。

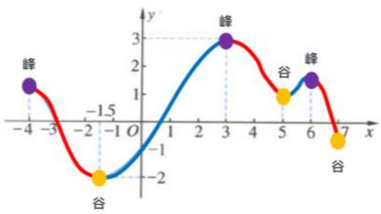
同樣地，對於任意的$x\in I$，都有$f(x)\ge M$；存在$x_0\in I$，使得$f(x_0) = M$。那麼，稱M是函數$y=f(x)$的**最小值**（Minimum Value）。

定義

代數意義	最小值即定義域中函數值的最小值，最大值即定義域中函數值的最大值。
幾何意義	函數圖像的最高（低）點的縱坐標即為該函數的最大(小)值。

例題

例1：如圖為函數$y=f(x)$，$x\in[-4,7]$的圖像，指出它的單調區間、最大值及最小值。



例題

例2：求下列函數的頂點坐標、最大值或最小值。

（1）$y=2x^2-3x+1$；（2）$f(x)=-x^2+2x+3$

例題

例3：求函數 分別在區間：（1）$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$；（2）$[-2,2)$

上的最大值和最小值。

小結

- 函數最大(小)值的定義.

課堂練習

- 完成導學案中的練習

附錄

課堂照片