



幾何傳統教學和實驗教學： “直角三角形全等的判定方法HL” 同課異構的反思

文·圖 | 劉溢庭、陳穎枝、金鑫、江春蓮

2020年11月4日，我們在澳門培道中學就“直角三角形全等的判定方法HL”進行了同課異構的教學交流活動。該校劉老師依據傳統的幾何教學順序（複習全等三角形相關的知識→問題引入主題→教師演示得到結論→例題應用→課堂練習→小結、佈置作業）設計了一節課；陳老師在簡短複習的基礎上設計了一節數學實驗課，兩節課的教學效果完全不同。下面我們將先完整呈現這兩節課的教學過程，接着就兩節課的教學設計以及一般幾何內容的教學作些講評，希望能給一線的數學老師一些教學的啟迪。（澳門大學教育學院助理教授江春蓮）

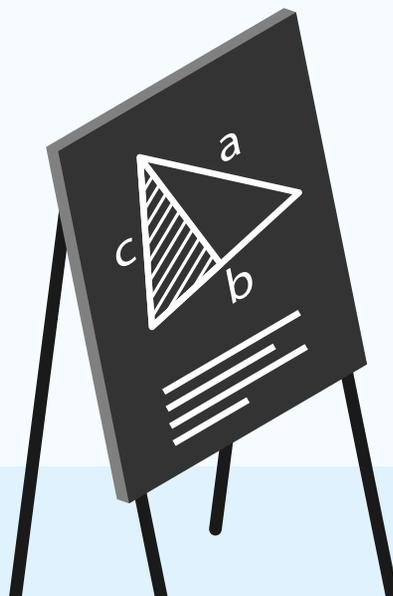
【傳統教學設計】（劉溢庭）

教學活動 1：複習全等三角形有關的知識：

1、全等三角形的定義：能夠完全重合的兩個三角形是全等三角形。

2、全等三角形的性質：全等三角形的對應邊相等、對應角相等。

3、全等三角形的判定：判定定理有SSS，SAS，ASA及其推論AAS。直角三角形中還有HL。



教學活動 2：問題引入

如圖 1 所示， $\triangle ABC$ ， $\triangle DEF$ 都是直角三角形，
 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ 。已知 $AB = DE$ ， $AC = DF$ 。

根據以上條件，能否判斷 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ？

若能，為甚麼？若否，為甚麼？

【答】這是 SSA，一般來說 SSA 不能判斷兩個三角形全等。但對於直角三角形，會否能判定它們全等呢？為了解決這個問題，我們用 PG_Lab 作圖，看它們是否全等。

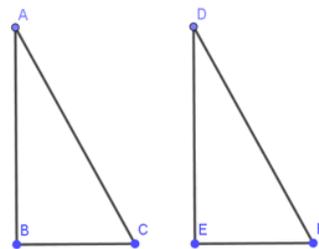


圖 1

教學活動 3：數學探究

教師利用 PG_Lab 作 $Rt \triangle ABC$ ，在其他地方作出一個直角 $\angle DEF$ ，則有 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ （圖 2）。

以 E 為圓心， AB 長為半徑作圓， $\odot E$ 與 DE 相交於 G 。則有 $AB = GE$ （圖 3）。

以 G 為圓心， AC 長為半徑作圓， $\odot G$ 與 EF 相交於 H ，連結 GH ，則有 $AC = GH$ （圖 4）。

利用多邊形工具作 $Rt \triangle GEH$ ，拖動至 $Rt \triangle ABC$ 並旋轉，發現它能與 $Rt \triangle ABC$ 重合（圖 5）。

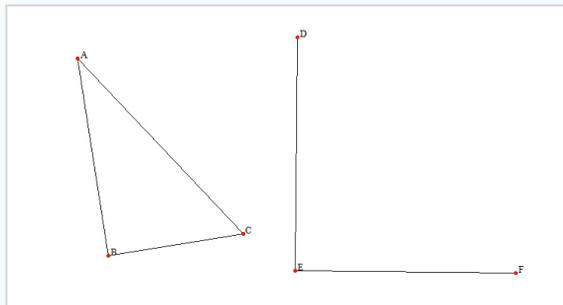


圖 2

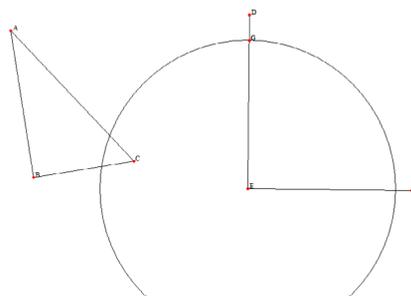


圖 3

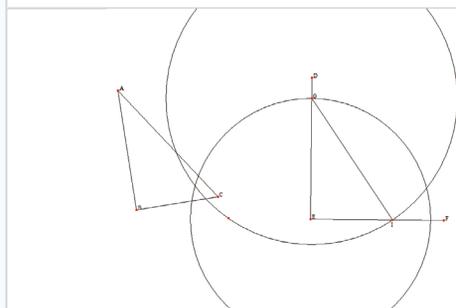


圖 4

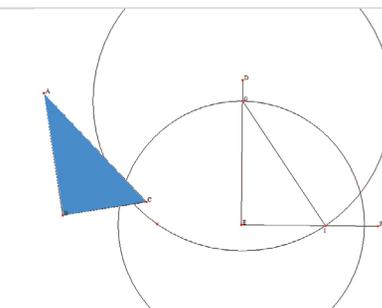


圖 5



得出結論：

兩個直角三角形，如果它們的斜邊與一條直角邊分別對應相等，它們就全等。這個判定定理稱為斜邊 - 直角邊判定定理，簡稱為 HL（H 是斜邊 hypotenuse 的首字母，L 是直角邊 leg 的首字母）。

所以，在前面 4 個判定定理之外，直角三角形還多一個判定定理 HL。

教學活動 4：例題講解。

如圖 6 所示。 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB=AC$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的高。

求證： $BD=DC$ 。

分析：要證 $BD=DC$ ，只需證 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。因為 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，所以 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 都是直角三角形。又因為 $AB=AC$ ， AD 是公共邊，由 HL 可得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。[證明過程略]

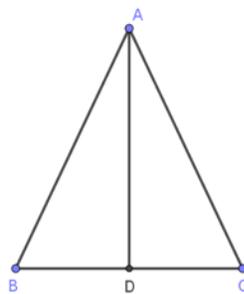


圖 6

教學活動 5：課堂練習。

1. 如圖 7 所示。 $AB \perp BC$ ， $AD \perp DC$ ， $AB=AD$ 。求證： $BC=CD$ 。
2. 如圖 8 所示。 $BC \perp AD$ ， $EF \perp AD$ ， $AC=DF$ ， $AE=BD$ 。求證： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。
3. 如圖 9 所示。 $AD \perp DC$ ， $BD=CD$ 。求證： $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。

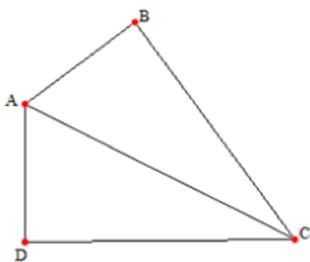


圖 7

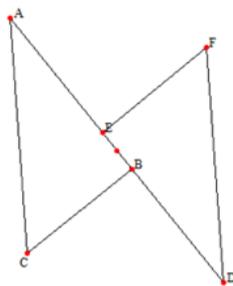


圖 8

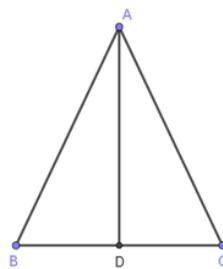
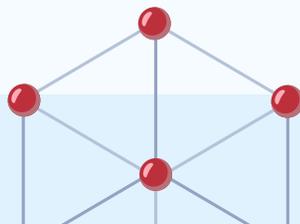


圖 9

設置練習題 3 的目的是讓學生瞭解到直角三角形全等的判別也可以用之前所學的一般三角形全等的判定定理。



教學活動 6：小結、佈置作業。

作業是繼續完成堂上練習並補加如下兩題。

作業補充題：

1、如圖 10 所示。E 為 AB 中點， $AC \perp AB$ ， $BD \perp AB$ ， $CE=DE$ 。

求證： $\triangle AEC \cong \triangle BED$ 。

2、如圖 11 所示。C, D 是 AB 上的兩點使得 $AC=DB$ 。作 $EC \perp AB$ ， $DF \perp AB$ ， $AF=BE$ 。求證： $\angle E = \angle F$ 。

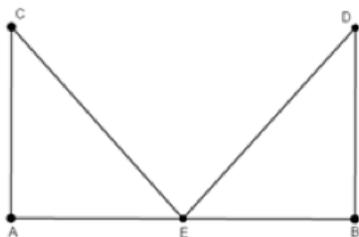


圖 10

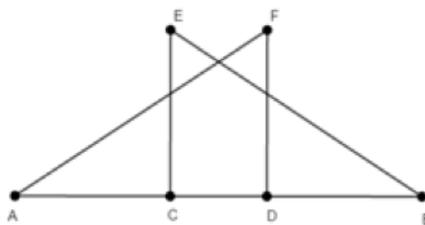


圖 11

【實驗教學設計】（陳穎枝）

教學活動 1: 以如下三個問題複習舊知並提出本節課要探討的問題。

Q1、判定兩個三角形全等的方法有哪些？

（SSS、SAS、ASA 及其推論 AAS）。

Q2、回顧直角三角形的邊角名稱和相關性質。在圖

12 中， $\angle B = 90^\circ$ ，AC 是斜邊，AB 和 BC 是直角邊。H 是 *hypotenuse*（斜邊）的縮寫，L 是 *leg*（直角邊）的縮寫。

Q3、對於兩個直角三角形，除了直角相等的條件，還要滿足甚麼條件，它們就可以全等？（複習故知，將兩個直角三角形全等的判定放在一般三角形全等的判定條件大背景下，讓學生認識到直角三角形全等的判定也能用已學的判定定理。）

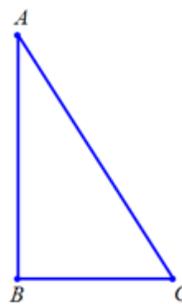
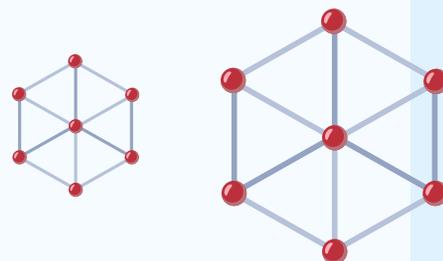


圖 12





直角和兩直角邊	直角、一銳角和一邊		直角、一直角邊，斜邊
SAS	ASA	AAS	HL (思考)

【評：這裏讓學生將已知標到附帶的圖形中，以促進學生的理解與記憶。】

教學活動 2: 探究並發現判定兩個直角三角形全等的特殊方法“HL”

Q4、如果兩個直角三角形的斜邊和一條直角邊分別對應相等，它們全等嗎？思考如何用 PG_LAB 作圖。

對這個問題的探究，我們分三步實驗來完成。

實驗步驟一：任作一直角 $\triangle ABC$ ，再作一個與 $\triangle ABC$ 的斜邊和一條直角邊分別對應相等的直角三角形（圖 13）。

1. 用工具 作直角 $\triangle ABC$ ；
2. 用工具 作 $DE=AB$ ；
3. 用工具 過點 E 作 DE 的垂線；
4. 用工具 作 $DF=AC$ ；
5. 用工具 作 $\odot D$ （以 D 為圓心， DF 為半徑）
6. 用工具 作 $\odot D$ 與 DE 的垂線交於點 H 和 G ；
7. 用工具 連結 DH ；
8. 觀察 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEH$ 是否全等。

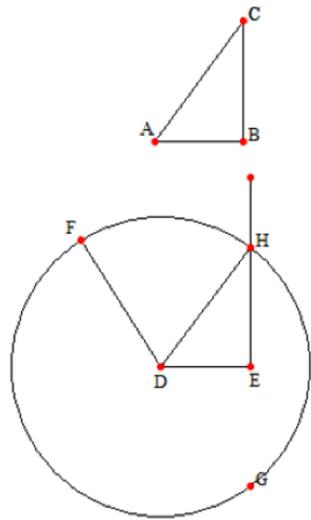
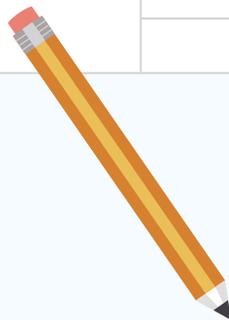


圖 13



實驗步驟二：檢驗 $\triangle DEH$ 與 $\triangle ABC$ 是否重合。

1. 用工具  作 $\triangle DEH$ ，稍為移開，並命名為 $\triangle D'E'H'$ ；
 2. 移動 $\triangle D'E'H'$ ，使其與 $\triangle ABC$ 重合（必要時要用翻轉和設定旋轉中心）。
- 我們發現： $\triangle D'E'H'$ 與 $\triangle ABC$ _____，即 $\triangle DEH$ _____ $\triangle ABC$ 。
 _____ 分別相等的兩個直角三角形全等。

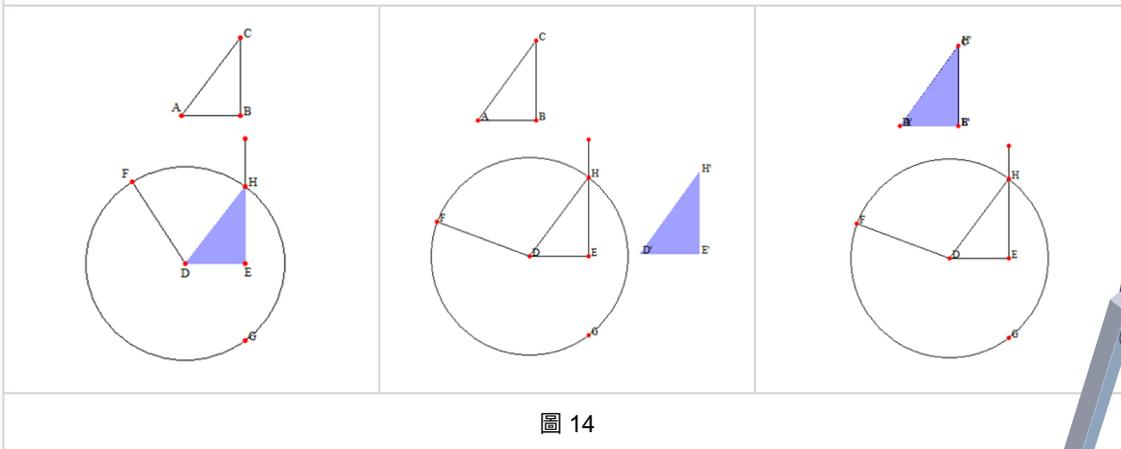


圖 14

老師要留意學生作圖速度，先完成的同學可以幫助其他同學或者嘗試歸納發現，現在進行實驗三檢驗發現。



實驗步驟三：

1. 用工具  隱藏 $\triangle D'E'H'$ ；
2. 任意移動 $\triangle ABC$ 的各頂點或各條邊，使 $\triangle ABC$ 的形狀和大小發生改變。這時， $Rt \triangle DEH$ 的形狀和大小也隨之而改變，並且恒有：在 $Rt \triangle ABC$ 和 $Rt \triangle DEH$ 中，
 _____。
3. 重複實驗二的作法。（為了省時，可以不需要命名 $\triangle D'E'H'$ ）
4. 將 $\triangle D'E'H'$ 旋轉移動，使 $\triangle D'E'H'$ 與 $\triangle ABC$ 重合。
5. 重複上述步驟 1、2、3 若干次。

發現恒有： $\triangle DEH$ _____ $\triangle ABC$ 。

得出結論：_____ 分別相等的兩個直角三角形全等。簡寫成：

“_____” [H 是 *hypotenuse*（斜邊）的縮寫， L 是 *leg*（直角邊）的縮寫]。

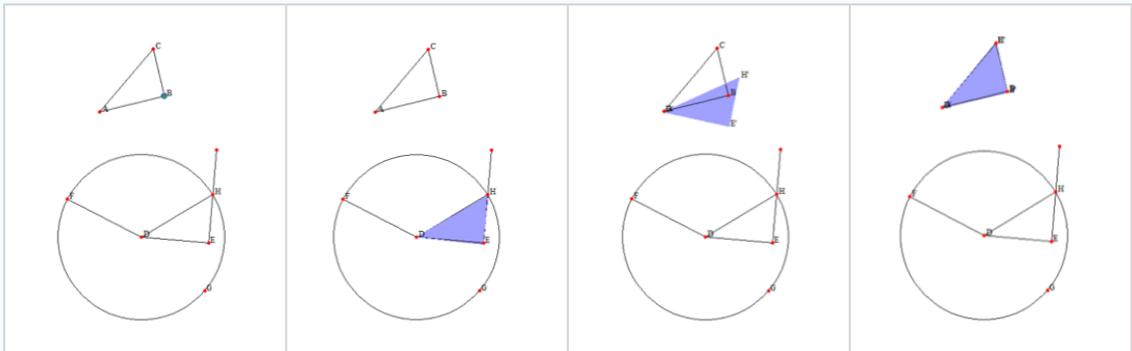


圖 15

教學活動 3：課堂練習。

已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， $AB=AC$ ，

求證： $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。

課後思考：請問在甚麼情況下 SSA 能證明兩個三角形全等？[三角形是直角或鈍角三角形。]

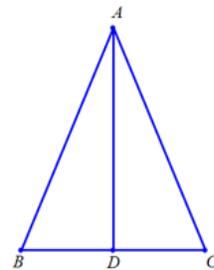


圖 16

功課：如圖 17，已知： $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ， AC 、 BD 相交於 O ， $AC=BD$ 。求證： $OB=OC$ 。

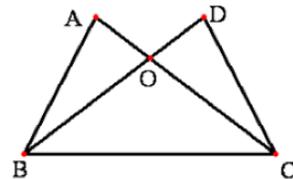


圖 17

【總評】 兩位老師的課採用了兩種完全不同的方法，劉老師採用的是傳統的幾何教學方法，而陳老師採用的是實驗教學法。採用的方法不同，帶來的效果也完全不同。劉老師的課堂上，對 HL 的探究是老師演示實驗完成的，操作流暢順利，還有較多的課堂教學時間來處理定理的應用問題。陳老師的課堂上，對 HL 的探究是以數學實驗的形式，讓學生自己完成的。由於疫情的影響，學生沒有在初一的時候就熟悉 PG_LAB 的作圖，所以有些學生的實驗進行得不是很順利。這時候，簡化實驗的步驟就顯得十分有必要。在實驗步驟一完成後，可以讓學生觀察 $\triangle DEH$ 與 $\triangle ABC$ 是否全等。

如何檢驗兩個三角形是否全等，可以根據三角形全等的定義，採用重合的方法，也可以用前面複習過的方法，如測量圖 13 中的 BC 和 EH ，看他們是否相等，再根據 SAS 判斷 $\triangle DEH$ 與 $\triangle ABC$ 是否全等。當然，也可以根據 SSS 來判斷。如果用動態測量來判斷，實驗步驟三改變 $\triangle ABC$ 的形狀和大小時， BC 和 EH 的長度會動態變化，我們總能得到 $\triangle DEH \cong \triangle ABC$ 。

實際上，直角三角形的 HL 判定定理，是一種特殊的 SSA 。不僅在直角三角形中，有 SSA 成立，在鈍角三角形中也有 SSA 成立，即如果兩個鈍角三角形的鈍角相等，則有 SSA 成立。

另外，對直角三角形來說，不僅有 HL ，還有 SAS 。 HL 表明，當我們確定了直角三角形的斜邊和直角邊的長度時，另外一條直角邊的長度隨之被確定； SAS 表明，當我們確定了直角三角形的兩條直角邊的長度時，斜邊的長度也隨之被確定。直角三角形的兩直角邊和斜邊的長度之間是否有某種神奇的關係呢？會是甚麼呢？（答案：畢氏定理）

數學實驗教學可以培養學生的探究能力、創新思維能力等，實驗設計對師生的挑戰也很大，需要不斷反思、總結和完善。在韋輝梁副校長的帶領下，培道中學的數學實驗教學已經讓一屆又一屆的學子受益，讓我們攜起手來，共同進步。 

劉溢庭 陳穎枝 金鑫

培道中學教師

江春蓮

澳門大學教育學院助理教授

