

# 概率如何教？ ——以《用列舉法求概率》一節為例

文·圖 | 江春蓮 柳芳

進入本世紀初，概率統計內容終於成為了中小學數學的四大內容之一，與之相對應的能力是統計觀念（中華人民共和國教育部，2001），在2011年版的課程標準中表述為數據分析觀念（中華人民共和國教育部，2011）。概率與統計都是研究隨機現象的學科，但統計研究的對象是從現實世界收集到的數據，而概率則是隨機現象呈現出的統計規律性，所以中小學的概率教學需要以概率實驗為基礎，採取實驗“前——中——後”三個步驟來進行教學（Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2019），即：

- 實驗前：預測事件發生的概率；
- 實驗中：通過實驗探究事件發生的概率；
- 實驗後：分析實驗結果，確定事件發生的概率。

在筆者看來，跟概率更密切聯繫的是推理能力。實驗前，根據經驗和已有的概率知識預測待研究事件的概率；實驗中，通過實驗獲得實驗數據，並運用統計工具分析表徵數據；實驗後，則可將實驗前的預測與實驗得到的數據進行對比，看兩者的相關程度，程度高則肯定實驗前的預測；程度低則分析差異產生的原因，做出新的符合實驗數據的推測。

在初三《用列舉法求概率》一節，主要講了兩種列舉法，即列表法和樹狀圖法。人教版（2013）教材是先講列表法，再講樹狀圖法；而北師大版（2014）的教材則是兩個方法一起講。例題的情境，人教版依次是“掃雷”遊戲→兩枚硬幣→兩個分別寫有數字1-6的骰子→三個裝有同樣小球的口袋；而北師大版的教材則是兩枚硬幣→“石頭——剪

刀——布”遊戲→轉盤“配紫色”遊戲。人教版使用的情境及呈現方式都比較經典簡練；北師大版則新舊結合，略有新意。下面我們將以擲兩枚硬幣為情境、樹狀圖法為例說明如何創造性地使用概率教學的三個步驟設計概率的教學。

### 實驗前：預測事件發生的概率

在這一步，北師大版的教材創設了一個遊戲的情境，即以擲兩枚硬幣得到的結果確定三人中誰會得到僅有的一張電影票：(a)兩枚硬幣全部正面朝上，小明獲勝；(b)兩枚硬幣全部反面朝上，小穎獲勝；(c)一枚硬幣正面朝上，一枚硬幣反面朝上，小凡獲勝。問該遊戲公平嗎？

這裡，如果讓學生預測事件發生的概率，學生可以假設這三個事件發生的概率相等，即均為 $\frac{1}{3}$ 。

### 實驗中：通過實驗探究事件發生的概率

在這一步，北師大版的教材建議先分組實驗，然後累計各組的實驗數據，分別計算三個事件發生的頻數與頻率，並由此估計這三個事件發生的概率。

筆者建議，實驗這一步分兩步來做。先是每組（3個人：一人擲，一人讀結果，一人記錄）擲20次，並在下面的表1中記錄前述(a)、(b)、(c)三個事件發生的頻數；接着是將各組的數據匯總到表2中，估計三個事件發生的相對比例，即(a)、(b)、(c)三個事件發生的頻數之比，大概為1：1：2。

表 1：擲兩枚硬幣出現正反面情況頻數記錄表（分組用）

三種情況	劃記（寫“正”字）	頻數	百分比
(a)兩枚硬幣全部正面朝上			
(b)兩枚硬幣全部反面朝上			
(c)一枚硬幣正面朝上、 一枚硬幣反面朝上			

表 2：擲兩枚硬幣出現正反面情況頻數記錄表（匯總用）

三種情況	頻數								百分比
	G1	G2	G3	G4	...	...	Gn	總	
(a)兩枚硬幣全部正面朝上									
(b)兩枚硬幣全部反面朝上									
(c)一枚硬幣正面朝上、 一枚硬幣反面朝上									

### 實驗後：分析實驗結果，以確定事件發生的概率

根據第二步的實驗資料，我們得出(a)、(b)、(c)三個事件發生的實驗概率依次為 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。為甚麼會出現這樣的情況呢？有學生可能會說，那是因為“一正一反”可以由兩種情況產生，第一枚硬幣正面第二枚硬幣反面、第一枚硬幣反面第二枚硬幣正面。而另外兩種情況只能由一種情況產生。

此時，老師可以引導學生把同時擲兩枚硬幣分解成兩個步驟來完成，並用樹狀圖（圖1）來表示。先擲第一枚，可以出現正、反兩種情形；再擲第二枚，也可以出現正、反兩種情形。

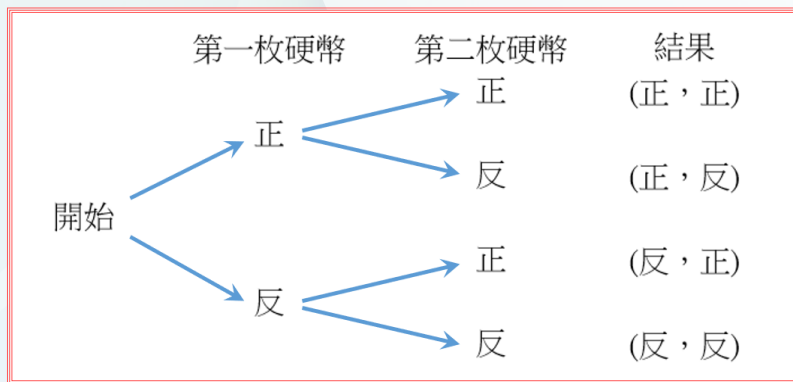


圖 1：擲兩枚硬幣的樹狀圖表示

至此，一般已經可以得出結論了，但作者覺得，得出結論需要基於右邊四種結果的概率相等（即擲兩個硬幣彼此相互獨立）的假設，而這個對於學生來說並不是顯而易見的，所以需要進一步用實驗驗證。

## 再次實驗：用實驗數據檢驗事件發生的概率

這裡仍然可以按3人一組，兩人擲，一人擲第一枚硬幣，另外一人擲第二枚硬幣；一人記錄。擲40次，並在下面的表3中記錄四個事件發生的頻數；接着是將各組的數據匯總到表4中，估計四個事件發生的相對比例，大概各佔25%。

表3：擲兩枚硬幣正、反面情況頻數記錄表（分組用）

第一個硬幣	第二個硬幣	劃記（寫“正”字）	頻數	百分比
正	正			
正	反			
反	正			
反	反			

表4：擲兩枚硬幣出現正反面情況頻數記錄表（匯總用）

四種情況	頻數								百分比
	G1	G2	G3	G4	...	...	Gn	總	
(a) (正，正)									
(b) (正，反)									
(c) (反，正)									
(d) (反，反)									

注：(正，反)表示第一枚硬幣出現正面，第二枚硬幣出現反面，其餘類推。

當然，學生實驗完後，我們也可以借助Excel或網路資源，做類似的實驗，得到樣本數量更多的實驗結果，以驗證事件發生的概率的推理的合理性。


## 得出結論

最後，我們需要對擲兩枚硬幣的三個事件(a)、(b)、(c)的概率做出結論，而且要明白是根據兩個隨機事件的相互獨立性得出來的。

我們也可以用列表法列出所有情況，從而求出所有事件的理論概率。

	第二枚硬幣		
第一枚硬幣		正	反
正		(正, 正)	(正, 反)
反		(反, 正)	(反, 反)

這裡的列表與人教版教材上擲兩個骰子的列表略有不同，人教版是採用坐標系的方法，而這裡採用的是類比行列式的下標排列方式，行前列後。

這裡的設計，我們不僅採用了國際上常用的實驗“前——中——後”的概率教學流程，更對實驗後的樹狀圖假設用實驗進行了驗證，排除了學生心裡的疑惑。第二節課可以採用類似的方法進行設計，當學生積累了兩個案例的經驗後才可以應用列舉法求解更多的問題。

### 參考文獻

Van de Walle J.A., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2019). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Pearson.

人民教育出版社(2013)。義務教育教科書數學：九年級上冊。北京：人民教育出版社。

中華人民共和國教育部(2001)。全日制義務教育數學課程標準實驗稿。北京：北京師範大學出版社。

中華人民共和國教育部(2011)。義務教育數學課程標準（2011年版）。北京：北京師範大學出版社。

北京師範大學出版社(2014)。義務教育教科書數學：九年級上冊。北京：北京師範大學出版社。

### 江春蓮

澳門大學教育學院副教授

### 柳芳

深圳市深圳中學初中部高級數學教師