

充分利用幾何圖形的特點， 發展學生的觀察能力和交流能力 ——以《圓與圓的位置關係》為例

文 | 盧有仔 吳少潔 江春蓮

“圖形與幾何”是義務教育階段數學課程的四大內容之一，其在培養學生的空間觀念、幾何直觀和推理能力等方面都發揮着重要的作用（中華人民共和國教育部，2011）。《圓》是初三幾何的重要章節，其主要涉及與圓相關的概念（如：弦、圓弧、圓心角、圓周角等）、垂徑定理、同弧所對的圓周角與圓心角之間的關係、點與圓、直線與圓和圓與圓的位置關係等（人民教育出版社課程教材研究所、中學數學課程教材研究開發中心，2015）。劉淑榮和江春蓮（2015）曾撰文探討過如何利用表徵幫助學生建構點與圓、直線和圓的位置關係之間的聯繫；在本文中，我們將探討如何運用幾何圖形的特點，幫助學生形成圓與圓之間位置關係特徵的連續概念意象（Tall & Vinner, 1981），培養學生的觀察能力和交流能力。

圓與圓的位置關係包括外離、外切、相交、內切、內含五種情況（表1），其中外離

表1：圓與圓的五種位置關係圖示及其特點

	圖示 1	圖示 2	圖示 3	交點個數	$d=O_1O_2$ 與 $r_1、r_2$ 之間的關係	公切線條數
a) 內含				0	$d < r_1 - r_2 $	0
b) 內切				1	$d = r_1 - r_2 $	1
c) 相交				2	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2
d) 外切				1	$d = r_1 + r_2$	3
e) 外離				0	$d > r_1 + r_2$	4

和內含是相離（即交點個數為0）的兩種情況，外切和內切是相切（即交點個數為1）的兩種情況。人教版教材上畫出了表1圖示1列的5種圖形和同心圓的情形。

在進行該部分內容的教學時，我們可以設計如下五個教學活動。

【活動1】動畫演示，得到五種典型的情形

開始上課時，我們可以通過動畫呈現兩圓（一般是一大一小）的位置關係，可以從同心（內含）到外離，也可以從外離到同心，得到表1圖示1列的五種不同狀態及其對應的兩圓交點的個數。

在動畫演示的過程中，我們還可以讓學生總結在此過程中，哪些量沒有變（兩圓的大小沒有變，即兩圓的半徑沒有變），哪些量有改變（兩圓的位置關係有改變，而這種改變是由一個圓的移動來完成的，圓的移動由圓心的移動所確定，因此動畫過程中改變的只是圓心之間的相對距離）。

【活動2】探究圓心距 $d=O_1O_2$ 與 r_1 、 r_2 之間的關係

在過渡到探究圓心距 d 與 r_1 、 r_2 之間的關係前，我們可以讓學生觀察表1圖示1列的圖形的特點。其最顯著的特點是對稱性，即全部都是軸對稱圖形，對稱軸為過兩圓圓心的直線 O_1O_2 。

在探究圓心距 d 與 r_1 、 r_2 之間的關係時，我們可以從兩種相切的情形入手。

當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相外切時，兩圓相切於點 P （表1-外切-圖示2），此時有：

$$d=O_1O_2=O_1P+PO_2=r_1+r_2.$$

當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相內切時，兩圓相切於點 P （表1-內切-圖示2），此時有：

$$d=O_1O_2=O_1P-PO_2=r_1-r_2.$$

接着可以探究兩圓相離的情形。當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相外離時，設直線 O_1O_2 與 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分別相交於點 P 、點 Q （表1-外離-圖示2）。此時有：

$$d=O_1O_2=O_1P+PQ+QO_2=r_1+PQ+r_2>r_1+r_2.$$

當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相內含時，設直線 O_1O_2 與 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分別相交於點 M 、點 N （表1-內含-圖示2）。此時有：

$$d=O_1O_2=O_1N-O_2N<O_1M-O_2N=r_1-r_2.$$

最後，探究兩圓相交的情形。當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交時，設 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交於 P 、 Q 兩點

(表1-相交-圖示2)，連 O_1P 、 O_2P 得到 $\triangle O_1PO_2$ ，在該三角形中有：

$$r_1 - r_2 = O_1P - PO_2 < O_1O_2 < O_1P + PO_2 = r_1 + r_2.$$

我們的例子中是 $\odot O_1$ 的半徑比 $\odot O_2$ 的半徑長，而實際上，也可以是 $\odot O_1$ 的半徑比 $\odot O_2$ 的半徑短，所以上述不等關係中需要給 $r_1 - r_2$ 加絕對值符號。

【活動3】新知應用1

Q1. 已知兩圓半徑分別為3cm和5cm，

- 圓心距為1cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為2cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為3cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為4cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為5cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為6cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為7cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為8cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為9cm時，兩圓的位置關係是_____。
- 圓心距為10cm時，兩圓的位置關係是_____。

Q2. 已知 $\odot O_1$ 的半徑為5釐米， $\odot O_2$ 的半徑為6釐米， $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相切，則兩圓圓心之間的距離 O_1O_2 為_____釐米。

Q3. 已知 $\odot O_1$ 的半徑為20釐米， $\odot O_2$ 的半徑為10釐米。若 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交，則兩圓圓心之間的距離 O_1O_2 應滿足的關係是_____。若 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相離，則兩圓圓心之間的距離 O_1O_2 應滿足的關係是_____。

說明：第一個問題是根據圓心距判斷兩圓的位置關係；後面的兩個問題則是根據位置關係確定圓心距 d 應滿足的條件，因為相切和相離都有兩種不同的情形，所以學生可能會漏掉其中的一種情況。第一個問題用問題串的形式，讓學生（特別是數學能力比較弱的學生）可以自己總結歸納出以 $|r_1 - r_2|$ 和 $r_1 + r_2$ 為界區分內含、相交和外離三種情形。

【活動4】探究五種情形下公切線的條數

儘管人教版的教材上沒有關於公切線的內容，我們仍然可以在後面給學有餘力的同學探究學習，甚至可以讓學生在作出公切線後研究切點和圓心圍成的多邊形的特點。如在兩圓相外切時， O_1ABO_2 是直角梯形（圖1），且 $O_1A=O_1P=r_1$ ， $O_2B=O_2P=r_2$ 。過點 P 的切線與 AB 的交點 C 也有很有趣的結論： $PC=AC=BC$ ， $\angle O_1CO_2=90^\circ$ 。這兩個結論可以由切線長定理得到。

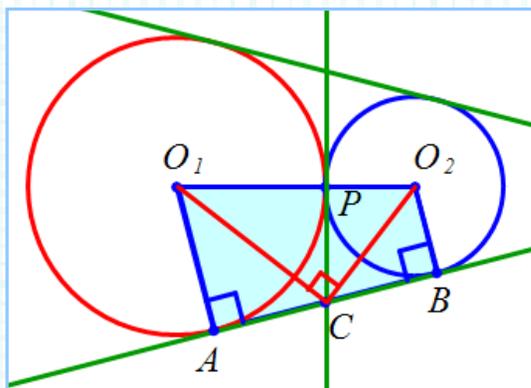


圖 1：外切兩圓

在探究公切線的條數時，我們依然可以從相切的兩種情形入手。當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相外切（表1-外切-圖示3）時，過切點 P 垂直於 O_1O_2 的直線是它們的一條公切線。除此之外，在 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 外還有兩條，這個結論需要給學生一點時間討論得到。當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相內切時，它們只有過切點 P 垂直於 O_1O_2 的一條公切線（表1-內切-圖示3）。

當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相外離時，外面的兩條切線依然存在，還增加了內部的兩條切線（表1-外離-圖示3）。當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相內含時，小圓的所有切線與大圓總有兩個交點，所以此時沒有公切線（表1-內含-圖示3）。

當 $\odot O_1$ 與 $\odot O_2$ 相交時，僅剩外面的兩條切線（表1-相交-圖示3）。

表1中我們用三列圖示展示了隨着討論的深入，圖形逐漸豐富的過程。

【活動5】新知應用2

因為公切線的條數跟兩圓位置關係的5種情況是一一對應關係，所以我們可以讓學生

將下表補充完整（工作紙上的行距需要留寬一點）：

題號	兩圓的位置關係	公切線條數	d 與 r_1 、 r_2 之間的關係	圖示
1.	內含			
2.		3		
3.	內切			
4.		2		
5.	外離			

【總評】本世紀初的課程改革後，在人教版的教材上，《圓與圓的位置關係》只有一頁多的篇幅，內容主要是五種位置關係和圓心距 d 與 r_1 、 r_2 之間的關係，甚至沒有配備練習題。為此，澳門很多學校沿用舊的人教版教材的設計，用1節課的時間來教授這部分內容。這部分內容圖形特點明顯，給學生提供了豐富的學習機會，可以讓學生結合圖形進行觀察、添加輔助物件（如表1-相交-圖示2中的三角形）進行探究，形成深刻的概念意象；與此同時，培養學生的幾何表達能力。（江春蓮）

參考文獻

中華人民共和國教育部（2011）。義務教育數學課程標準（2011年版）。北京：北京師範大學出版社。

人民教育出版社課程教材研究所、中學數學課程教材研究開發中心（編著）（2015）義務教育教科書數學九年級上冊。北京：人民教育出版社。

劉淑榮，江春蓮（2015）。甚麼樣的表徵有利於學生的數學學習？以點和圓，直線和圓的位置關係為例。《教師雜誌》，49，62-65。

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>.

盧有仔

雷鳴道主教紀念學校教師

吳少潔

聖公會（澳門）蔡高中學教師

江春蓮

澳門大學教育學院副教授