2018/2019 學年教學設計獎勵計劃

指數函數、對數函數與冪函數

參選類型：教案

參賽編號：C024

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高一

簡介

數學一直是基礎教育中的一個重要組成部分，澳門近年在數學教育中取得了長足的進步。以 2017 年末公佈的 PISA 結果為例，澳門中學生的數學素養在 65 個國家/經濟體系中，全球排名第三；在 2018 年的國際中學生數學奧林匹克競賽中，澳門中學生獲得 IMO 一枚銅牌。可見無論是大眾層面還是資優生層面，澳門的基礎數學教育成績都取得了相當的進步，與國際發達國家水平相比一點也不遜色，甚至某些時候比臨近的香港表現得還稍好一些，實屬難得。

與此同時也要一分為二地看到，澳門各所學校的教學水平有一定的差異，尚有一部分數學基礎欠佳的學生。與此同時，教青局也正式公佈了高中基本學力要求，如何在兼顧基本學力的要求的前提下，提高這一部分後進生的學習信心和學習興趣也是一個值得重視的課題。

有見及此，筆者立足本校實際，撰寫了一份高一數學學年的教案。本教案主要有指數函數、對數函數與冪函數等內容。高一知識的廣度和深度都明顯比初中的要求來得高，所以進入高中後，高一學生面臨數學上的挑戰和困難都比之前大了不少,其中指數函數、對數函數與冪函數更最難的部分。筆者就此撰寫了高一學年教案。

這份學年教案中有如下設計創意和特色：

1.簡單直接，盡可能不增加學生學習內容負擔，例題設計講究，針對性強，在講授完相關知識點內容後，基本上是兩道例題+兩道練習題的教學模式。就筆者經驗，把練習時間寄託在課後效率會稍差一些，因為某些同學課後容易抄功課。所以學生需要更多時間在課堂上練習，老師也可以巡堂中即時回答同學練習過程中遇到的問題。因此所有設計的練習都必須是即時練習，形成即時反饋，有問題即時解決。

2.與時俱進，適當運用多媒體等教學軟件提高授課效率。以指數函數、對數為例，教學就充分留意到底數的不同對函數性態的影響，由此把操作機會留給學生自行操作鼠標，數形結合背後的變化，從而引導學生得出相應的結論。而互聯網中的有很多有趣的動畫式解說小視頻，這裡也靈活地運用在教案設計當中，使得課堂的講授更具多元性和趣味性。

3.注重解題的邏輯性和體系性。在課堂小結時，非常注重知識體系的建構，本人是建構主義教學理論的支持者，認同引導學生建立知識體系的重要性。在教案中，會有大量的知識解答網絡圖(如圖 1)，這些都是基於大量教學實踐的積累成果。因為初中學生剛升入高一，需要這種邏輯指示圖式的知識關

係網絡。其中種種努力，採取辦法降低同學的畏難心理，幫助同學從老師的視覺高度上來理清相關知識的種類和聯繫。這也是本教案的亮點之一。

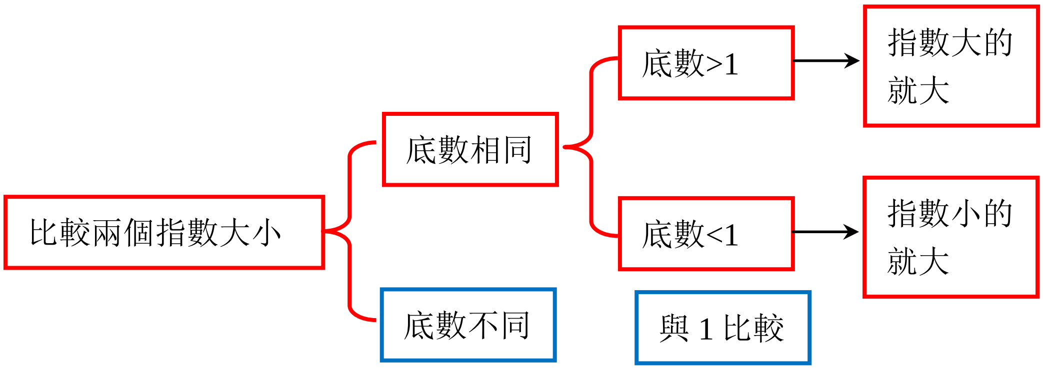


圖 1　比較指數的網絡圖

希望這些努力對學生的學習積極性有所提高，增強他們對數學學習的興趣，減少數學畏難情緒，提升學習效能。

目次

教學進度表

授課時間 （年–月–日）	節數	課節	課題名稱	課題內容	課時（分鐘）
2018 年 12 月 5 日–2018 年 12 月 6	4	第一課節	指數及指數函數	指數的運算、指數函數的圖像與性質	160
2018 年 12 月 7 日–2018 年 12 月 12 日	5	第二課節	對數、對數函數	指數式對數式的互化，對數的性質和運算、對數函數的圖像與性質	200
2018 年 12 月 12 日	1	第三課節	冪函數	冪函數的函數圖像	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1. 指數及指數函數

  1.1 理解有理數指數的概念、性質，能夠進行指數的運算；

  1.2 體會指數模型在現實世界中的實際背景；

  1.3 掌握指數函數的概念及其圖像和性質。

2. 對數及對數函數

  2.1 理解對數的定義，自然對數、常用對數；

  2.2 掌握指數式與對數式的互化、對數的性質和換底公式；

  2.3 能夠進行對數四則運算。

  2.4 通過運用對數的運算性質解決問題，引導學生積極思維，培養學生團結合作的意識與分析問題、解決問題的能力；

  2.5 掌握對數函數的概念、對數函數的圖像和性質；

  2.6 理解對數函數圖像與指數函數圖像的關係；

  2.7 通過具體實例，直觀瞭解對數函數模型所刻畫的數量關係，初步理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型。

3. 冪函數

  3.1 瞭解冪函數的概念；

  3.2 理解常見冪函數的函數圖像。

二、主要內容

1. 指數及指數函數
2. 對數及對數函數
3. 冪函數

三、設計創意和特色

1. 簡單直接，盡可能不增加學生學習內容負擔，例題設計講究，針對性強，在講授完相關知識點內容後，基本上是兩道例題+兩道練習題的教學模式。就筆者經驗，把練習時間寄託在課後效率會稍差一些，因為某些同學課後容易抄功課。所以學生需要更多時間在課堂上練習，老師也可以巡堂中即時回答同學練習過程中遇到的問題。因此所有設計的練習都必須是即時練習，形成即時反饋，有問題即時解決。

2.與時俱進，適當運用多媒體等教學軟件提高授課效率。以指數函數、對數為例，教學就充分留意到底數的不同對函數性態的影響，由此把操作機會留給學生自行操作鼠標，數形結合背後的變化，從而引導學生得出相應的結論。而互聯網中的有很多有趣的動畫式解說小視頻，這裡也靈活地運用在教案設計當中，使得課堂的講授更具多元性和趣味性。

3. 注重解題的邏輯性和體系性。在課堂小結時，非常注重知識體系的建構，本人是建構主義教學理論的支持者，認同引導學生建立知識體系的重要性。在教案中，會有大量的知識解答網絡圖(如圖 1)，這些都是基於大量教學實踐的積累成果。因為初中學生剛升入高一，需要這種邏輯指示圖式的知識關係網絡。其中種種努力，採取辨法降低同學的畏難心理，幫助同學從老師的視覺高度上來理清相關知識的種類和聯繫。這也是本教案的亮點之一。

四、教學重點

1. 指數及指數函數

1.1 指數的運算

1.2 指數函數的圖像與性質

2. 對數、對數函數

2.1 指數式對數式的互化，性質和運算

2.2 對數函數的圖像與性質

3. 冪函數

3.1 冪函數的函數圖像

五、教學難點

對數的性質和運算

六、教學用具

PPT、學案、GeoGebra、幾何畫板

貳、教案

作品名稱	指數函數、對數函數、冪函數	人數	25 人
實施年級	高一	總實施節數	10 節
實施日期	2018 年 12 月 3 日-12 月 13 日	每節課時	40 分鐘
科目	數學	科目每周節數	6 節

日期	節數	課題名稱	教材	教學目標		教學內容及活動	教學資源
				單元目標	基力要求編號		
12月3日至12月6日	4	指數及指數函數	1. 人教版數學第一冊(下) 2. 校本教材	1. 理解有理數指數的概念、性質，能夠進行指數的運算； 2. 體會指數模型在現實世界中的實際背景； 3. 掌握指數函數的概念及其圖像和性質。	A-5-10、A-5-11、	1. 例題講解 2. 即時練習	1.PPT 2.GeoGebra
12月7日至12月12日	5	對數及對數函數	1. 人教版數學第一冊(下) 2. 校本教材	1. 理解對數的定義； 2. 掌握指數式與對數式的互化、對數的性質和運算； 3. 掌握對數函數的	A-5-12、A-5-13、A-5-14	1. 例題講解 2. 即時練習	1.PPT 2.GeoGebra

				概念、對數函數的圖像和性質。			
12月13日	1	冪函數	1. 人教版數學第一冊(下) 2. 校本教材	1. 瞭解冪函數的概念； 2. 理解常見冪函數的函數圖像。	A-5-9	1. 例題講解 2. 即時練習	1.PPT 2.GeoGebra 3.幾何畫板

2.5 指數-第一課時

【教學目標】

1. 理解有理數指數的概念；
2. 理解指數的性質，能夠進行指數的運算；
3. 通過指數的學習過程，學會指數運算的技能，結合初中已學知識，做到舉一反三，順利進行高中指數的學習。
4. 體會知識不斷發展，使用範圍不斷擴大，能用發展的眼光看待數學和世界。

【教學重點】指數的運算

【教學難點】指數的運算

【基力要求】

A-2 數與式
A-2-7 理解有理數指數的概念。
A-2-8 理解指數的性質，能夠進行指數的運算。

■ 課堂引入

問題 1：據國務院發展研究中心 2018 年發表的《未來 20 年我國發展前景分析》判斷, 未來 10 年，我國 GDP(國內生產總值)年平均增長率可望達到 6.5%. 那麼在 2028 年, 我國的 GDP 可望為 2000 年的多少倍?

問題 2：什麼叫平方根，什麼叫立方根？你能得出更高的推廣嗎？16 的 4 次方根，17 的 5 次方根怎麼表示？

問題設計意圖：符合現實，好問題會引起學生積極思考。

定義：如果 $x^n = a$，那麼 x 叫做 a 的 n 次方根。n 叫做根指數，a 叫被開方數。

當 n 是奇數時，a 的 n 次方根有一個，可表示為：$\sqrt[n]{a}$

當 n 是偶數時，a 的 n 次方根有 2 個，可表示為：$\pm\sqrt[n]{a}$

這與我們之前的認知是吻合的，

比如：$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$ ；$x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

換言之：$x^{13}=6 \Rightarrow x=\sqrt[13]{6}$；$x^{12}=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt[12]{6}$

特別地：

1. 如果 $a=0$，則 a 的 n 次方根為 0。即：$x^n=0 \Rightarrow x=0$
2. 負數有奇數次方根，沒有偶數次方根。
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

■ 例題講解

求下列各式的值

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$ (2) $\sqrt{(-10)^2}$ (3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$ (4) $\sqrt{(a-b)^2}$

解：略。

■ 即時練習

求下列各式的值

(1) $\sqrt[5]{(-0.1)^5}$ (2) $\sqrt[4]{100^4}$ (3) $\sqrt[4]{(\pi-4)^4}$ (4) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$

分數指數冪：$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\,(a>0)$

正數的負分數指數冪的意義與負整數指數冪的意義相仿，規定：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\,(a>0)$$

注：0 的正分數指數冪等於 0，0 的負分數指數冪沒有意義。

對於分數指數冪，即對於任意有理數 r,s，有下麵的運算性質：

(1) $a^r a^s=a^{r+s}\,(a>0)$

(2) $(a^r)^s=a^{rs}\,(a>0)$

(3) $(ab)^r=a^r b^r\,(a>0)$

注：這跟初一時學習過的一樣，只是指數可以由原來的整數變為分數。

■ 例題講解

求值：$8^{\frac{2}{3}}$，$100^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$，$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

解：$8^{\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

$$100^{-\frac{1}{2}}=\left(10^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

$$\left(4^{-1}\right)^{-3}=4^{3}=64$$

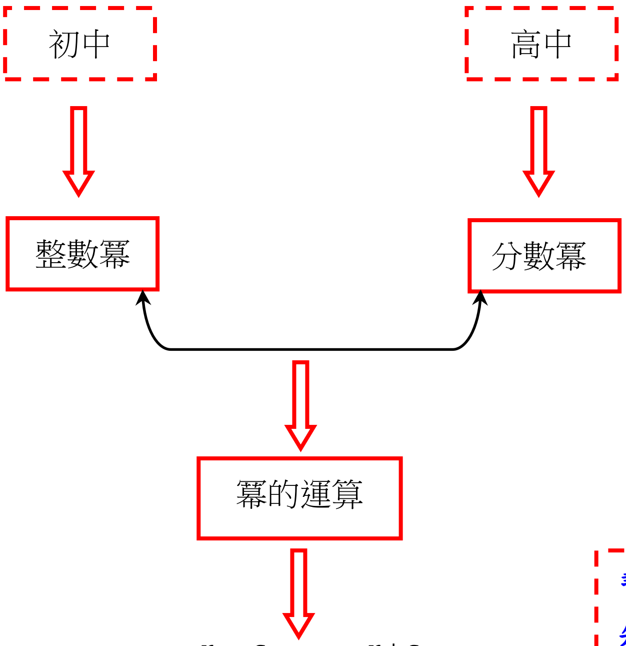
$$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$$

- 即時練習

  書 P77 第 1 題

- 課堂小結

  本節課我們學習了什麼內容？



$$a^{r}a^{s}=a^{r+s}$$

$$(a^{r})^{s}=a^{rs}$$

$$(ab)^{r}=a^{r}b^{r}$$

幫助學生梳理知識結構、知識關係

- 課後功課

  書 P77 第 2-3 題

2.5 指數-第二課時

【教學目標】

1. 理解有理數指數的概念；
2. 理解指數的性質，能夠進行指數的運算；
3. 通過指數的學習過程，學會指數運算的技能，結合初中已學知識，做到舉一反三，順利進行高中指數的學習。
4. 體會知識不斷發展，使用範圍不斷擴大，能用發展的眼光看待數學和世界。

【教學重點】指數的運算

【教學難點】指數的運算

【基力要求】

A-2 數與式
A-2-7 理解有理數指數的概念。
A-2-8 理解指數的性質，能夠進行指數的運算。

■ 課堂引入

本節課繼續學習分數指數冪的化簡與運算。

■ 例題講解

用分數指數冪的形式表示下列各式：

$a^2\sqrt{a}$ ，$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}$ ，$\sqrt{a\sqrt{a}}$

解：$a^2\sqrt{a}=a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$

$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^3\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{11}{3}}$

$\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{3}{4}}$

■ 即時練習

書 P76 第 1 題

■ 例題講解

計算下列各式(式中字母都是正數)

（1） $\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$ （2） $\left(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right)^8$

解：

$\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$

$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

$=4ab^0$

$=4a$

$\left(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right)^8$

$=m^2n^{-3}$

$=\dfrac{m^2}{n^3}$

■ 例題講解

計算下列各式(式中字母都是正數)

（1） $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}$ （2） $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}$

解：

（1） $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}=(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{3}{2}})\div5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}-5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}=5^{\frac{5}{12}}-5^{\frac{5}{4}}$

（2） $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$

■ 即時練習

書 P76 第 2 題

■ 課堂小結

本節課我們學習了哪些內容？

■ 課後功課

書 P77 第 3-5 題

2.6 指數函數-第一課時

【教學目標】

1. 體會指數模型在現實世界中的實際背景；
2. 掌握指數函數的概念及其圖像和性質 ；
3．通過自主探索，讓學生經歷“特殊→一般→特殊”的認知過程。
4．結合實例指數函數的實際背景，體會指數函數是一類重要的函數模型。

【教學重點】指數函數的圖像與性質

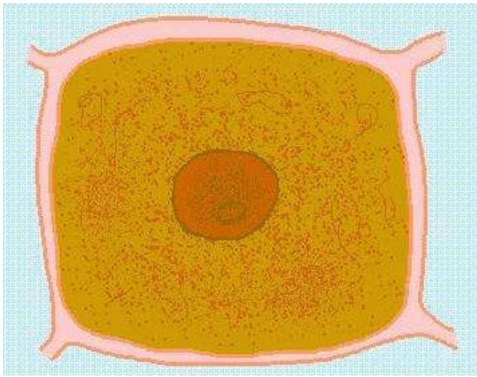
【教學難點】指數函數的圖像與性質

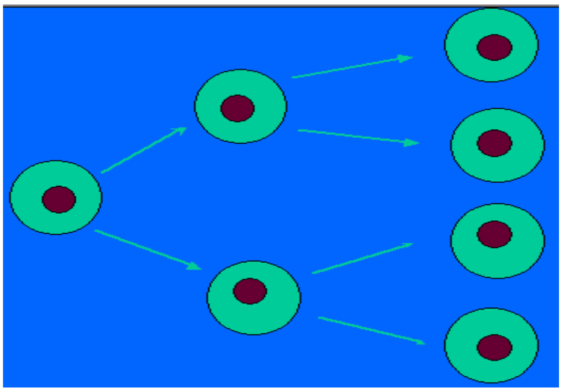
【基力要求】

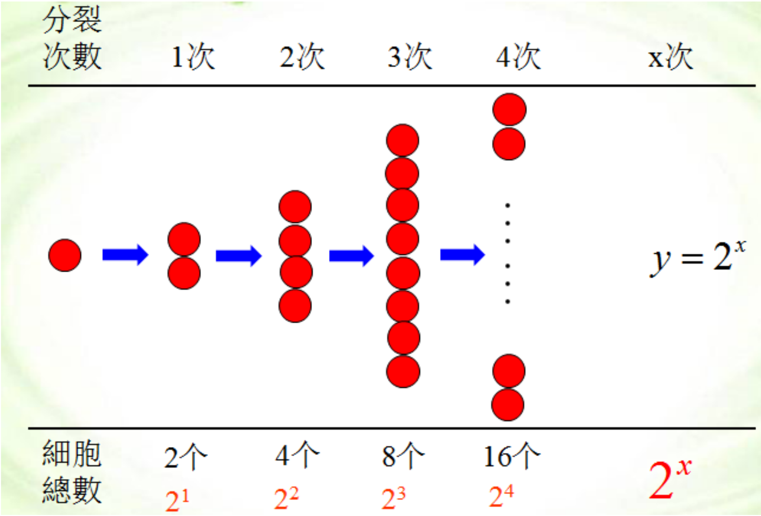
A-5 函數
A-5-11 結合實例瞭解指數函數的實際背景，體會指數函數是一類重要的函數模型。
A-5-12 掌握指數函數的概念及其圖像性質。

■ 課堂引入

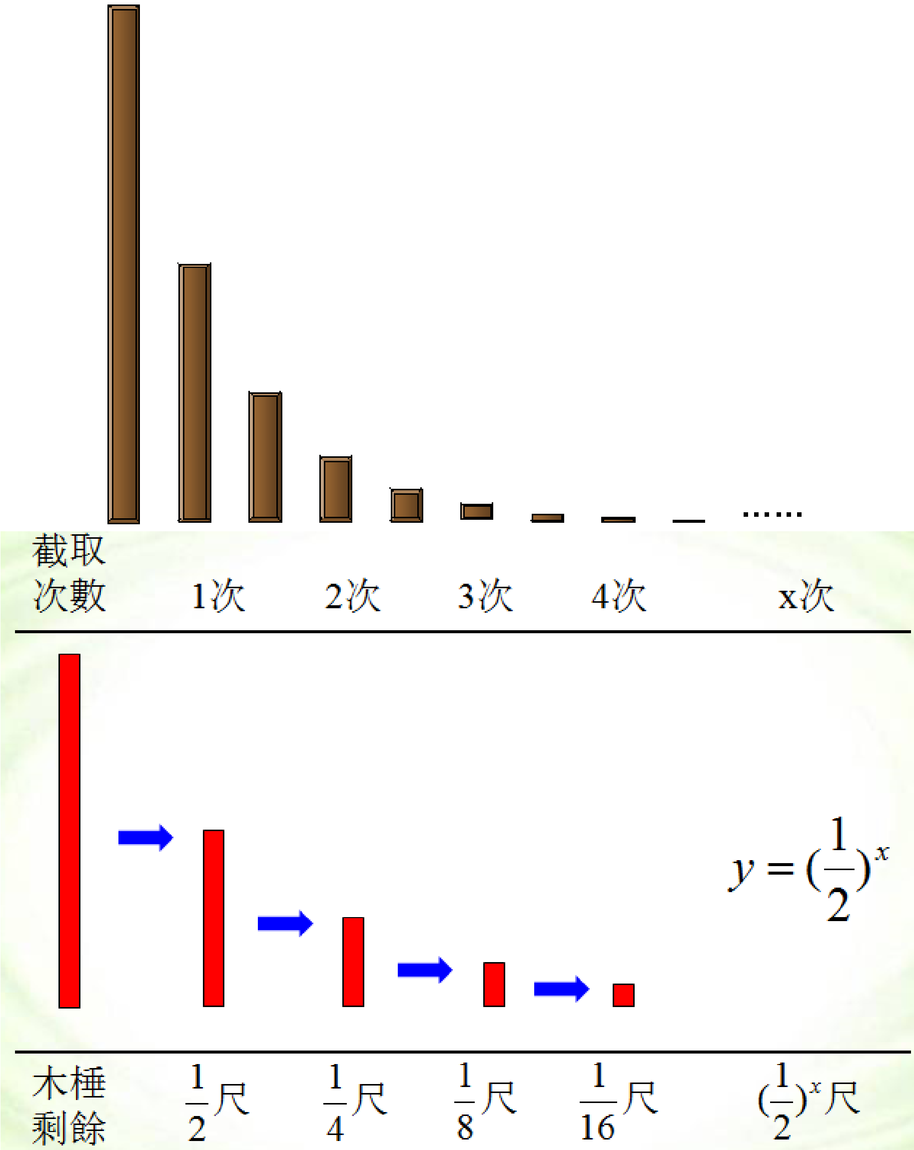
問題 1：某種細胞分裂時，由 1 個分裂成 2 個，2 個分裂成 4 個，1 個這樣的細胞分裂 x 次後，得到的細胞個數 y 與 x 的函數關系式是什麼？







問題 2：《莊子·天下篇》中寫道：“一尺之棰，日取其半，萬世不竭。”請你寫出截取 x 次後，木棰剩餘量 y 關於 x 的函數關係式？



問題 3：　$y=2^x$　　$y=(\frac{1}{2})^x$　　有什麼特點？

定義：函數 $y=a^x(a>0)$ 叫做指數函數，其中 x 是自變量，定義域是 R。

思考 (1)為什麼定義域為 R？

(2)為什麼規定底數 $a>0$ 且 $a\neq1$ 呢？

如果 $a=-1, x=\frac{1}{2}$，就有 $y=a^x=(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$，這在實數範圍內無意義。

如果 $a=1$，$y=a^x=1^x=1$，研究意義不大。

■　即時練習

判斷下列函數是不是指數函數，為什麼？

① $y=x^2$　　√⑤ $y=\pi^x$

√② $y=8^x$　　⑥ $y=5^{2x^2+1}$

√③ $y=(2a-1)^x$ （$a>\frac{1}{2}$ 且 $a\neq1$）

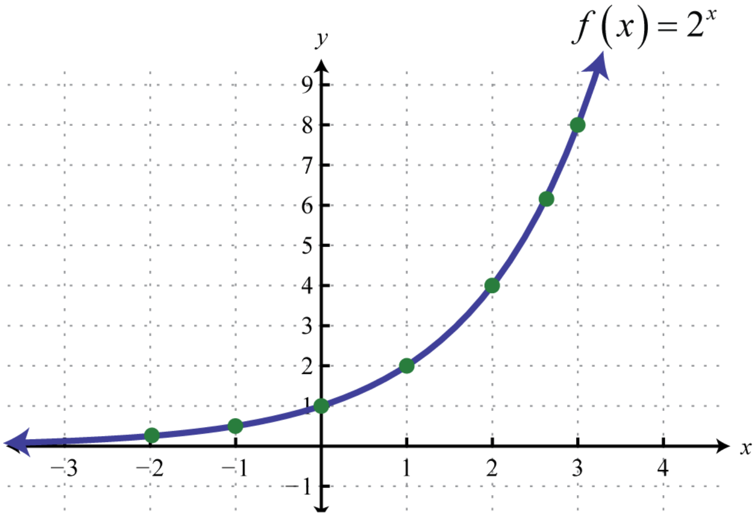
④ $y=(-4)^x$　　⑦ $y=x^x$

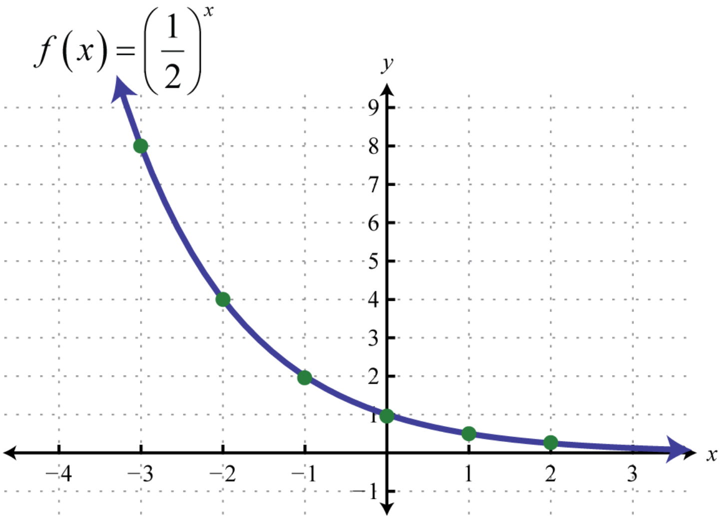
⑧ $y=-10^x$

得到函數 $y=a^x$ 的圖像一般用什麼方法？(列表描點連線)

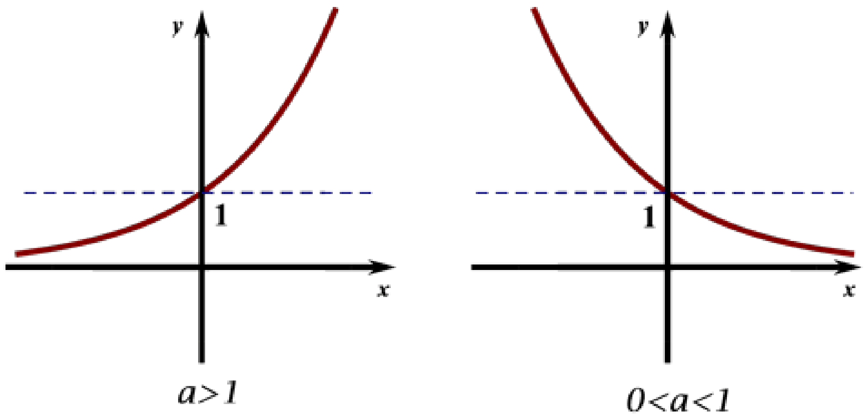
■　**新課探究**

在同一直角坐標系畫出 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ 的圖像，並思考：兩個函數的圖像有什麼關係？

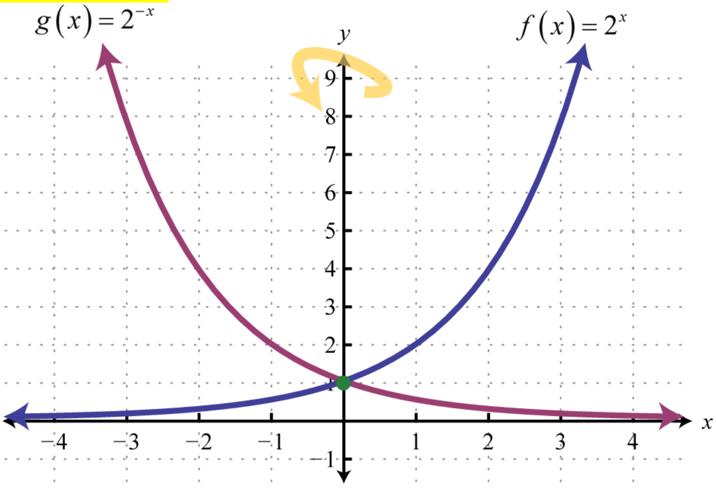




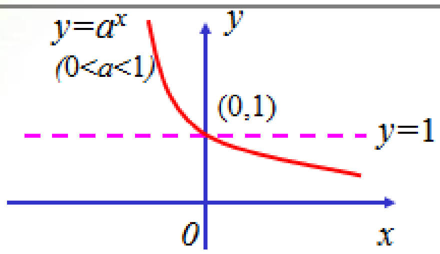
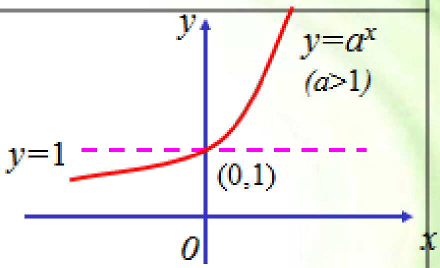
這兩種圖像可以歸結為：



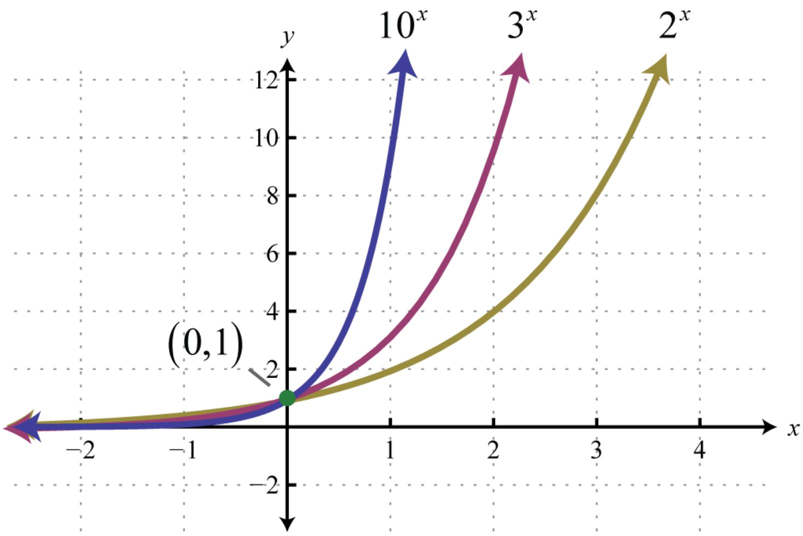
這兩個函數圖像關於 y 軸對稱

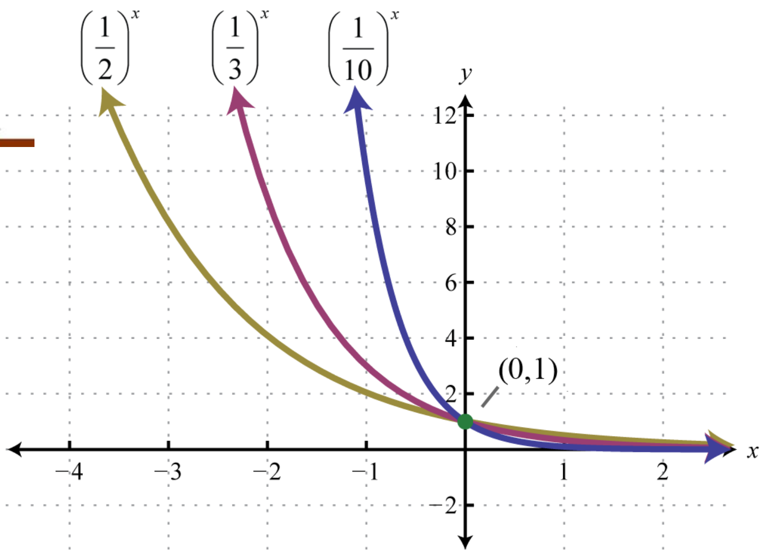


歸納 指數函數在底數 $0<a<1$ 及 $a>1$ 這兩種情況下的圖像和性質：

	$0<a<1$	$a>1$
圖象		
性質	（1）定義域：R	
	（2）值域：（0，+∞）	
	（3）過點（0，1）即$x=0$時，$y=1$	
	（4）在R上是減函數	（4）在R上是增函數

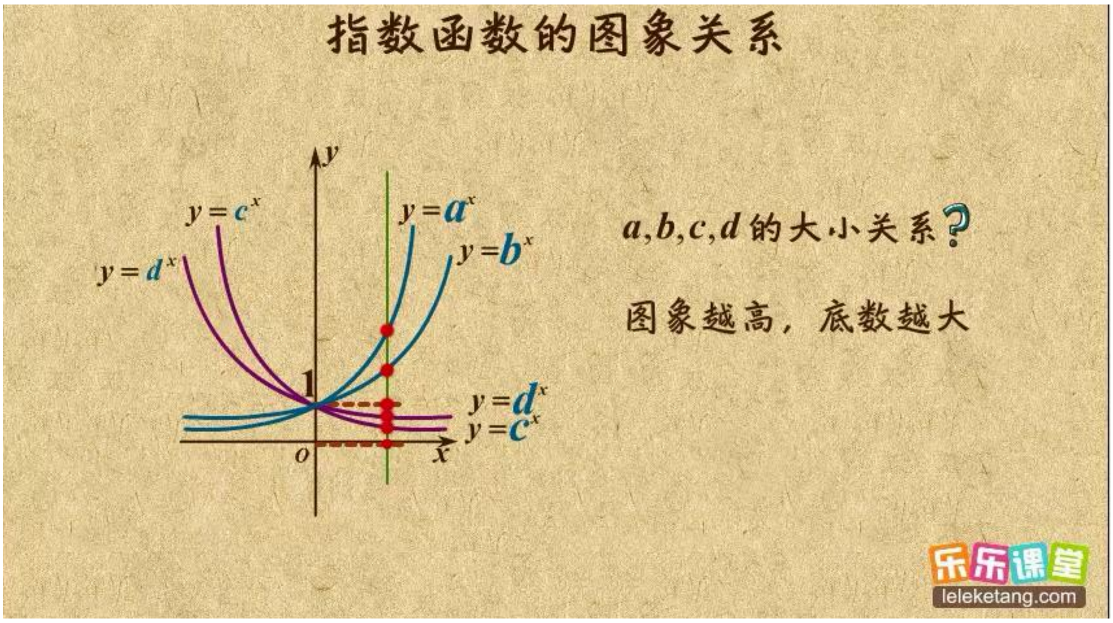
觀察右側函數圖像，你有什麼發現？





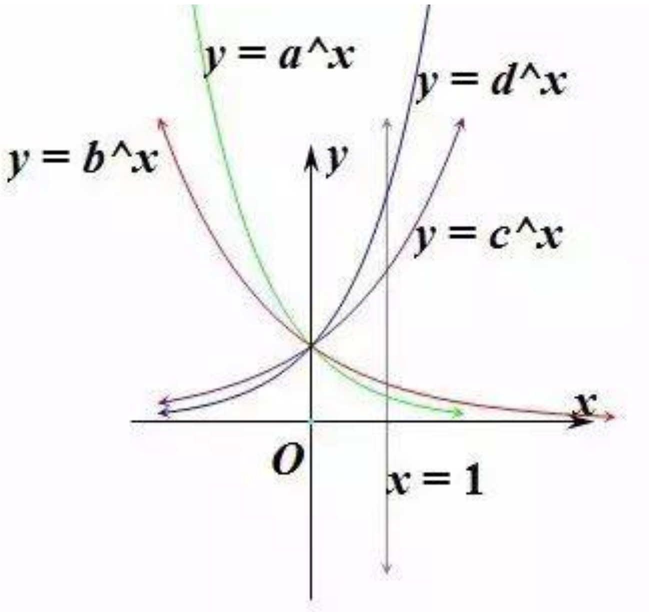
觀看指數函數圖象與指數的視頻

https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 學以致用

如圖，試從小到大排列四個指數函數的底數。



■ 例題講解

求下列函數的定義域和值域（1） $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ （2） $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}$

解:（1） $x\in R$，$y\in R$

（2） $x+2\geq 0$，

$\therefore$定義域為 $(-\infty,-2]$，

而 $\sqrt{x+2}\geq 0$，

$$\therefore y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} \leq 3^0$$

$$\therefore y \in (0,1]$$

■ 即時練習

求下列函數的定義域和值域（1） $y = 2^{x+2}$ （2） $y = 6^{\sqrt{x+2}}$

■ 課堂小結

本節課我們學習了哪些內容？

■ 課後功課

書本 P80 第 1-3 題。

2.6 指數函數-第二課時

【教學目標】

1.體會指數模型在現實世界中的實際背景；
2.掌握指數函數的概念及其圖像和性質 ；
3·通過自主探索，讓學生經歷“特殊→一般→特殊”的認知過程。
4·結合實例指數函數的實際背景，體會指數函數是一類重要的函數模型。

【教學重點】指數函數的圖像與性質
【教學難點】指數函數的圖像與性質

【基力要求】

A-5 函數
A-5-11 結合實例瞭解指數函數的實際背景，體會指數函數是一類重要的函數模型。
A-5-12 掌握指數函數的概念及其圖像性質。

■ 知識回顧

$y=a^x$ 中，當 $a>1$ 函數是增函數；當 $a<1$ 函數是減函數。

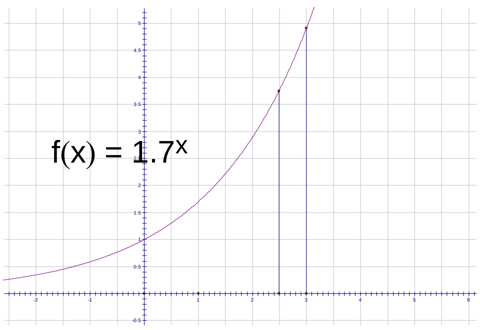
■ 例題講解

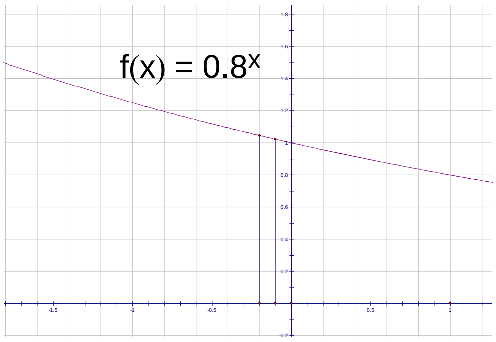
比較指數的大小

(1) $1.7^{2.5}$，1.7^{3} (2) $0.8^{-0.1}$，$0.8^{-0.2}$ (3) $1.7^{0.3}$，$0.9^{3.1}$

分析：(1)(2)利用指數函數的單調性可比較. (3)找中間量是關鍵.

解：





（1） 1.7>1, 是增函數，$\therefore 1.7^{2.5} < 1.7^{3}$

（2） 0.8<1，是減函數，$\therefore 0.8^{-0.1} < 0.8^{-0.2}$

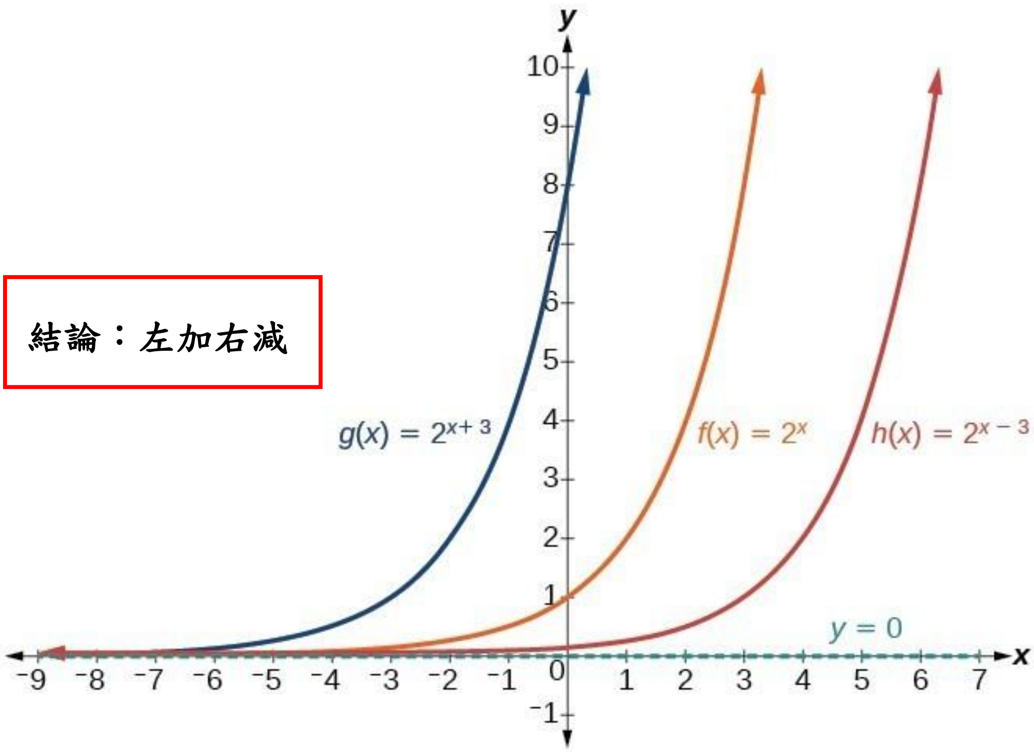
（3）$1.7^{0.3} > 1.7^{0} = 1$， $0.9^{3.1} < 0.9^{0} = 1$ $\therefore 1.7^{0.3} > 0.9^{3.1}$

■ 即時練習

書 P80，1

■ 探究新知

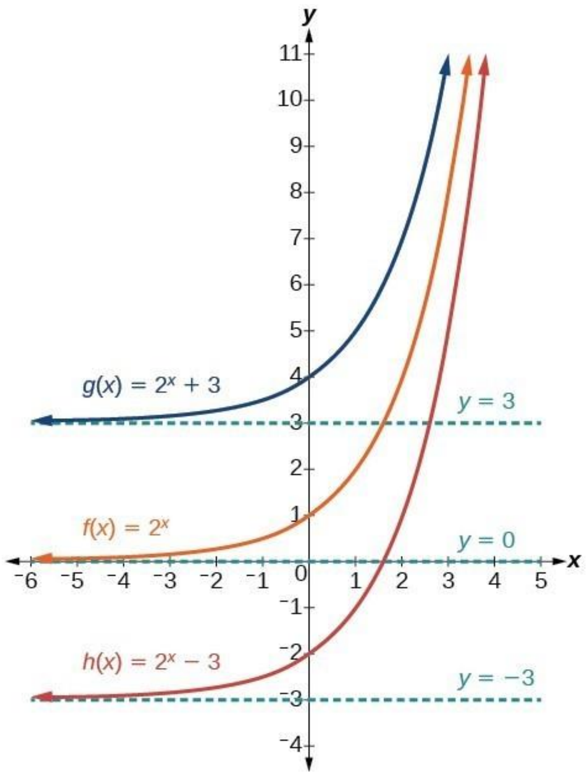
問題 1 觀察 $y = 2^{x+3}$， $y = 2^{x}$， $y = 2^{x-3}$ 的圖像，你發現了什麼結論？



結論：左加右減！

問題 2 觀察 $y = 2^{x} + 3$， $y = 2^{x}$， $y = 2^{x} - 3$ 的圖像，你發現了什麼結論？

設計意圖：
通過數形結合，引導學生對比得出數學結論！



結論：上加下減

問題 3 如果底數變化，上面結論變化嗎？(幾何畫板)

比如： $y=a^x$ 左移 m 個單位，下移 k 個單位，函數變為 $y=a^{x+m}-k$

■ 即時練習：

1. $y=3^x$ 左移 4 個單位，下移 6 個單位，函數變為________________；

2. $y=e^x$ 右移 4 個單位，上移 3 個單位，函數變為________________；

3. $y=2e^{2x}-1$ 右移 4 個單位，上移 5 個單位，函數變為________________；

■ 例題講解

已知指數函數 $f(x)=a^x$ 經過點 $(3,\pi)$ ，求 $f(0)+f(1)$ 的值。

解：代回 $(3,\pi)$ ，得 $a^3=\pi$

$$\therefore a=\pi^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}$$

$$\therefore f(0)+f(1)=1+\pi^{\frac{1}{3}}$$

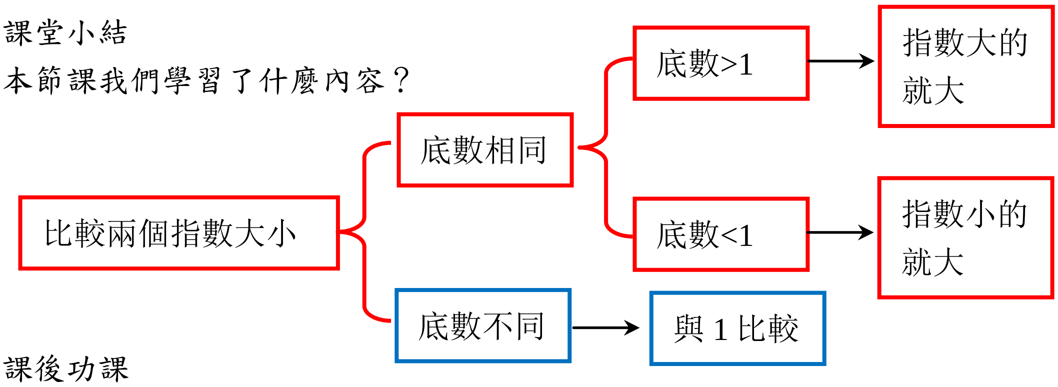
確定一個指數函數需要什麼條件？

■ 即時練習

已知函數 $f(x)=2a^{x+1}$ 經過點 $(-2,4)$ ，求 $f(1)$ 的值。

■ 課堂小結

本節課我們學習了什麼內容？



■ 課後功課

工作紙

2.7 對數-第一課時

【教學目標】

1. 理解對數的定義，自然對數、常用對數；
2. 掌握指數式與對數式的互化 ；
3. 掌握對數的性質和換底公式；
4. 能夠進行對數四則運算。
5. 通過運用對數的運算性質解決問題，引導學生積極思維，培養學生團結合作的意識與分析問題、解決問題的能力；

【教學重點】指數式對數式的互化，性質和運算

【教學難點】對數的性質和運算

【基力要求】

A-2 數與式
A-2-12 **理解對數的概念。**
A-2-13 **理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者的相互轉化。**
A-2-14 **瞭解兩個重要對數:常用對數和自然對數。**
A-2-15 **掌握對數的性質和換底公式。**
A-2-15 **能夠進行對數四則運算。**

■ 課堂引入

提問：我們當時是如何認識 $\sqrt{2}$ 的？

就是解方程 $x^2=2$，只學過整數和分數的我們沒有辦法找出一個整數或分數，使得它的平方是 2。那麼我們如何表示出這樣的一個數呢？就是在 2 外面套上一個根號，創造出一個複合要求的數出來。

所以前面我們學過的分數指數冪也是這樣，比如：

回憶類比相似問題，尋求問題的解決辦法。

$x^6=3\Rightarrow x=\sqrt[6]{3}$，$x^{12}=3\Rightarrow x=\sqrt[12]{3}=3^{\frac{1}{12}}$

所以當數不夠用時，我們就會考慮引入一些數學符號，把一些新的數表示出來。

問題：$2^x=5$，我們如何把這個指數 x 表示出來呢？

觀察一下，x 應該介於 2 到 3 之間。但並不能確定這個數是什麼，所以人類為瞭解決這個問題，就要考慮用某種符號來表示這個數，當然這個即將表示的數必須跟 2 和 5 有關係。於是引入了 log 來表示，這就是對數(logarithm)。

$$2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5$$

一般地，如果$a^b=N\Rightarrow b=\log_a N$，$b$叫做以$a$為底，$N$的對數。$a$在$\log_a N$中叫底數，$N$在$\log_a N$中叫真數。

注意：1. $a^b=N$叫指數式，$b=\log_a N$叫對數式，兩者可以互化，舉兩個例子：

$2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5$；$x=\log_3 6\Rightarrow 3^x=6$。

2. 指數式中，$a^b=N$中a是底數，對數式$\log_a N$中a還是底數。

3. a^b永遠大於 0，即 N 大於 0，所以只有正數才有對數，0 和負數沒有對數。

常用對數：以 10 為底的對數，即$\log_{10}3$，$\log_{10}25$等等。常用對數可簡寫為$\log_{10}N=\lg N=\log N$。

自然對數：以常數$\mathrm{e}=2.71828\ldots$為底的對數，即$\log_e 3$，$\log_\mathrm{e} 57$等等。自然對數可簡寫為$\log_\mathrm{e} N=\ln N$。

■ 例題講解

例 1 把指數式寫成對數式

(1) $5^4=625$　(2) $2^{-6}=\dfrac{1}{64}$　(3) $3^a=27$　(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m=5.73$

解：(1) $\log_5 625=4$　(2) $\log_2\dfrac{1}{64}=-6$

(3) $\log_3 27=a$　(4) $\log_{\frac{1}{3}}5.73=m$

例 2 把對數式寫成指數式

(1) $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$　(2) $\log_2 128=7$　(3) $\lg 0.01=2$　(4) $\ln 10=2.303$

解：(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16$　(2) $2^7=128$　(3) $10^{-2}=0.01$　(4) $e^{2.303}=10$

■ 課堂練習 書 P85 第 1，2 題。

■ 積累新知

公式 1 $a^0=1 \Rightarrow \log_a 1=0$

基本公式

公式 2 $a^1=a \Rightarrow \log_a a=1$

公式 3 $\because a^b=N \Rightarrow b=\log_a N$，回代可得 $a^{\log_a N}=N$

記住一些常見對數：

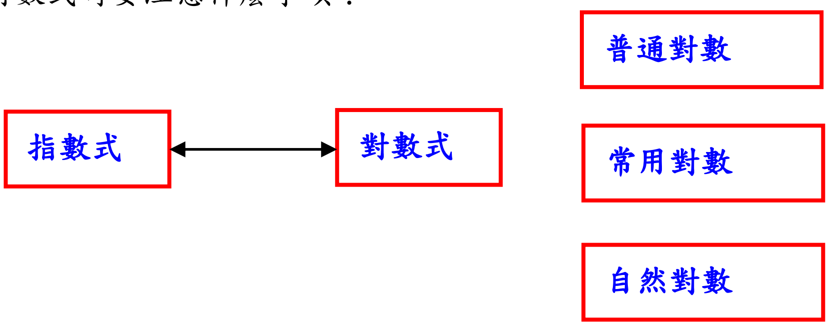
$\log_2 4=2$，$\log_2 8=3$，$\log_2 16=4$，$\log_3 9=2$，$\log_3 27=3$，$\log_3 81=4$，

$\log_2 \frac{1}{2}=-1$，$\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$，$\log_{10} 10=1$，$\log_{10} 1000=3$，$\log_{10} 0.001=-3$，

重視學生的常識積累，扎實打好基本功！

■ 課堂小結

1. 本節課我們學習了什麼？
2. 你對指數式和對數式的互化有什麼體會？
3. 自然對數和常用對數有什麼區別？
4. 書寫對數式時要注意什麼事項？



■ 課後功課

書 P85 第 4 題，P87-88 第 1，2 題。

2.7 對數-第二課時

【教學目標】

1. 理解對數的定義，自然對數、常用對數；
2. 掌握指數式與對數式的互化 ；
3. 掌握對數的性質和換底公式；
4. 能夠進行對數四則運算。
5. 通過運用對數的運算性質解決問題，引導學生積極思維，培養學生團結合作的意識與分析問題、解決問題的能力；

【教學重點】指數式對數式的互化，性質和運算

【教學難點】對數的性質和運算

【基力要求】

A-2 數與式	
A-2-12	理解對數的概念。
A-2-13	理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者的相互轉化。
A-2-14	瞭解兩個重要對數:常用對數和自然對數。
A-2-15	掌握對數的性質和換底公式。
A-2-15	能夠進行對數四則運算。

■ 課堂引入

前一節課我們講了對數的來龍去脈，這節課我們講對數的運算。

■ 探究新知

對數的運算主要有三條公式，分別是：

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ （同底數冪相乘，底數不變，指數相加）

2. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ （同底數冪相除，底數不變，指數相減）

3. $\log_a M^n = n\log_a M$

這裡底數是大於 0 且不等於 1 的正數，M, N 也是正數。

下面給出公式 1 的證明過程，事實上公式 2 和 3 都可以從 1 中推出來。

證明：$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

證：令 $\log_a M = A$，$\log_a N = B$，那麼有 $a^A = M$ ，$a^B = N$

$\therefore a^{A+B}=MN$，化為對數式得

$\therefore \log_a MN = A+B = \log_a M + \log_a N$

對於公式 3 的證明，當然可以給出嚴格證明，但有點繁雜，學生直觀性不強。
假設公式 1 中 $M=N$，那麼有

$$\log_a M^2 = \log_a M + \log_a M = 2\log_a M$$

$$\log_a M^3 = \log_a M^2 + \log_a M = 3\log_a M$$

依次類推，我們有

$$\log_a M^n = n\log_a M$$

而公式二，則可以由公式 1，3 容易推得。

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a MN^{-1} = \log_a M + \log_a N^{-1} = \log_a M - \log_a N$$

對公式的運用，既要會順著用，也要學會逆著用。
比如，$\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$

即時反饋，令學生處於緊張狀態，觀察學生公式的掌握程度。

全班即刻默寫公式：

■ 例題講解

例 1 用 $\log_a x, \log_a y, \log_a z$ 表示下列各式：(1) $\log_a \frac{xy}{z}$ (2) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

解：(1) $\log_a \frac{xy}{z} = \log_a(xy) - \log_a z = \log_a x + \log_a y - \log_a z$

(2) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a(x^2\sqrt{y}) - \log_a \sqrt[3]{z} = \log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z} = 2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z$

例 2 計算(1) $\log_2 4^7 \times 2^5$，(2) $\lg \sqrt[5]{100}$

解：(1)原式$=\log_2 4^7+\log_2 2^5=7\log_2 4+5\log_2 2=14+5=19$

(2)原式$=\lg\sqrt[5]{100}=\lg 100^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\lg 100=\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$

■ 課堂練習

書 P87 第 1，2 題

■ 課堂小結：

1. 本節課我們學習了多少條對數的運算公式？
2. 公式要學會順著用，也要學會逆著用

■ 課後功課

書 P88 第 3、4 題

2.7 對數-第三課時

【教學目標】

1. 理解對數的定義，自然對數、常用對數；
2. 掌握指數式與對數式的互化 ；
3. 掌握對數的性質和換底公式；
4. 能夠進行對數四則運算。
5. 通過運用對數的運算性質解決問題，引導學生積極思維，培養學生團結合作的意識與分析問題、解決問題的能力；

【教學重點】指數式對數式的互化，性質和運算

【教學難點】對數的性質和運算

【基力要求】

A-2	數與式
A-2-12	理解對數的概念。
A-2-13	理解對數概念與指數概念的對應關係，掌握兩者的相互轉化。
A-2-14	瞭解兩個重要對數:常用對數和自然對數。
A-2-15	掌握對數的性質和換底公式。
A-2-15	能夠進行對數四則運算。

■ 溫習回顧

上一節課學習了哪些對數公式？

■ 講授新知

補充公式：$\boxed{\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b}$

特別地，$m=n$ 時，$\log_{a^n} b^n = \log_a b$，說明這兩個數同時乘法、開方，結果不變。舉例：$\log_4 9 = \log_2 3$，這方便我們把比較大的數化簡得小一些。

換底公式：$\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_m b}{\log_m a}}$

特別地，取 $m=b$ 時，有 $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$，這說明 $\log_a b$ 與 $\log_b a$ 互為倒數，即 $\log_a b \cdot \log_b a = 1$。這個等式可以推廣至多個首尾連著的對數，即：

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$

■ 即時練習

課堂練習:

1. $\log_2 3 = a$，用 a 表示下列各式：$\log_3 2 =$ _____；$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} =$ _____；
$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} =$ _____；$\log_8 81 =$ _______

2. $\log_5 2 = k$，用 k 表示下列各式：$\log_2 5 =$ _____；$\log_{\sqrt{5}} \sqrt{2} =$ _____；
$\log_{125} 32 =$ _______；$\log_{\sqrt[2]{5}} 8 =$ _______

■ 例題講解

例 1 計算 $(\log_2 9)(\log_3 4)(\log_{\frac{1}{4}} 8)$

解：原式 $= 2\log_2 3 \cdot (2\log_3 2)(\log_{2^{-2}} 2^3) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$

■ 即時練習

$(\log_3 25)(\log_{125} 81) + \log_3 \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

■ 例題講解

計算 $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

解：原式

$$= (\log_2 3 + \log_2 3)(2\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 2) = 2\log_2 3 \cdot \frac{5}{2}\log_3 2 = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \log_2 3 \log_3 2 = 5$$

■ 即時練習

計算 $\log_3 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{6}$

■ 課堂小結

本節課我們學習了哪些公式？

■ 課後功課

1. 填空

$\log_3 9 =$ _______；$\log_{\frac{1}{3}} 9 =$ _______；$\log_2 8 =$ _______；$\log_2 4^6 \times 8 =$ _______；
$\log_2(\log_2 16) =$ _______；$\log_{10} 0.001 =$ _______；$2^{\log_2 6} =$ _______；
$5^{\log_5 8} =$ _______；$\lg 2 + \lg 5 =$ _______；$\lg 0.001 =$ _______

2. 填空

(1) $4^{\log_2 6} =$ ______；$2^{\log_{\sqrt{2}} 6} =$ ______；$5^{\log_5 6} =$ ______；$4^{\log_{\sqrt{2}} 3} =$ ______；

(2) $\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}-1) =$ ______；$\log_{\frac{1}{4}} 8 =$ ______；$\lg 20 - \frac{1}{2}\lg 4 =$ ______

(3) $\log_2 3 \cdot \log_3 2 =$ ______；$\log_2 3 \cdot \log_3 4 =$ ______；

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 =$ ______

(4) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{2015} 2016 \cdot \log_{2016} 2017 =$ ______

3. 求 x 的值。

(1) $\log_5[\log_3(\log_2 x)] = 0$

(2) $\log_2[\log_3(\log_5 x)] = 1$

(3) $\ln[\ln(\ln x)] = 0$

2.8 對數函數-第一課時

【教學目標】

1. 理解對數函數的概念；
2. 掌握對數函數的圖像和性質；
3. 理解對數函數圖像與指數函數圖像的關係；
4. 通過具體實例，直觀瞭解對數函數模型所刻畫的數量關係，初步理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型。

【教學重點】對數函數的圖像和性質

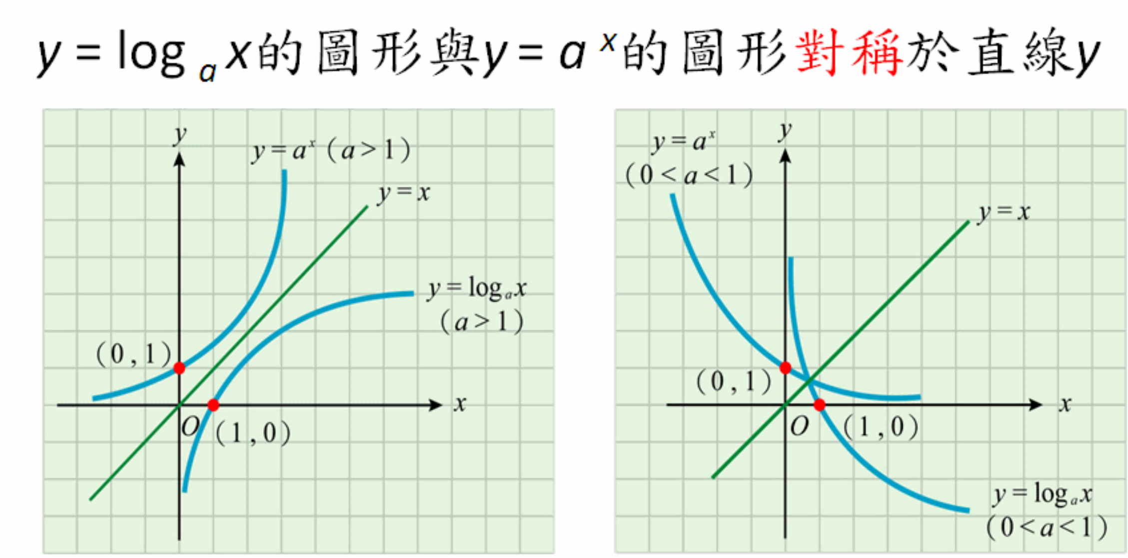
【教學難點】對數函數的圖像和性質

【基力要求】

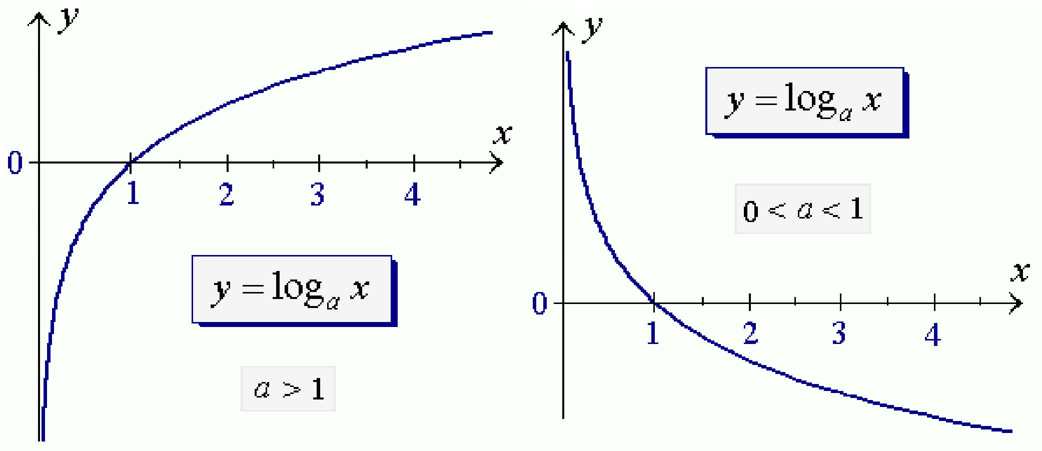
A-5	**函數**
A-5-13	**通過具體實例，直觀瞭解對數函數所刻畫的數量關係，理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型。**
A-5-14	**理解指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 是互為反函數。**
A-5-15	**理解對數函數的圖像和性質。**

■　知識引入

指數函數 $y=2^x$，寫成對數形式是 $x=\log_2 y$，兩個變量交換位置可得 $y=\log_2 x$，說明指數函數 $y=2^x$ 的反函數是 $y=\log_2 x$。因為互為反函數的函數圖像關於直線 $y=x$ 對稱，而我們知道指數函數的函數圖像，所以可以根據關於直線 $y=x$ 對稱從而得到對數函數的圖像。



分離出指數函數圖像，可得如下兩種情況：

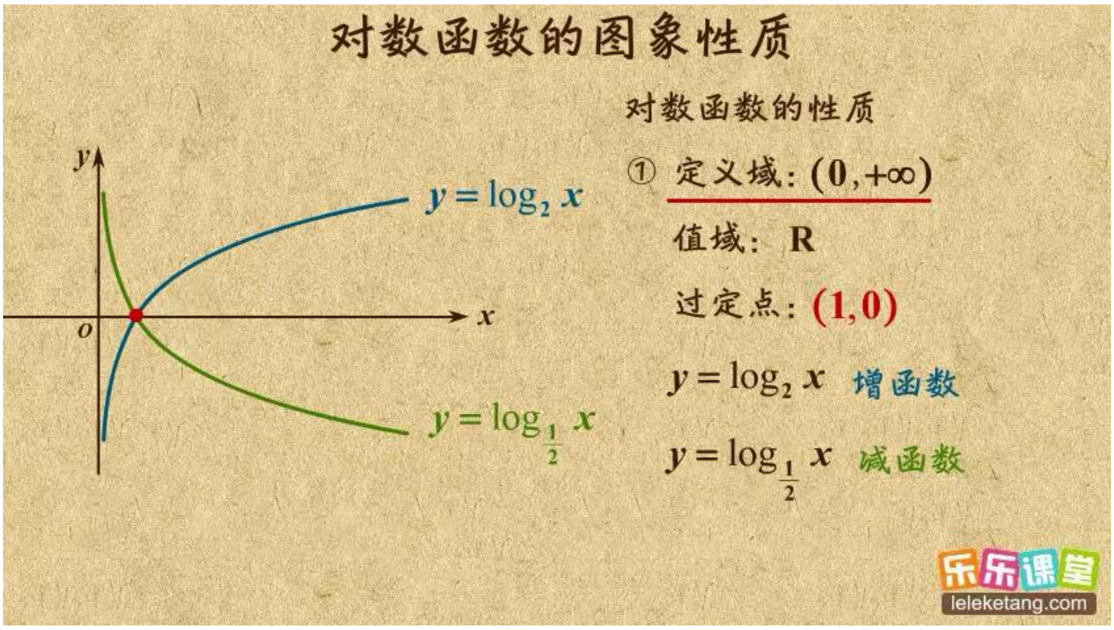


可以看到對數函數有如下性質：

1. 底數大於 1 時，函數是增函數，定義域是 $(0,+\infty)$，值域是 R，經過點(1, 0)；
2. 底數 $a \in (0,1)$ 時，函數是減函數，定義域是 $(0,+\infty)$，值域是 R，經過點(1, 0)；

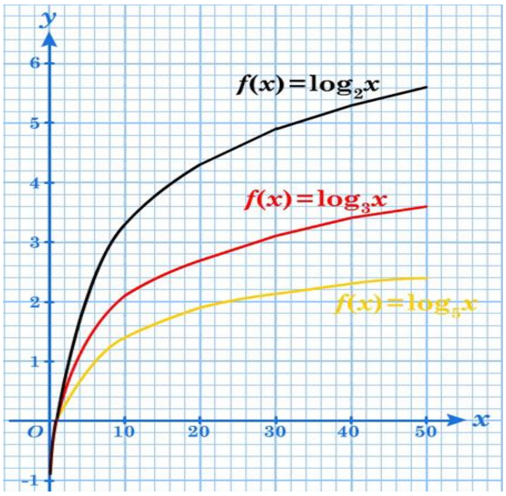
觀看對數函數的圖像和性質視頻：

https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



探究：底數變化時，函數圖像會如何變化？

數形結合，培養學生的觀察能力，引導學生探索結論。



■ 例題講解

求下列函數的定義域：

（1）$y=\log_a x^2$ （2）$y=\log_a(4-x)$ （3）$y=\log_a(9-x^2)$

（4）$y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$

解：（1）$\because x^2>0$，即 $x\neq 0$，$\therefore y=\log_a x^2$ 的定義域是 $\{x\,|\,x\neq 0\}$。

（2）$\because 4-x>0$，即 $x<4$，$\therefore y=\log_a(4-x)$ 的定義域是 $\{x\,|\,x<4\}$。

（3）$\because 9-x^2>0$，即 $-3<x<3$，$\therefore y=\log_a(4-x)$ 的定義域是 $\{x\,|\,-3<x<3\}$。

（4）$\because \log_{0.5}(4x-3)>0$，由圖像可知，$0<4x-3<1$，即 $\frac{3}{4}<x<1$，$\therefore$

$y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定義域是 $\{x\,|\,0<x<1\}$。

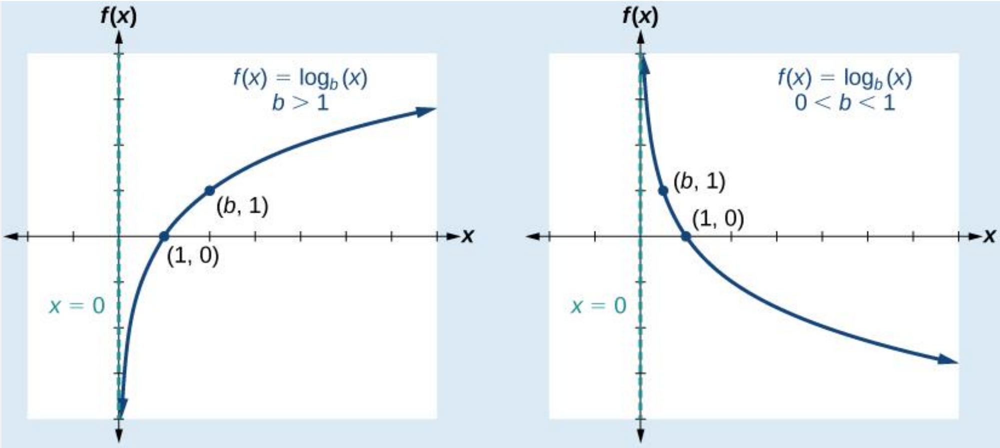
■ 即時練習

求下列函數的定義域：

（1）$y=\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$ （2）$y=\sqrt{\log_3(4x-3)}$ （3）$y=\log_a(6-x^2)$

■ 課堂小結

	$a>1$	$0<a<1$
圖像		

		
性質	(1)定義域：(0,+∞)	
	(2)值域：R	
	(3)過點(1, 0)，即當 $x=1$，$y=0$	
	(4)在 (0,+∞) 是增函數	(4)在 (0,+∞) 是減函數

■ 課後功課

書 P94 第 2 題

2.8 對數函數-第二課時

【教學目標】

1. 理解對數函數的概念；
2. 掌握對數函數的圖像和性質；
3. 理解對數函數圖像與指數函數圖像的關係；
4. 通過具體實例，直觀瞭解對數函數模型所刻畫的數量關係，初步理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型。

【教學重點】對數函數的圖像和性質

【教學難點】對數函數的圖像和性質

【基力要求】

A-5	函數
A-5-13	**通過具體實例，直觀瞭解對數函數所刻畫的數量關係，理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要的函數模型。**
A-5-14	**理解指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 是互為反函數。**
A-5-15	**理解對數函數的圖像和性質。**

■ 溫習回顧

我們知道，底數 $a>1$ 時，函數是增函數，真數越大，對數就越大；
而當底數 $0<a<1$ 時，函數是減函數，真數越大，對數反而就小。

■ 例題講解

例 1 比較下列各組數中兩個值的大小。

(1) $\log_2 3.4$, $\log_2 6.6$

(2) $\log_{0.3} 1.8$, $\log_{0.3} 2.7$

(3) $\log_a 5.1$, $\log_a 5.9$ $(a\neq 1, a>0)$

解：(1) 對數函數 $y=\log_2 x$，因為它的底數 2>1，所以它在 $(0,+\infty)$ 是增函數，而 3.4<6.6，

$$\therefore \log_2 3.4 < \log_2 6.6$$

(2)對數函數 $y=\log_{0.3} x$，因為它的底數 0.3<1，所以它在 $(0,+\infty)$ 是減函數，而

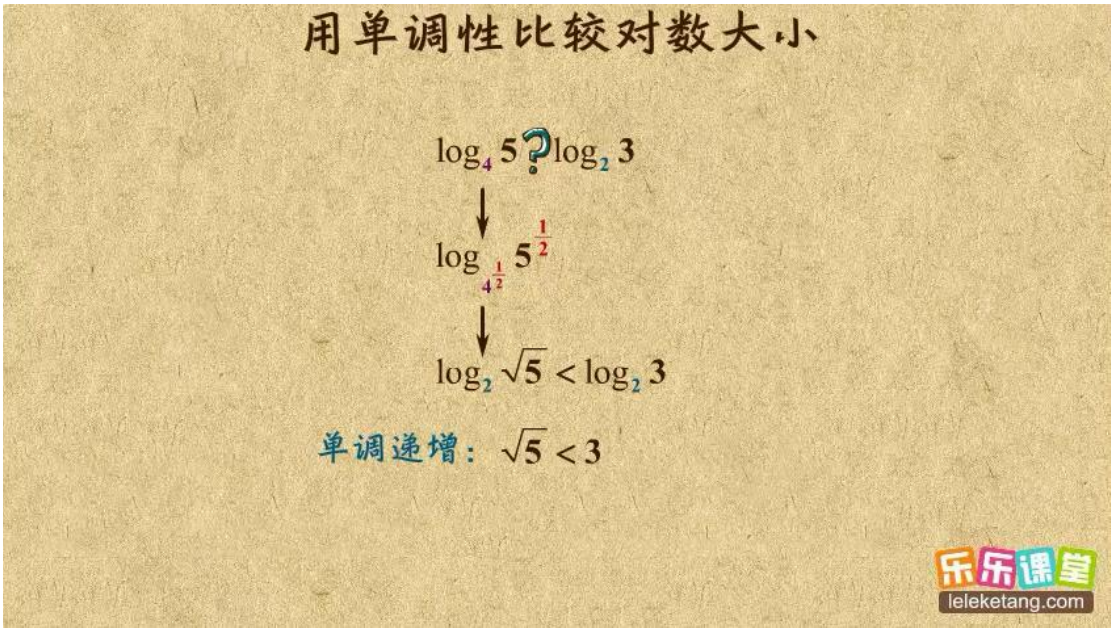
1.8<2.7，$\therefore \log_{0.3} 1.8 > \log_{0.3} 2.7$

(3)已知並沒有明確指出底數是大於 1 還是小於 1，所以需要對底數進行討論。

如果 $a>1$，函數是增函數，此時顯然 $\log_a 5.1<\log_a 5.9$；

如果 $0<a<1$，函數是減函數，此時顯然 $\log_a 5.1>\log_a 5.9$.

- 觀看對數比較大小視頻：
  https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 即時練習

比較下列各組數中兩個值的大小。(填大於號或小於號)

(1) $\log_{20} 6$ ______ $\log_{20} 8$　　(2) $\log_{0.5} 6$ ______ $\log_{0.6} 4$

(2) $\log_{\frac{2}{3}} 0.5$ ______ $\log_{\frac{2}{3}} 0.6$　　(2) $\log_{1.5} 16$ ______ $\log_{1.6} 14$

■ 例題講解

例 2 比較下列各組中兩個值的大小。

(1) $\log_6 7,\ \log_7 6$　　(2) $\log_3 \pi,\ \log_2 0.8$

分析：利用對數函數的增減性無法直接比較兩個對數的大小時，可在兩個對數中間插入一個已知數，比如 0 或 1，間接比較上述兩個對數的大小。

解：(1) $\because \log_6 7>\log_6 6=1$，$\log_7 6<\log_7 7=1$

$\therefore \log_6 7<\log_7 6$

(2) $\because \log_3 \pi>\log_3 1=0,\ \log_2 0.8<\log_2 1=0$

$\therefore \log_3 \pi > \log_2 0.8$

■ 即時練習

比較下列各組中兩個值的大小。

(1) $\log_{10} 7$, $\log_{10} 6$　　(2) $\log_{1.5} \pi$, $\log_2 0.8$

■ 課堂小結

本節課學習了什麼內容？

比較對數大小時與函數增減性有何關係？

■ 課後功課

書 P28 第 3 題

2.9 冪函數-第一課時

【教學目標】

1. 瞭解冪函數的概念；
2. 理解常見冪函數的函數圖像；

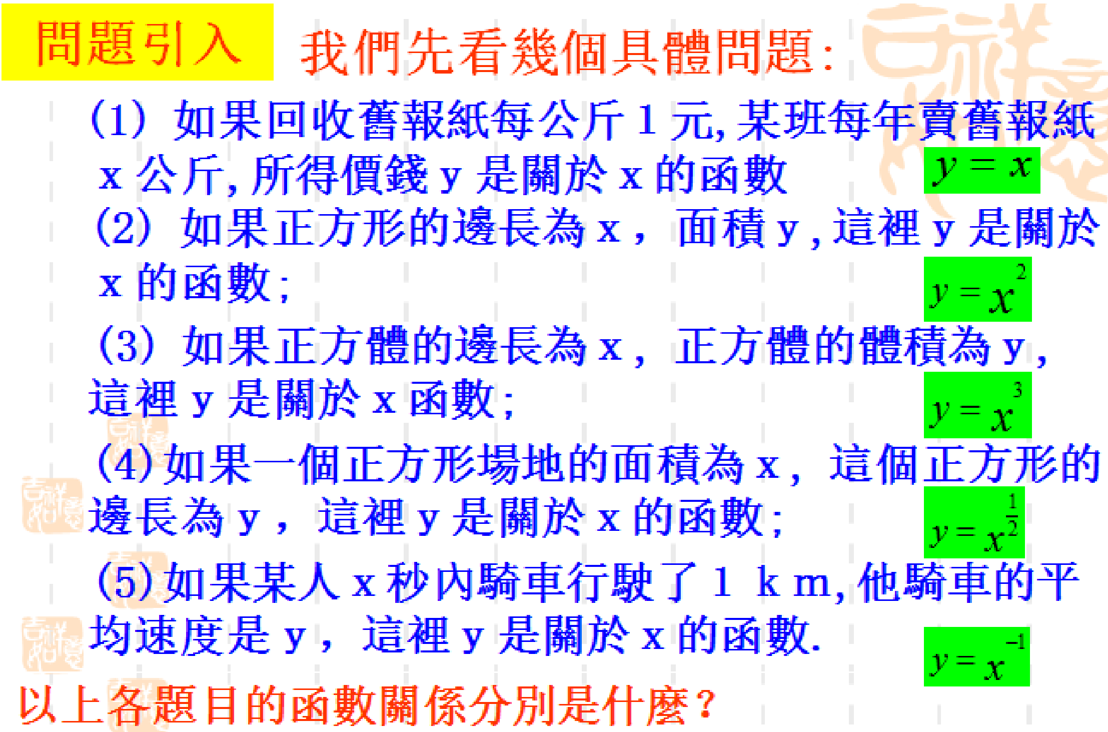
【教學重點】冪函數的函數圖像

【教學難點】冪函數的函數圖像

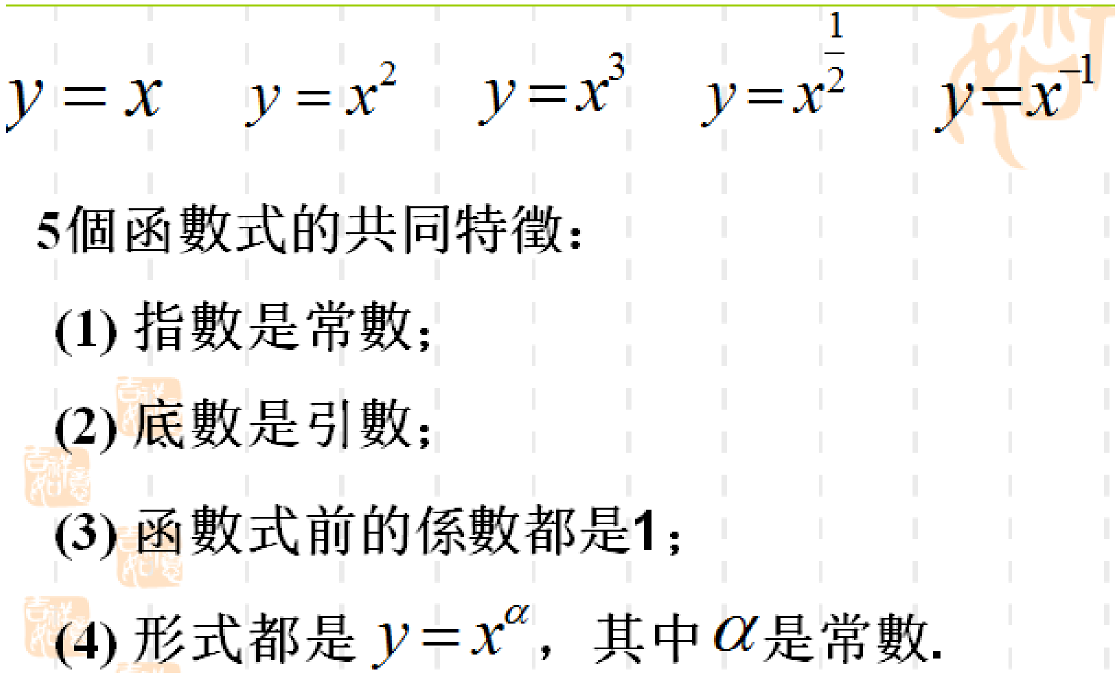
【基力要求】

A-5 函數
A-5-10 掌握冪函數概念 ，掌握指數為 1，2，3，-1，-0.5 的冪函數概念及其圖像和性質.

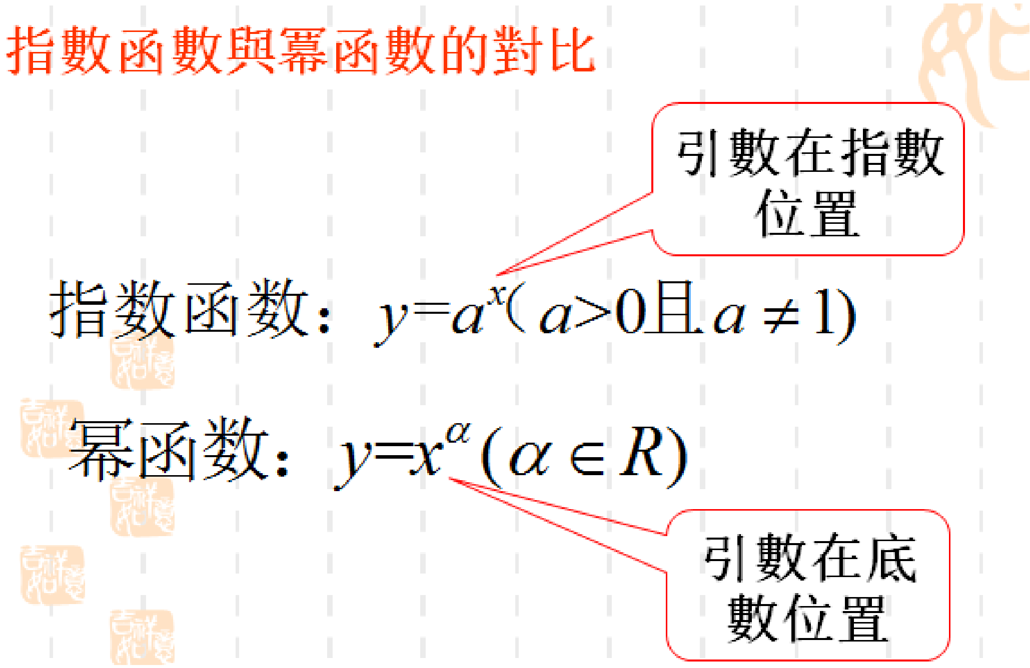
■ 課堂引入



■ 歸納概括



定義：一般地，函數 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$ 叫做冪函數，其中 α 是常數，x 是自變量。
事實上之前我們早已經學過了冪函數的相關例子，只是還沒有歸納概括。
注意與指數函數的區別：



■ 例題講解

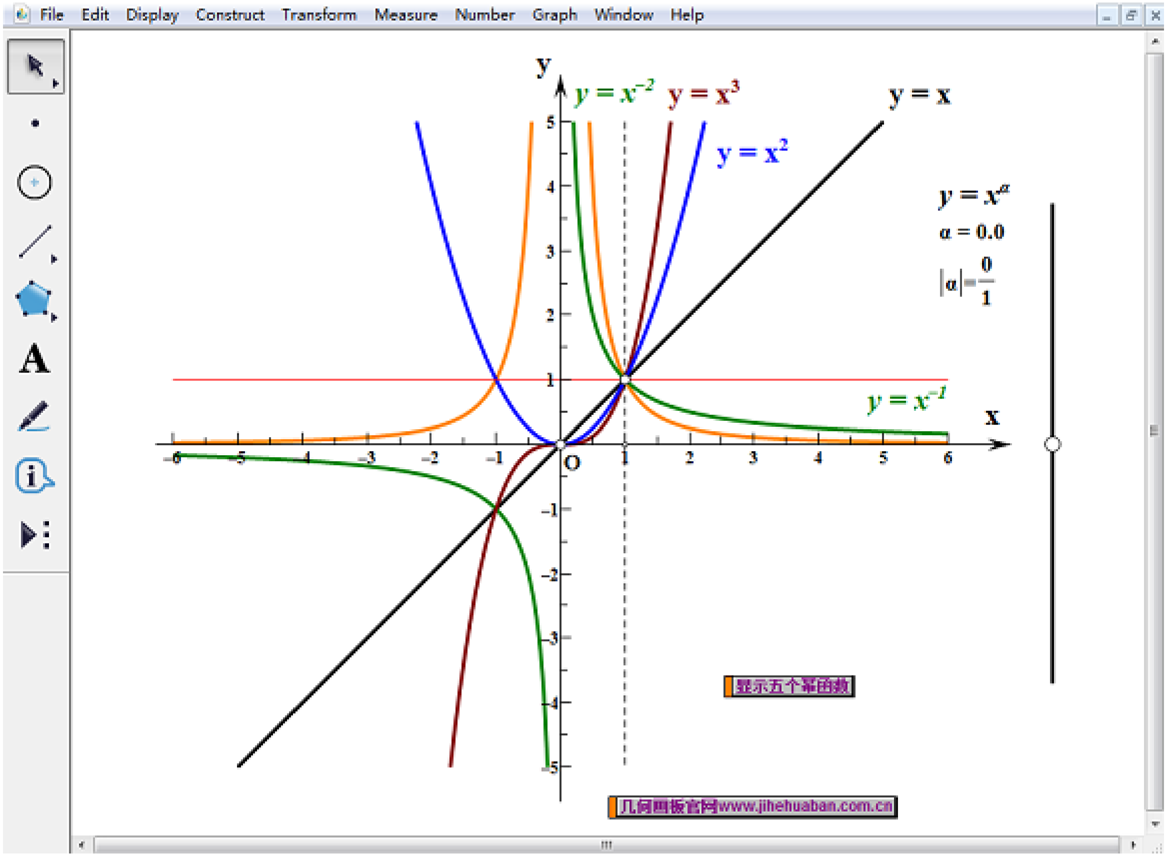
已知冪函數 $y=f(x)$ 過點 $(2,\sqrt{2})$，試求函數的解析式。

解：設所求的冪函數為 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$，代回點 $(2,\sqrt{2})$

即 $\sqrt{2}=2^{\alpha}\Rightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$所求的冪函數是 $y=x^{\frac{1}{2}}$。

■ 若函數 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$ 是冪函數，求滿足條件的實數的 m 的值。

結合幾何畫板，作出冪函數的圖像：



其相關函數性質為：

	y=x	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{1/2}$	$y=x^{-1}$
定義域	R	R	R	$[0,+\infty)$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域	R	$[0,+\infty)$	R	$[0,+\infty)$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
單調性	增	$x\in[0,+\infty)$時,增 $x\in(-\infty,0]$時,減	增	增	$x\in[0,+\infty)$時,減 $x\in(-\infty,0]$時,減
公共點	(1,1) (0,0)	(1,1) (0,0)	(1,1) (0,0)	(1,1) (0,0)	(1,1)

■ 課堂小結

本節課我們學習了什麼內容？

■ 課後功課

書本相關練習

叁、試教評估與反思建議

學生是教學的主體，現階段大部分學生學習的主動性不夠，學習有依賴性，且學習的信心不足，對數學存在或多或少的恐懼感，因此教學上要給學生提供各種參與機會，但參與機會總是需要預足時間，所以教學例題不能太多。為了調動學生學習的積極性，使學生化被動為主動，我步步設問、啟發學生的思維，通過課堂練習，學生討論的方式來加深理解，很好地突破難點和提高教學效率。在課堂中，注重知識的形成過程和思維的方法。學生通過自主思考和合作探究，在老師課堂小結的知識框架下，學生不僅學習到了知識，更重要的是學會了如何解決問題的方法，達到了“授之以魚，不如授之以漁”的效果。在一些趣味教學“重案組破案”上取得了良好的課堂效能。

在教學實施過程中仍然存在一些問題，例如在教學過程中有時一些課堂探究環節過多(允許同學上臺動手觀察變化細節)，以致時間稍有倉促。同時部分課後功課量偏少，比如數列這一課節。趣味教學深受同學喜愛，但一時之間也未能開發更多的案例，以後可以在這方面多下功夫，加強學習，向有經驗的同行或學者多請教，以求進步，教學相長。

肆、參考文獻

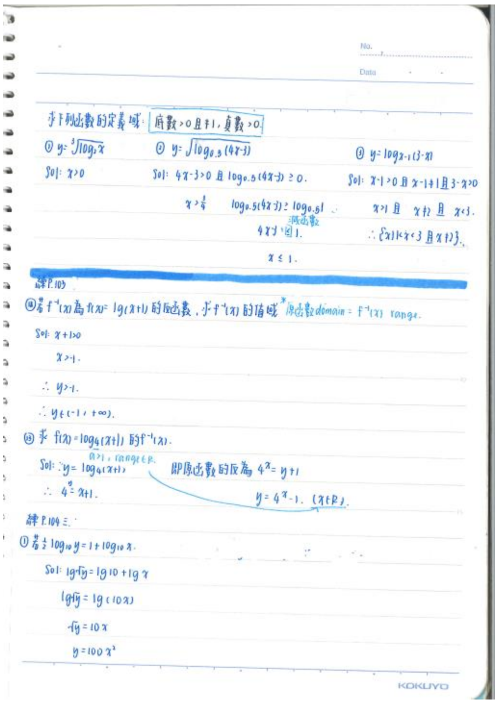
新課標高中數學 A 版必修一上下冊，2001，人民教育出版社。

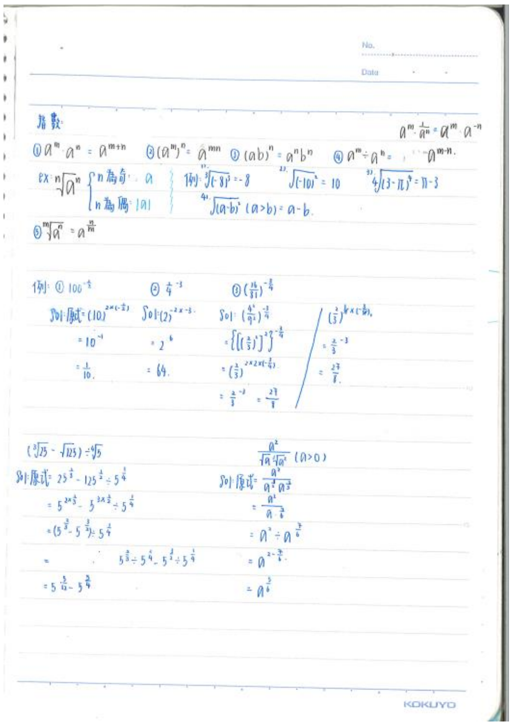
高一數學補充練習冊（校本資料）

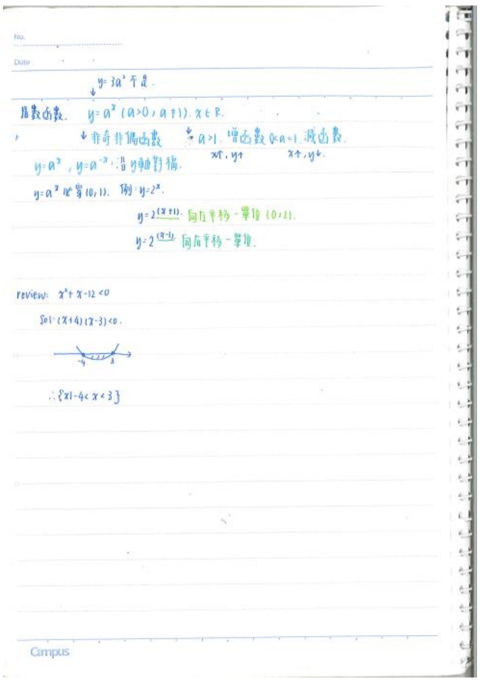
伍、相關教材

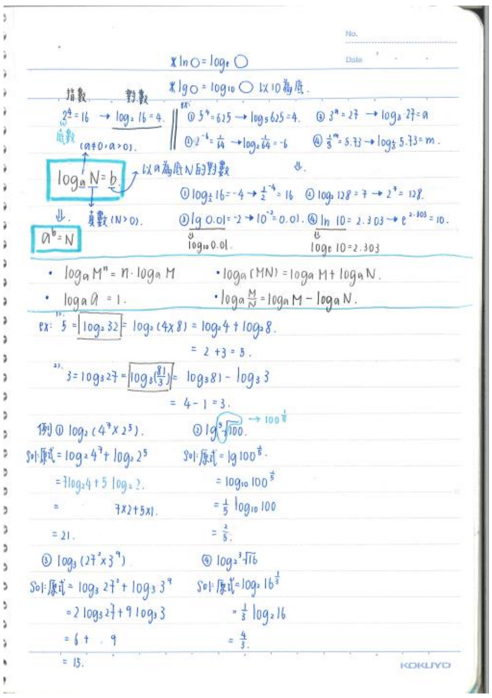
輔助教學資料

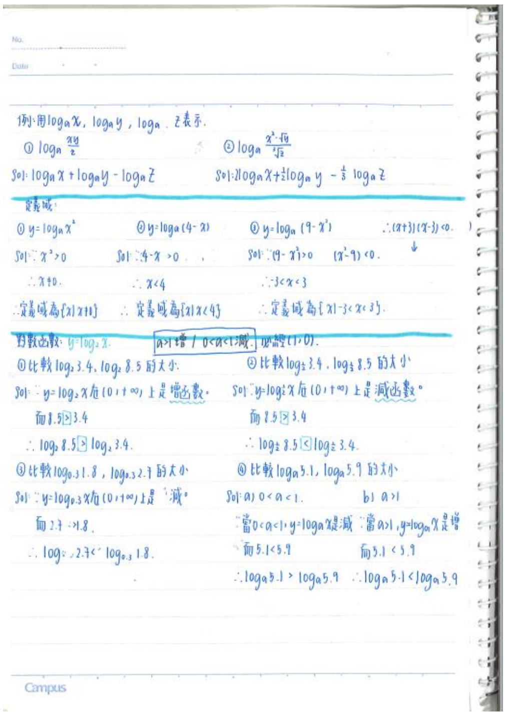
一、筆記圖片











例：用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示。

① $\log_a \frac{xy}{z}$　　② $\log_a \frac{x^2\cdot\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

Sol：$\log_a x+\log_a y-\log_a z$　　Sol：$2\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z$

定義域：

① $y=\log_a x^2$　　② $y=\log_a(4-x)$　　③ $y=\log_a(9-x^2)$　　$\therefore (x+3)(x-3)<0$.

Sol：$\because x^2>0$　　Sol：$\because 4-x>0$　　Sol：$\because (9-x^2)>0$　　$(x^2-9)<0$.

$\therefore x\neq 0$.　　$\therefore x<4$　　$\therefore -3<x<3$

$\therefore$ 定義域為 $\{x|x\neq 0\}$　　$\therefore$ 定義域為 $\{x|x<4\}$　　$\therefore$ 定義域為 $\{x|-3<x<3\}$.

對數函數：$y=\log_2 x$.　　$\boxed{a>1\text{ 增 / }0<a<1\text{ 減}}$　必經 $(1,0)$.

① 比較 $\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$ 的大小.　　② 比較 $\log_{\frac{1}{2}} 3.4$，$\log_{\frac{1}{2}} 8.5$ 的大小

Sol：$\because y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數。　　Sol：$\because y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是減函數。

而 $8.5\boxed{>}3.4$　　而 $8.5\boxed{>}3.4$

$\therefore \log_2 8.5\boxed{>}\log_2 3.4$.　　$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 8.5\boxed{<}\log_{\frac{1}{2}} 3.4$.

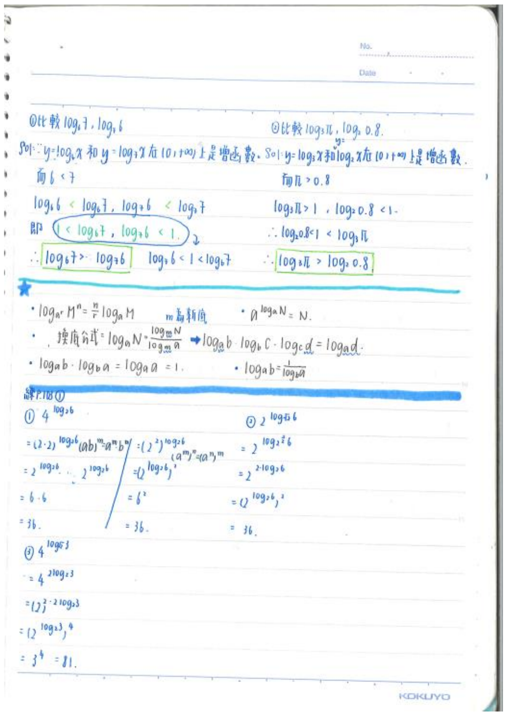
③ 比較 $\log_{0.3} 1.8$，$\log_{0.3} 2.7$ 的大小　　④ 比較 $\log_a 5.1$，$\log_a 5.9$ 的大小

Sol：$\because y=\log_{0.3} x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是減。　　Sol：a) $0<a<1$.　　b) $a>1$

而 $2.7>1.8$.　　$\because$ 當 $0<a<1$，$y=\log_a x$ 是減　　$\because$ 當 $a>1$，$y=\log_a x$ 是增

$\therefore \log_{0.3} 2.7<\log_{0.3} 1.8$.　　而 $5.1<5.9$　　而 $5.1<5.9$

$\therefore \log_a 5.1>\log_a 5.9$　　$\therefore \log_a 5.1<\log_a 5.9$



① 比較 $\log_6 7$，$\log_7 6$　　② 比較 $\log_3\pi$，$\log_2 0.8$.

Sol：$\because y=\log_6 x$ 和 $y=\log_7 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數。　　Sol：$y=\log_3 x$ 和 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數.

而 $6<7$　　而 $\pi>0.8$

$\log_6 6<\log_6 7$，$\log_7 6<\log_7 7$　　$\log_3\pi>1$，$\log_2 0.8<1$.

即 $1<\log_6 7$，$\log_7 6<1$.　　$\therefore \log_2 0.8<1<\log_3\pi$

$\therefore \boxed{\log_6 7>\log_7 6}$　$\log_7 6<1<\log_6 7$　　$\therefore \boxed{\log_3\pi>\log_2 0.8}$

★

- $\log_{a^r} M^n=\frac{n}{r}\log_a M$　　m 為新底　　• $a^{\log_a N}=N$.
- 換底公式：$\log_a N=\frac{\log_m N}{\log_m a}$ ➡ $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.
- $\log_a b\cdot\log_b a=\log_a a=1$.　　• $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

課 P.103 ①

① $4^{\log_2 6}$　　② $2^{\log_{\sqrt{2}} 6}$

$=(2\cdot 2)^{\log_2 6}$ $(ab)^m=a^m b^m$　　$=(2^2)^{\log_2 6}$ $(a^m)^n=(a^n)^m$　　$=2^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 6}$

$=2^{\log_2 6}\cdot 2^{\log_2 6}$　　$=(2^{\log_2 6})^2$　　$=2^{2\cdot\log_2 6}$

$=6\cdot 6$　　$=6^2$　　$=(2^{\log_2 6})^2$

$=36$.　　$=36$.　　$=36$.

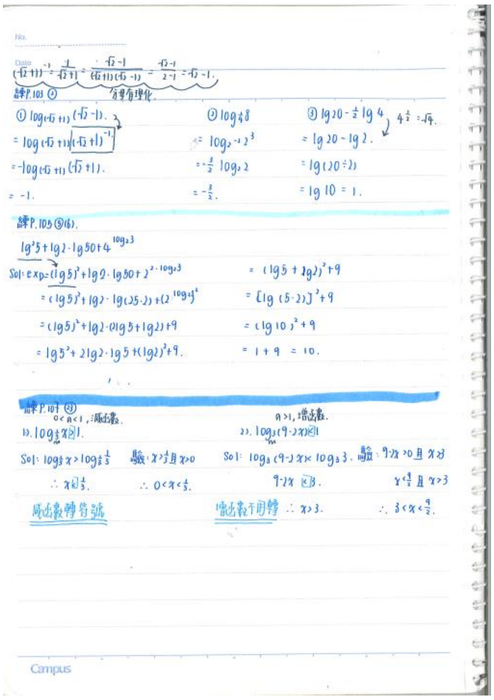
③ $4^{\log_{\sqrt{2}} 3}$

$=4^{2\log_2 3}$

$=(2)^{2\cdot 2\log_2 3}$

$=(2^{\log_2 3})^4$

$=3^4=81$.



$(\sqrt{2}+1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$.

分母有理化.

課 P.103 ②

① $\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}-1)$.　　② $\log_{\frac{1}{4}} 8$　　③ $\lg 20-\frac{1}{2}\lg 4$　$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}$.

$=\log_{(\sqrt{2}+1)}\boxed{(\sqrt{2}+1)^{-1}}$　　$=\log_{2^{-2}} 2^3$　　$=\lg 20-\lg 2$.

$=-\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)$.　　$=-\frac{3}{2}\log_2 2$　　$=\lg(20\div 2)$

$=-1$.　　$=-\frac{3}{2}$.　　$=\lg 10=1$.

課 P.105 ⑤(6).

$\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50+4^{\log_2 3}$

Sol：exp $=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg 50+2^{2\cdot\log_2 3}$　　$=(\lg 5+\lg 2)^2+9$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg(25\cdot 2)+(2^{\log_2 3})^2$　　$=[\lg(5\cdot 2)]^2+9$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot(2\lg 5+\lg 2)+9$　　$=(\lg 10)^2+9$

$=\lg 5^2+2\lg 2\cdot\lg 5+(\lg 2)^2+9$.　　$=1+9=10$.

課 P.107 ㉓

$0<a<1$，減函數.　　$a>1$，增函數.

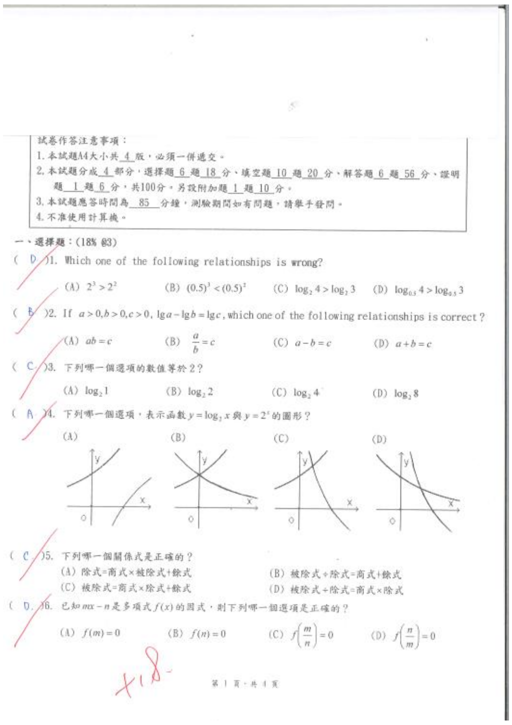
1). $\log_{\frac{1}{3}} x\boxed{>}1$.　　2). $\log_3(9-2x)\boxed{<}1$

Sol：$\log_{\frac{1}{3}} x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$　驗：$x>\frac{1}{3}$ 且 $x>0$　　Sol：$\log_3(9-2x)<\log_3 3$.　驗：$9-2x>0$ 且 $x>3$

$\therefore x\boxed{<}\frac{1}{3}$.　$\therefore 0<x<\frac{1}{3}$.　　$9-2x\boxed{<}3$.　　$x<\frac{9}{2}$ 且 $x>3$

減函數轉符號　　增函數不用轉　$\therefore x>3$.　　$\therefore 3<x<\frac{9}{2}$.

二、測驗圖片



試卷作答注意事項：
1. 本試題A4大小共 4 版，必須一併遞交。
2. 本試題分成 4 部分，選擇題 6 題 18 分、填空題 10 題 20 分、解答題 6 題 56 分、證明題 1 題 6 分，共100分。另設附加題 1 題 10 分。
3. 本試題應答時間為 85 分鐘，測驗期間如有問題，請舉手發問。
4. 不准使用計算機。

一、選擇題：(18% @3)

(D)1. Which one of the following relationships is wrong?
(A) $2^3>2^2$ (B) $(0.5)^3<(0.5)^2$ (C) $\log_2 4>\log_2 3$ (D) $\log_{0.5}4>\log_{0.5}3$

(B)2. If $a>0,b>0,c>0$, $\lg a-\lg b=\lg c$, which one of the following relationships is correct?
(A) $ab=c$ (B) $\frac{a}{b}=c$ (C) $a-b=c$ (D) $a+b=c$

(C)3. 下列哪一個選項的數值等於 2？
(A) $\log_2 1$ (B) $\log_2 2$ (C) $\log_2 4$ (D) $\log_2 8$

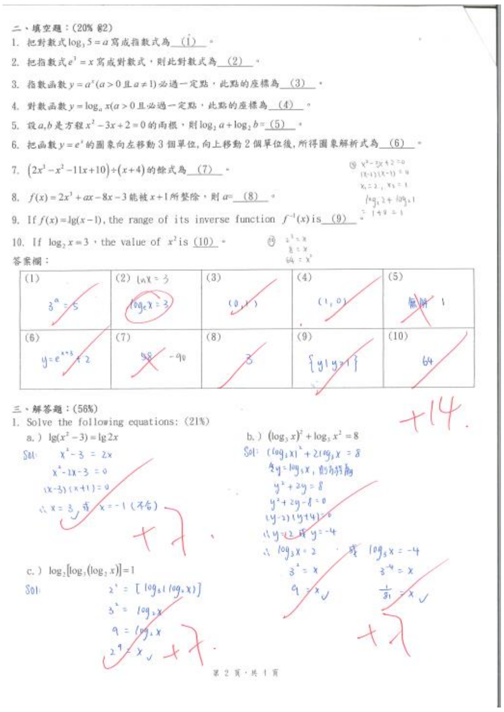
(A)4. 下列哪一個選項，表示函數 $y=\log_2 x$ 與 $y=2^x$ 的圖形？
(A) (B) (C) (D)

(C)5. 下列哪一個關係式是正確的？
(A) 除式=商式×被除式+餘式 (B) 被除式÷除式=商式+餘式
(C) 被除式=商式×除式+餘式 (D) 被除式÷除式=商式×除式

(D)6. 已知 $mx-n$ 是多項式 $f(x)$ 的因式，則下列哪一個選項是正確的？
(A) $f(m)=0$ (B) $f(n)=0$ (C) $f\left(\frac{m}{n}\right)=0$ (D) $f\left(\frac{n}{m}\right)=0$

+18

第 1 頁，共 4 頁



二、填空題：(20% @2)
1. 把對數式 $\log_3 5=a$ 寫成指數式為 (1) 。
2. 把指數式 $e^3=x$ 寫成對數式，則此對數式為 (2) 。
3. 指數函數 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 必過一定點，此點的座標為 (3) 。
4. 對數函數 $y=\log_a x(a>0$ 且必過一定點，此點的座標為 (4) 。
5. 設 a,b 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的兩根，則 $\log_2 a+\log_2 b=$ (5) 。
6. 把函數 $y=e^x$ 的圖象向左移動 3 個單位，向上移動 2 個單位後，所得圖象解析式為 (6) 。
7. $(2x^3-x^2-11x+10)\div(x+4)$ 的餘式為 (7) 。
8. $f(x)=2x^3+ax-8x-3$ 能被 $x+1$ 所整除，則 $a=$ (8) 。
9. If $f(x)=\lg(x-1)$, the range of its inverse function $f^{-1}(x)$ is (9) 。
10. If $\log_2 x=3$，the value of x^2 is (10) 。

答案欄：

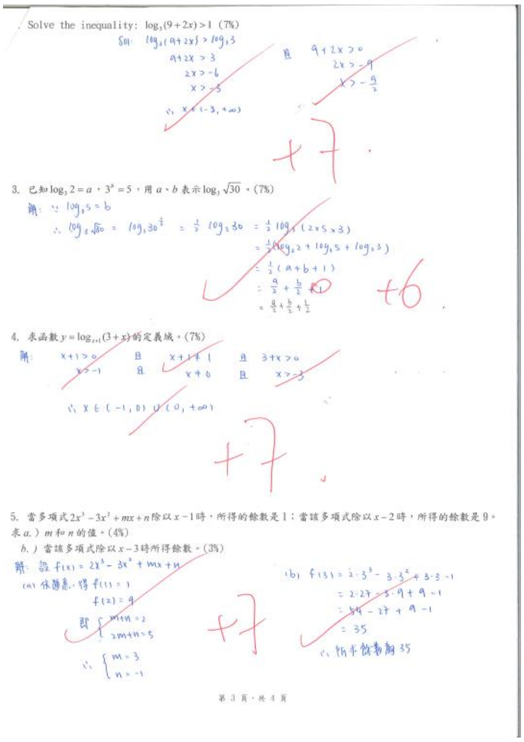
(1)	(2) $\ln x=3$	(3)	(4)	(5)
$3^a=5$	$\log_e x=3$	(0,1)	(1,0)	~~無解~~ 1
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$y=e^{x+3}+2$	~~98~~ -90	3	{y | y>1}	64

+14

三、解答題：(56%)
1. Solve the following equations: (21%)
a.) $\lg(x^2-3)=\lg 2x$
b.) $(\log_3 x)^2+\log_3 x^2=8$
c.) $\log_2[\log_3(\log_2 x)]=1$

+7 +7 +7

第 2 頁，共 4 頁



Solve the inequality: $\log_3(9+2x)>1$ (7%)

+7

3. 已知 $\log_3 2=a$，$3^b=5$，用 a、b 表示 $\log_3\sqrt{30}$。(7%)

+6

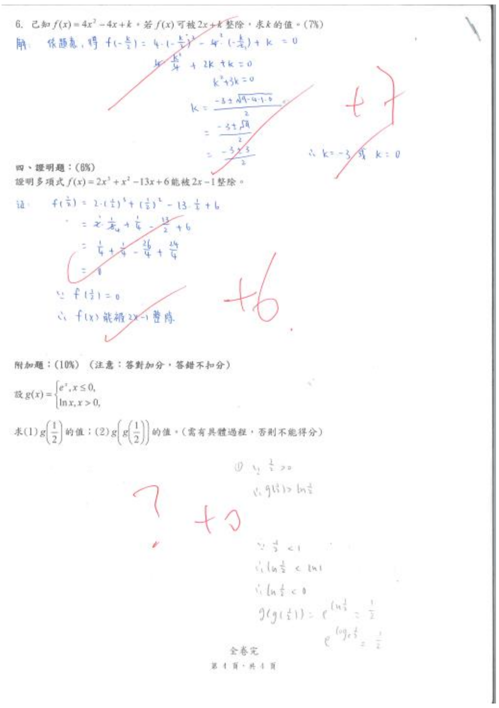
4. 求函數 $y=\log_{x+1}(3+x)$ 的定義域。(7%)

+7

5. 當多項式 $2x^3-3x^2+mx+n$ 除以 $x-1$ 時，所得的餘數是 1；當該多項式除以 $x-2$ 時，所得的餘數是 9。求 a.) m 和 n 的值。(4%)
b.) 當該多項式除以 $x-3$ 時所得餘數。(3%)

+7

第 3 頁，共 4 頁



6. 已知 $f(x)=4x^2-4x+k$，若 $f(x)$ 可被 $2x+k$ 整除，求 k 的值。(7%)

+7

四、證明題：(6%)
證明多項式 $f(x)=2x^3+x^2-13x+6$ 能被 $2x-1$ 整除。

+6

附加題：(10%) (注意：答對加分，答錯不扣分)

設 $g(x)=\begin{cases}e^x, x\leq 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$

求(1) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值；(2) $g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 的值。(需有具體過程，否則不能得分)

+3

全卷完

第 4 頁，共 4 頁