EXCEL在微積分教學之應用

文．圖｜鄧偉強　陳智彪　李德怡　陳志衡

一、引言

《高中數學基本學力要求》指出“高中數學課程是為了滿足所有學生的共同數學需求，是學生發展所需要的共同數學基礎。”然而，在實際的教學過程中，往往遇到高中學生數學基礎參差不齊，有些學生的數學基礎相當薄弱，加大了微積分教學的難度，教師有需要走出傳統單純講授式和板書式的教學方式，引發學生的學習動機。高中學生已屆青春期而邁向成人之路，按照成人學習的特點，成人學習者的學習目的是為直接應用知識而學，學習方式注重以問題作為中心，學習動機更強調內在性，例如他們會期望獲取有關知識後，可以充實自己，滿足求知慾望，也可以提高競爭力等等[1]。

微積分教學中使用電腦輔助教學，其目的在於：第一，為學生提供完整的學習資訊。微積分系統基本上是十七世紀數學思想的產物，發展至今已經歷三百多年，使用的數學符號也從繁瑣複雜到簡潔直觀，如何將三百多年的研究精華濃縮成數十小時的課堂學習，幫助學生更易於掌握微分和積分的基本概念和背後的推導原理，往往成為微積分教學中必須思考的教學難點。第二，設計符合成人學習需求的課程和教學內容。高中學生的學習注重應用性、技能性，所有離開生活經驗的學習內容，都很大可能會令其失去學習動機。因此，將微積分的學習內容與高中其他的學習領域例如社會與人文、自然科學等實際應用連結起來，可以幫助學生鞏固微積分的學習知識。第三，以學生為本的教學安排。在高中教育的學習中，教師不是唯一的權威，使用電腦輔助教學，可以營造一個主動學習、互相討論的學習環境，學生只需要具備一定的電腦操作經驗，就可以理解很多微積分的問題，而且電腦軟件中的函數圖像更有利於學生學習微積分的函數公式的基礎理論，從而提高學生從感性認識到理性思維的轉換效率，減少學生學習數學的焦慮。

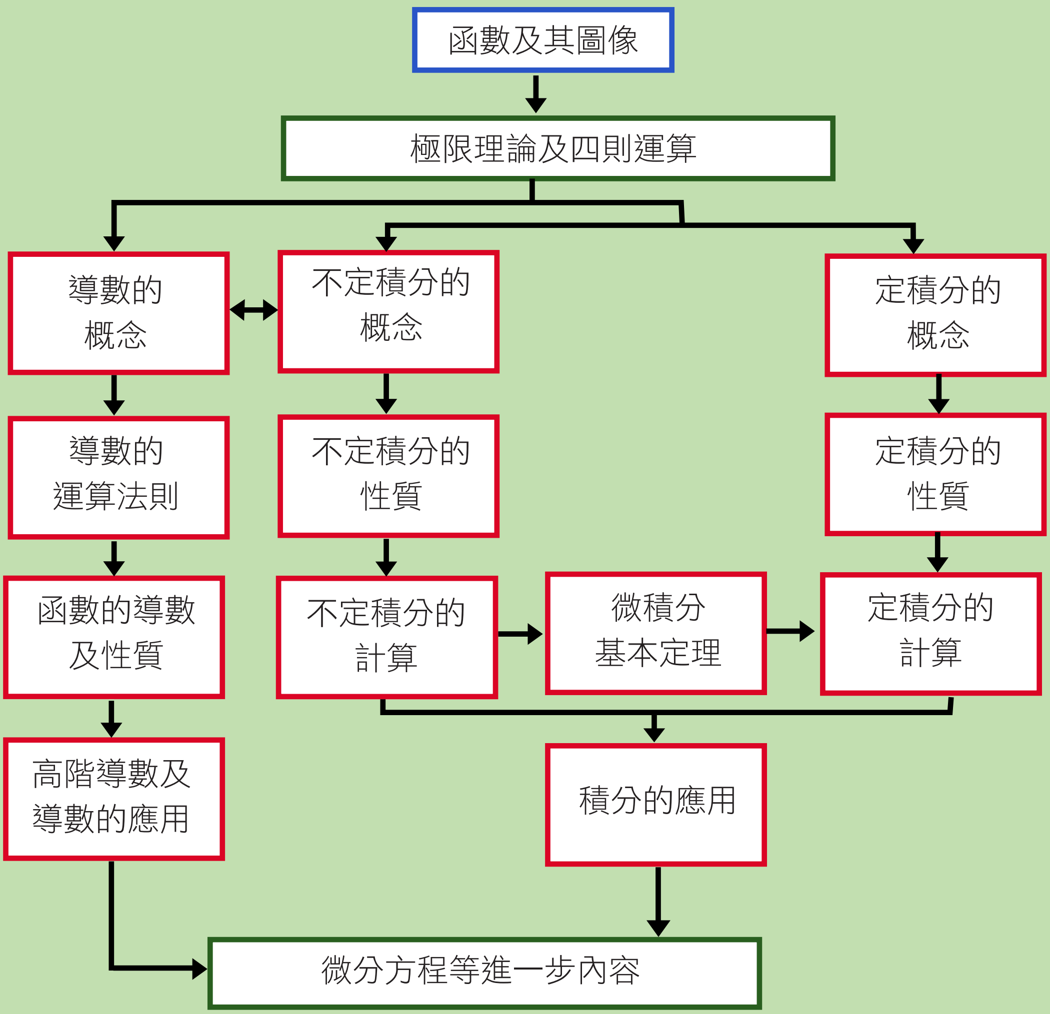
目前，許多的電腦軟件已具備強大的繪圖功能，例如MATLAB已提供解決微積分各種問題的計算方法，還可以繪製函數圖像，並檢查極值和

最值。然而，為減少學生運用資訊科技工具輔助學習的心理壓力，本文將採用學生們較為熟悉的辦公室軟件EXCEL作為學習工具，使學生們可以更容易地、便捷地學習和總結微積分的內容。

下文將說明微積分的教學內容，以及其以EXCEL進行輔助教學的具體操作，使用版本為EXCEL 2010。

二、微積分的教學進程

微積分主要包括微分學和積分學兩個主要部分（圖一）。微分學包括一元函數微分學和多元函數微分學兩個部分，其中一元函數微分學有兩個最基本的概念：導數和微分。積分學是微分學的逆運算，即從導數推算出原函數，又分為定積分與不定積分。



圖一：微積分的教學內容[2]

（一）微分學的教學內容

微分是求解函數 $f(x)$ 相對於變數 x 的變化率，或是每單位 x 變化下，相對應的 f 變化。以企業經營為例，當產量由 q 增加為 $q+\Delta q$ 時，利潤函數相應地也會有變化 $L(q)\to L(q+\Delta q)$，定義函數變化 $\Delta L=L(q+\Delta q)-L(q)$，那麼 L 在 q 至 $q+\Delta q$ 這個範圍內對 q 的平均變化率為 $\frac{\Delta L}{\Delta q}=\frac{L(q+\Delta q)-L(q)}{\Delta q}$，其中 $\frac{\Delta L}{\Delta q}$ 是以澳門元／件計量。

如果進一步讓這個範圍逐漸縮小，取 $\Delta q\to 0$ 的極限，那麼所得到的就是在 q 處的變化率，此變化率記為 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q}$：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta L}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{L(q+\Delta q)-L(q)}{\Delta q}$$

稱為函數 $L(q)$ 在 q 處的導數（Derivative）。

導數是一個數值，從幾何意義來看，它代表函數 L 在 q 點處切線的斜率，記為 $L'(q)$ 或 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q}$。導函數是一個函數（Derive Function），意義可為“切線斜率函數”，而由函數 $L'(q)$ 得到其導函數的運算過程，則叫求導（Differentiate），亦常稱之為微分。

因此，在EXCEL中對利潤函數取導的操作中，把利潤 $L(q_2)$ 減去利潤 $L(q_1)$ 得出的利潤之差，再除以生產量（或銷售量）q_2 減去生產量（或銷售量）q_1 的差，取 $\Delta q\to 0$ 的極限，便能找到切線的斜率。

這裡要注意的是，為要取得更為精確的結果，我們會使用中值法，得到函數的數值近似值。以下，我們將介紹微分學的兩個應用，包括損益平衡分析及最大利潤問題。

1. 損益平衡分析

每一間企業在營運的過程中，都必須考量成本、產品數量及利潤三者之間的變動關係。因此，損益平衡分析在商業活動上是一個專門的分析方法，讓企業確定在達到損益平衡時的產品數量水平[3]，即利潤函數 $L(q)=0$，其中 q 表示生產量（或銷售量）。

舉例：科大運動服裝公司生產和經營各種運動服裝，表一為過去這間公司的需求量和售價的數據，表二為生產量和成本的數據。

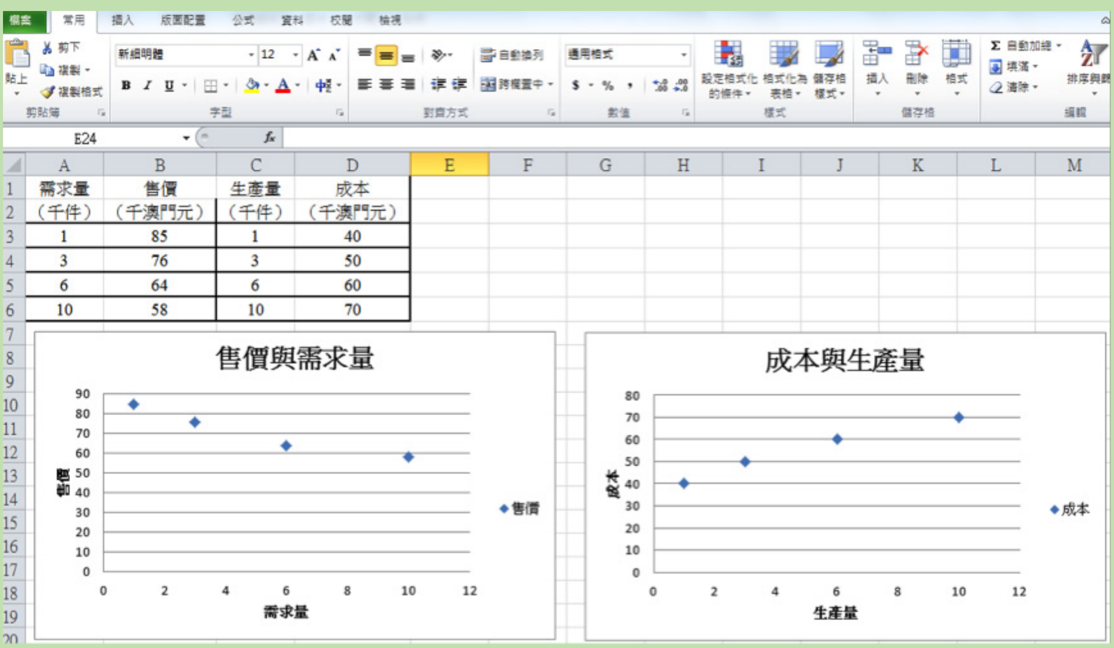
表一：需求量和售價		表二：生產量和成本	
需求量（千件）	售價（千澳門元）	生產量（千件）	成本（千澳門元）
1	85	1	40
3	76	3	50
6	64	6	60
10	58	10	70

運用EXCEL的“迴歸”（Regression）和製作圖表的功能，可以估計運動服裝的價格（p）和需求量（q）的線性關係，以及成本（$C(q)$）和生產量（q）的線性關係。

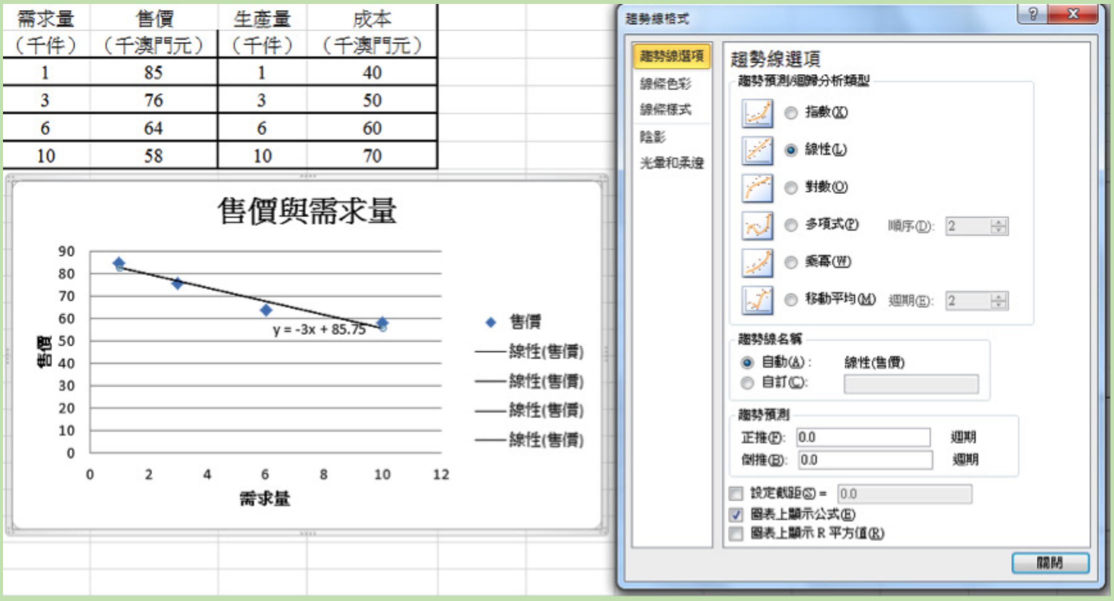
點選圖二對應點的數據，按下滑鼠右鍵選擇“加上趨勢線”，然後在“趨勢線格式”中點選“圖表上顯示公式”，可以得出需求函數式和成本函數式（圖三）。

$$p = -3q + 85.8 \qquad (1)$$

$$C(q) = 3.3q + 38.7 \qquad (2)$$



圖二：科大運動服裝公司的營運數據



需求量（千件）	售價（千澳門元）	生產量（千件）	成本（千澳門元）
1	85	1	40
3	76	3	50
6	64	6	60
10	58	10	70

圖三：線性關係

由公式（1）、（2）可得出一元二次方程的利潤函數式（3），根據損益平衡分析的方法，將（3）設定為零，以便計算損益點。從圖四，E欄表示需求量（q），而F欄表示其相應的利潤（$L(q)$），在F2儲存格輸入“=-3*E2^2+82.5*E2-38.7”（公式（4）），隨後把E2、F2的公式向下複製，可以得到不同的需求量對於利潤的影響。圖四顯示，需求量（q）的數值範圍在 $0 \le q \le 30$ ，兩個損益點分別在 [0,1] 和 [27,28] 的區間之內。為精確有關數據，接下來取三個小數位數，可以得出 $q \approx 0.477$（$L(0.477) = -0.03009$）、$q \approx 27.023$（$L(27.023) = -0.03009$），即當需求量為477件、27,023件時，銷售收入等於生產成本，所取得的損益點數值與公式（4）計算得到的數值相等（指定三個小數位數）。

利潤函數：

$$\begin{aligned} L(q) &= R(q) - C(q) \\ &= qp - C(q) \\ &= q(-3q + 85.8) - (3.3q + 38.7) \\ &= -3q^2 + 82.5q - 38.7 \qquad (3) \end{aligned}$$

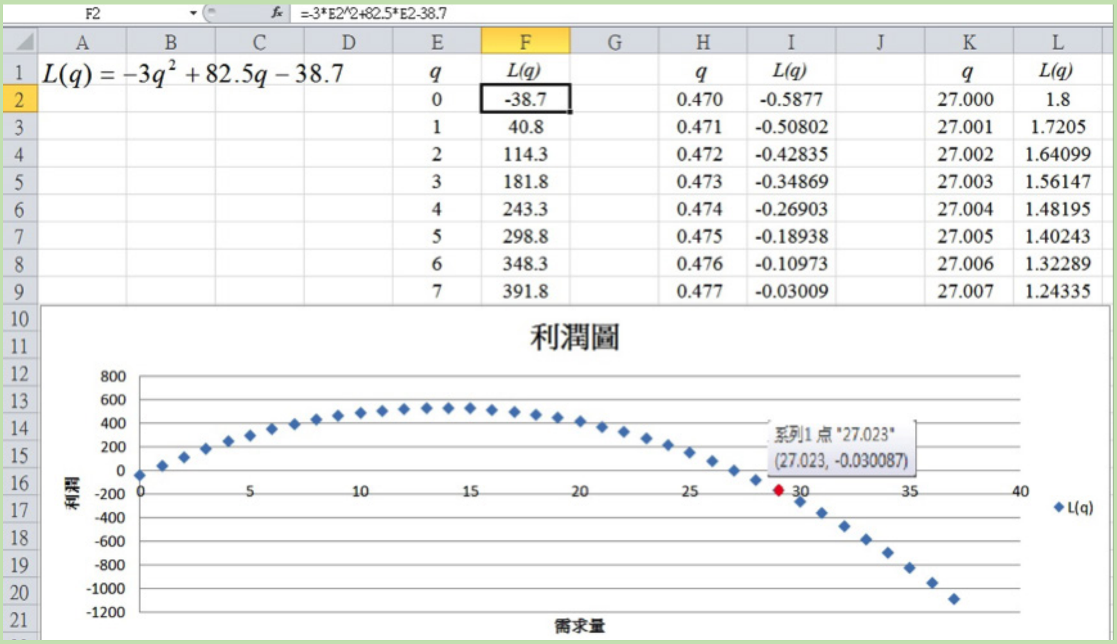
損益點：

$$L(q) = -3q^2 + 82.5q - 38.7 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-82.5 \pm \sqrt{(82.5)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-38.7)}}{2 \cdot (-3)} \qquad (4)$$

得出 $q_1 = 0.477$（千件）或 477（件），$q_2 = 27.023$（千件）或 27,023（件）



q	L(q)	q	L(q)	q	L(q)
0	-38.7	0.470	-0.5877	27.000	1.8
1	40.8	0.471	-0.50802	27.001	1.7205
2	114.3	0.472	-0.42835	27.002	1.64099
3	181.8	0.473	-0.34869	27.003	1.56147
4	243.3	0.474	-0.26903	27.004	1.48195
5	298.8	0.475	-0.18938	27.005	1.40243
6	348.3	0.476	-0.10973	27.006	1.32289
7	391.8	0.477	-0.03009	27.007	1.24335

圖四：利潤圖

2. 最大利潤問題

在經濟活動中，產量在達到某一數量之前，企業增加產量，利潤就會增加，反之超過這個數量後，利潤則會減少，所以最大利潤問題，實質上為總利潤函數 $L(q)$ 取最大值的問題。為使利潤最大，L 對 q 的一階導數須為零，即 $L'(q)=R'(q)-C'(q)=0$，其中 $R'(q)$ 是邊際收益（MR），$C'(q)$ 是邊際成本（MC）。

設 q_0 為 $L'(q)=0$ 的根，為使總利潤達到最大，還應有 L 的二階導數為負，即 $L''(q_0)<0$，得 $R''(q_0)<C''(q_0)$，此反映邊際收益函數的斜率小於邊際成本函數的斜率[4]。換言之，在利潤取得最大值的點處的邊際收益等於其相應的邊際成本。下面以上文的舉例加以說明。

由公式（3）

$$L'(q)=(-3q^2+82.5q-38.7)'$$
$$=-6q+82.5 \qquad (5)$$

$$令\ L'(q)=0$$
$$-6q+82.5=0$$
$$\Rightarrow q=13.75 \quad（千件） \qquad (6)$$

$$\because L''(q)=-6<0$$
$$\therefore L(13.75)=-3\cdot(13.75)^2+82.5\cdot(13.75)-38.78$$
$$=528.48（千澳門元） \qquad (7)$$

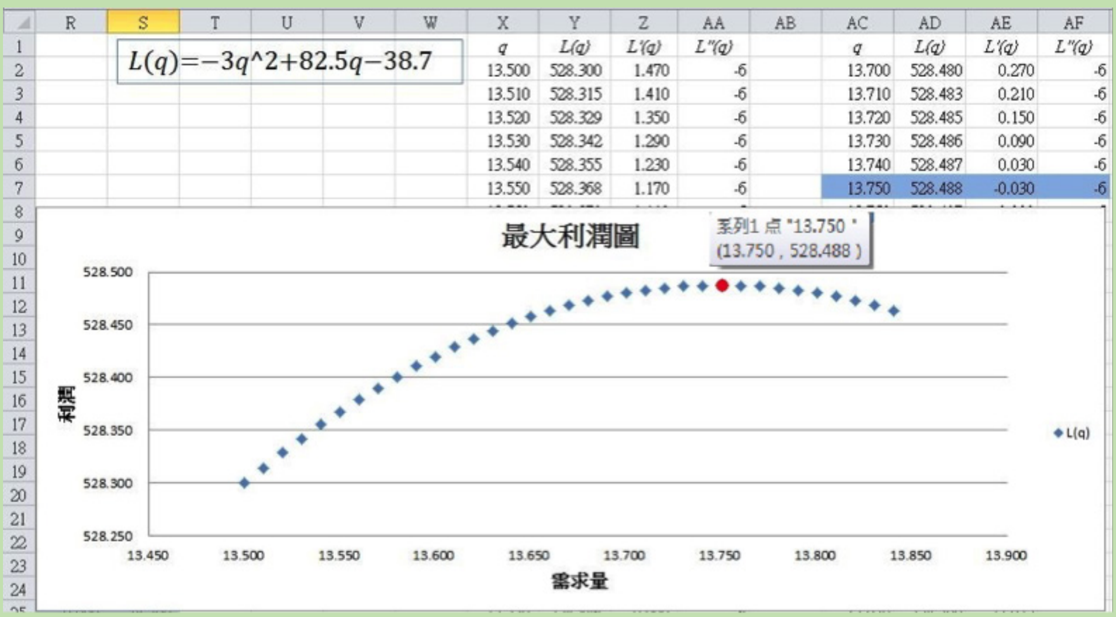
可得出每件運動服的價格：

$$p=-3q+85.8=-3\cdot 13.75+85.8$$
$$=44.55 \quad（澳門元） \qquad (8)$$

現在，我們在EXCEL中進行計算，將公式（3）取一階導數得到（5），然後再將（5）設定為零，以計算最大利潤下的需求量。在圖五中，X欄表示需求量(q)，而Y欄表示其相應的利潤$L(q)$，Z欄表示對利潤函數$L(q)$取一階導數，AA欄表示對利潤函數$L(q)$取二階導數。首先，以X2儲存格作為基準，以增量0.01作為公式，並向下複製。例如X2儲存格為13.500，X3儲存格則為13.510，如此類推。

其次，在Y2儲存格輸入公式“=-3*X2^2+82.5*X2-38.7”（公式（4）），隨後把Y2的公式向下複製，可以得到不同的需求量下利潤的變化。第三，在Z欄輸入公式“=(Y3-Y2)/(X3-X2)”，於AA欄於入公式“=(Z3-Z2)/(X3-X2)”，接着用相同的操作方式向下複製Z欄及AA欄，並使用EXCEL的製圖功能得出一個利潤曲線圖（圖五）。

從圖五可見，當$q<13.75$(千件)，則$L'(q)>0$，利潤$L(q)$增加；反之，當$q>13.75$（千件），則$L'(q)<0$，利潤減少；當需求量為13.75（千件）時，利潤$L(q)$達到最大值，此時的最大利潤為528.488（千澳門元）。這時，從公式（1）可得出每件運動服價格約44.55（澳門元），以數值方法計算得到的結果與式（8）結果相等。最大利潤問題的方法可為企業主提供更科學的運動服定價和生產數量。



圖五：最大利潤圖

（二）積分學的教學內容

由於不定積分較為複雜，本文只討論定積分的內容，即理解辛普森法則（Simpson's rule）及使用其計算定積分的近似值。

下例將把區間 $[a,b]$ 分割成等長度的 n 等份，並假設函數值 $f(x)\geq 0$ 。為方便計算，一般地採用等寬度分割，黎曼和是圖形下區域面積的近似值，而 $n\to\infty$ 的極限值是這區域的面積。

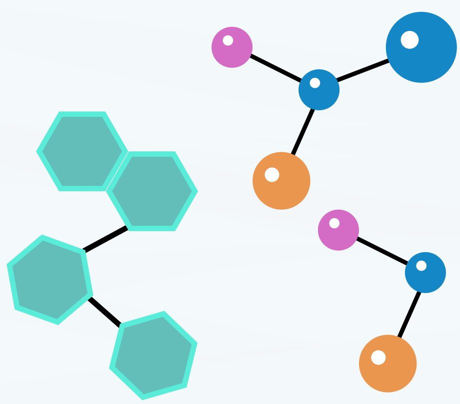
舉例：洛倫茲曲線反映一個地區國民收入的分配情況，經濟學家堅尼在洛倫茲曲線的基礎上發展了堅尼系數，以反映貧富差距的問題，這個指標是以0到1這個區間來表示，數值越接近1，代表貧富差距越大，社會財富分配越不平均；反之貧富差距越小，社會財富分配越平均。表三是一個地區的社會財富分配數據，根據資料顯示，最貧窮人口的收入佔當地總財富的百分之六，以迴歸方法可得出洛倫茲曲線 $f(x)=x^{2.3}$ 。

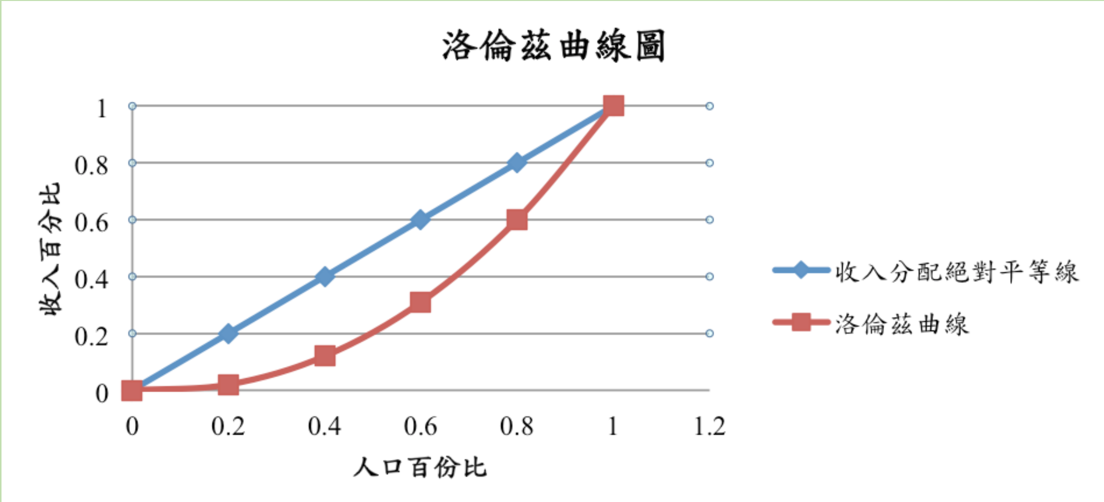
在洛倫茲曲線與收入絕對平等線之間的面積中，如圖六，已知人口百分比的區間為 $[0,1]$，把這區間分成若干個子區間，分別為 $[0,0.001]$、$[0.001,0.002]$、$[0.002,0.003]$、⋯、$[0.999,1]$，可以得到1,000個矩形，而每個矩形的寬度都是0.001。每個矩形的高點為 x（收入絕對平等線上的點），低點為 $x^{2.3}$（洛倫茲曲線上的點），這兩點的差距為這個矩形的長度，即 $x-x^{2.3}$（如圖七中D欄“Y2-Y1”），然後把每個矩形的長與寬相乘就可以計算出這個矩形的面積，最後把所有矩形的面積加總，便可得出在 $[0,1]$ 區間內洛倫茲曲線與收入絕對平等線之間的面積。

表三：社會財富分配表

收入水平	x	y
最底層（貧窮）的五分之一	0.2	0.02
第二個五分之一	0.4	0.12
第三個五分之一	0.6	0.31
最高層（富有）的五分之一	0.8	0.60

從圖六，堅尼係數是實際收入分配曲線（洛倫茲曲線）$f(x)=x^{2.3}$和收入分配絕對平等線 $f(x)=x$ 之間的弓形面積，與收入分配絕對平等線 $f(x)=x$ 的下三角形面積的比值[5]。





圖六：洛倫茲曲線圖

以下應用辛普森法則計算實際收入分配曲線（洛倫茲曲線）$f(x)=x^{2.3}$ 和收入分配絕對平等線 $f(x)=x$ 之間的面積（I）的近似值：

由定義，堅尼係數為 $2I$，其中：

$$I=\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [x-f(x)]dx \qquad (9)$$

令 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}，$$

$$M_n=\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\Delta x \qquad (10)$$

（辛普森法則）

為精確有關數據，接下來取三個小數位數，即 $10^{-3}=0.001$ 作為在該面積中任意兩點之間的距離（Δx）。令 $a=0$，$b=1$，得到 $n=\frac{1-0}{0.001}=1{,}000$。下面將說明在EXCEL中計算積分 I 公式（9）的步驟（圖七）：

第一步：建立 x 的數值，最小值為0，最大值為1，兩點之間的距離為0.001。在B3儲存格輸入“＝B2+0.001”，隨後把B3的公式向下複製，可以得到1,000個分割值。

第二步：計算x的中點值（$\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$），在C3儲存格輸入“$=\frac{\mathrm{B2}+\mathrm{B3}}{2}$”，隨後把C3的公式向下複製，可以得到1,000個分割值相應的中點值。

第三步：計算洛倫茲曲線的數值，在D3儲存格輸入“=C3-C3^2.3”，隨後把D3的公式向下複製，可以得到1,000個中點值相應的洛倫茲曲線的數值。

第四步：根據公式（10）的計算方法，在E3儲存格輸入“=D3*0.001”，隨後把D3的公式向下複製，然後將儲存格E3至E1003的數值加總，得出 $I\approx 0.197$，從而可以計算得到堅尼系

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$y_1=x^{2.3}$	x	x中點值	Y2-Y1	辛普森法則		I=	0.197
2	$y_2=x$	0					堅尼係數	0.394
3		0.001	0.0005	0.00050	4.99974E-07			
4		0.002	0.0015	0.00150	1.49968E-06			
5		0.003	0.0025	0.00250	2.49896E-06			
6		0.004	0.0035	0.00350	3.49775E-06			
7		0.005	0.0045	0.00450	4.496E-06			
8		0.006	0.0055	0.00549	5.49365E-06			
9		0.007	0.0065	0.00649	6.49067E-06			
10		0.008	0.0075	0.00749	7.48704E-06			

圖七：堅尼係數

數為$2I \approx 0.394$。因此，可以判定這個地區的收入分配相對合理，低於0.4的警戒線。

接下來，計算由公式（10）辛普森法則所得出的積分近似值的誤差。使用的公式如下：

$$f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}(x-x^{2.3}) \\ =-2.99x^{0.3} \tag{11}$$

$$B_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)| \\ =\max_{0\le x\le 1}|-2.99x^{0.3}|=2.99 \tag{12}$$

$$|I-M_n|\le\frac{B_2(b-a)^3}{24n^2} \\ =\frac{2.99\cdot(1-0)^3}{24\cdot(1{,}000)^2} \\ =1.25\times10^{-7} \tag{13}$$

由此可見，由辛普森法則所得出的積分近似值十分精確，辛普森法則和EXCEL的功能可以有效處理積分的問題。

三、結論及建議

本文從微積分的微分和積分兩個核心內容進行探討，結合EXCEL的功能，展示了微分和積分的基本概念和實際應用，突出微積分學習的重點和難點。由課堂實施經驗所得，在微積分教學中應用EXCEL作為輔助教學工具，有以下三個優點：第一，在課程目標方面，EXCEL的引進，減少過往微積分偏重強調對函數、曲線、法則或題型的機械操作和記憶，有助於培養學生對數學概念和問題的全面理解。第二，在教學方面，結合EXCEL實作的圖示法、數值法可以為教學帶來新思路，改變傳統微積分教學上過分偏重符號演算和解題技巧的訓練，使學習微積分更加直觀、可視化[6]。第三，在學生學習方面，引入EXCEL的演練實作，增加課堂的多樣性，加強數學與生活的聯繫，從而激發學生學習數學的興趣。未來，微積分教學和資訊科技應該繼續互相

結合，共同發揮作用，使學生更喜歡數學、理解數學及應用數學。

[參考文獻]

[1] 溫艷。基於自我指導學習理論的成人教育數學設計[J]。**《成人教育》，29**，30-31。

[2] 張霞(2015)。基於Excel的盈虧平衡分析決策模型創新研究[J]。**會計之友，19**，77-79。

[3] 張家麟、黃毅英(2010)。**從“微積分簡介”看數學觀與數學教學觀**[M]。香港教育局。

[4] 李瑩、溫如鳳、于祥芬(2014)。經濟函數在經濟案例中的應用分析[J]。

[5] 陳崢(2001)。關於洛倫茨曲線與吉尼係數的探討[J]。**青島海洋大學學報（自然科學版），31**，455-460。

[6] Liang, J., Martin,L.(2008)An Excel-aided method for teaching calculus-based business mathematics. *College Teaching Methods & Styles Journal, 4*(11), 11-23.

鄧偉強
教育暨青年局職務主管
博士、澳門科技大學兼職講師

陳智彪
澳門科技大學持續教育學院學生

李德怡
澳門科技大學持續教育學院學生

陳志衡
澳門科技大學持續教育學院學生