

重生數學興趣：再造數學課堂創造之魂

——以平方差公式 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 的幾個推導數學課為例

文·圖 | 孫旭花

培育愛思考的數學心

呵護受傷的數學靈

再造數學創造之魂

迎接枯木逢春之時

數學興趣培養，是華人教育比較回避的課題，除了奧數課程，似乎沒別的選擇。教大學生更難，因為他們對數學的學習方法已經定型，他們對數學的學習興趣已經定型，他們對自己學習數學的信心已經定型，這該是數學教育的難題中難題。

筆者任教了一門非數學教育專業的數學課，發現大多數學生對數學沒興趣，決定以平方差公式 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 的推導為例，因為各個教材都是把因式相乘 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ 倒過來，就得到 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 。如何改變現狀呢？

這裡是筆者一次小的嘗試。上課時，發給學生問題，進行因式分解原理的“一題多解”訓練，用自己多個方法推導 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ，可以繪圖解釋，努力思考，打破自己的界限。

開始時，教室靜悄悄，有些學生還在翻筆記，希望過去知識啟發他們，有些學生動筆演算，有些學生動筆繪圖，半個小時過去了，教室有點熱鬧起來，很多學生臉上有了會心的微笑，一些學生得意洋洋，按捺不住內心的喜悅，舉手讓筆者看看他的解法是否

具創意，筆者見時機成熟，便讓對那些怕數學、較少發言的同學，先到黑板寫出並講解他們的解法，並以他們的名字命名解法，然後，不斷要求其他學生給出不同於黑板上方法的新方法。

學生的方法如下：

平方差 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

展開法

梅法 $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

則 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

補項法

霞法

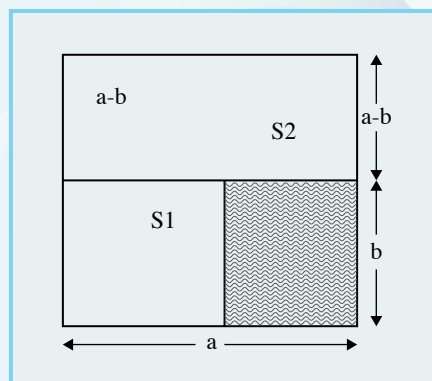
$a^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - b^2 = (a-b)^2 + 2b(a-b) = (a-b)(a-b+2b) = (a-b)(a+b)$

麗法

$a^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 - b^2 + 2ab = (a-b)^2 + 2b(a-b) = (a-b)(a-b+2b) = (a-b)(a+b)$

圖像法（一）

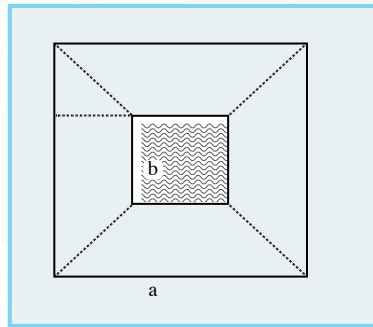
瑜法



$S = S_{\text{大矩形}} - S_{\text{小矩形}} = a^2 - b^2 = S1 + S2 = a(a-b) + b(a-b) = (a-b)(a+b)$

圖像法 (二)

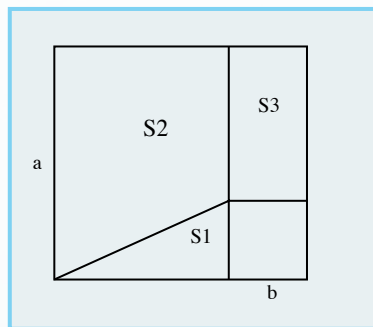
欣法



$$a^2 - b^2 = 1/2(a+b) \times 1/2(a-b) \times 4 = (a-b)(a+b)$$

圖像法 (三)

少法



$$a^2 - b^2 = S1 + S2 + S3$$

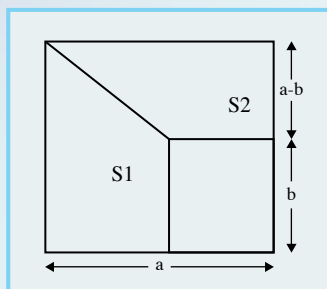
$$S1 = 1/2b(a-b)$$

$$S2 = 1/2(a+a-b)(a-b)$$

$$S3 = b(a-b)$$

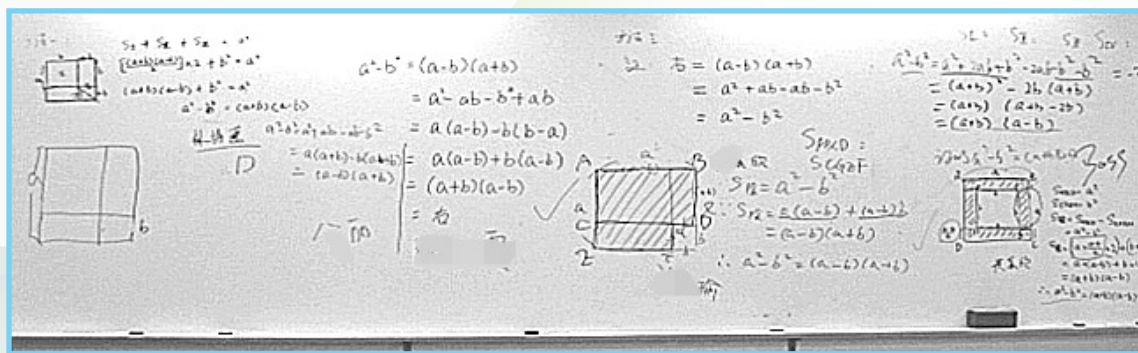
$$a^2 - b^2 = S1 + S2 + S3 = 1/2b(a-b) + 1/2(a+a-b)(a-b) + b(a-b) = (a-b)(a+b)$$

詩麗法



$$a^2 - b^2 = S1 + S2 = 1/2(a+b)(a-b) \times 2 = (a+b)(a-b)$$

學生證明見下列白板：



最後，學生沒有使用找因式法，這是高等數學的方法，筆者直接講解。

當 $a=b$ 時， $a^2 - b^2 = 0$ ，說明 $a^2 - b^2$ 分解後有一個因式 $a-b$

當 $a=-b$ 時， $a^2 - b^2 = 0$ ，說明 $a^2 - b^2$ 分解後有一個因式 $a+b$

所以 $a^2 - b^2$ 分解後有一個因式 $a-b$ 和 $a+b$

假設 $a^2 - b^2 = k(a-b)(a+b)$

則 $k=1$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

幾點反思：

打破自己的界限。筆者意識到那些能力不高的學生，竟然有自己的方法，這些方法有不平凡的創造力——這些證明顯然不同於教材，豐富了平方差的證明內涵。特別看到能力弱學生，也能把握了因式分解的精髓，也能體驗數學創造之魅力。筆者發現大學生對數學學習方法定型，仍然還可以打破自己的界限，仍然有枯木再逢春的可能性。

呵護一顆受傷的數學心。慢學生應該得到特別尊重，即使方法不夠新穎，應該表揚他們打破自己的界限，新生數學興趣的嫩芽，值得呵護，即使和基礎好的學生比，解法不夠漂亮，步子慢，但畢竟是**自己的**第一步，卻是個人數學成長歷史上非常的重要的轉機之時。數學課堂應營造一種鼓勵氛圍，採用**自己和自己昨天比**的比較機制，關注學生個人**自己的長進**。


永遠相信。雖然這裡大一數學成績都是較差學生，他們堅信記好筆記，是學習數學好方法，但筆者還是永遠相信，每個人都是數學天才，而且他們看數學的角度是不同的，學習數學過程更曲折，需要更多的時間，對數學發現更慢，而他們數學知識的豐富多彩之處，卻構成了班級群體的創意。

打破興趣迴圈的公式。波利亞說過，自己對數學沒興趣，不可能培養出對數學有興趣的學生。筆者這裡概括一下打破這個迴圈的可能公式：

重生數學興趣=學生意識到自己的創造力（學生建構的一題多解）+更多鼓勵+更多時間

這其中關鍵的問題是學生意識不到自己的創造力。教學需要留給學生更多嘗試的空間，更多的耐心，需要更多時間，基礎不夠好的學生，更需要讓學生意識到自己的創造力，打破自己的局限，才有重生數學興趣的基礎。

捨得給“思考”時間。以往數學教學有個誤區，不捨得給“思考”時間，課堂“思考”時間總有點覺得浪費，不夠有效率，教是為了不教，教學如何還原學生的創造力是根本，教學如何激發學生數學創造興趣，就是貼近了數學教學最高境界。

公式的證明。許多老師一般會跟着教材思路，證明公式，許多學生記憶公式，套公式，極少獨立探索多個方法證明，公式的多種證明，反而成為極少探索的“禁區”，也說明公式的多種證明值得深入探索。

孫旭花

■ 澳門大學教育學院助理教授