2018/2019 學年教學設計獎勵計劃

函數的單調性, 奇偶性和反函數

參選類型：教案

參選編號：C086

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高一

簡介

函數的基礎知識在數學和其他許多學科中有著廣泛的應用，函數與代數、方程、不等式、三角函數、數列的內容關係非常密切，是進一步學習數學的重要基礎知識。正因如此，深刻理解和掌握函數(原函數, 反函數)的概念及其性質(單調性, 奇偶性, 周期性)是學好函數的關鍵。

為了培養學生的思維能力及解決問題的能力，讓學生能更好地、更感興趣地學習數學，我們在教學設計上運用了情境引入、猜想問題等方式，培養學生由感性到理性的觀察思維能力。也加插了相關的教學影片，讓學生更容易理解函數圖像，豐富了學生的學習方式，改進學生學習概念性知識的方法。

函數的單調性是一個重要內容，實際上，在初中學習函數時，已經重點研究了一些函數的增減性，只是當時的研究未能明確給出有關函數增減性的定義，主要是根據觀察圖像得出。而本教學內容，正是初中有關內容的深化、提高：給出了函數在某個區間上是增函數或減函數的定義，明確指出函數的增減性是相對於某個區間來說，還說明判斷函數的增減性可從圖像上進行觀察的簡略的方法或根據其定義進行證明的較為嚴格的方法，讓學生能從不同的角度思考，加強學生對函數圖像的觀察力和函數單調性的理解。

奇偶性是函數的基本性質之一，與函數的單調性有著密不可分的關係。我們從一些對稱圖像開始引入課題，潛移默化地引導學生思考判斷函數的單調性的方法，其實是可以從圖像、運算或定義去判斷函數的單調性。但是要先判斷函數定義域是否關於原點對稱，因此要找出 $f(x)$ 與 $f(-x)$ 的關係，再從定義中下結論。

反函數是函數中的一種特殊現象，這一節課是在學習了函數的對應和映射等概念的基礎上，研究兩個既互相對立又互相統一的變量的辨證關係。從前後內容來看，它既是映射和函數概念的延

伸，又是今後學習指數函數、對數函數和反三角函數的基礎;起到承上啟下的作用，所以弄清函數與其反函數的關係，是正確理解反函數概念必不可少的重要環節。由於在學習過程中，學生對於反函數與原函數之間的關係容易產生錯誤的認知，老師必須使學生認清反函數的實質，才能使學生接受概念並對反函數的存在有正確的認識。因此，我們在教學設計中，通過對具體例子的求解，不但要使學生掌握求反函數的方法步驟，並有意識地闡明函數與反函數的關係，深化了學生對概念的理解和掌握。

目次

教學進度表

授課時間（年-月-日）	節數	課節	課題名稱	課題內容	課時（分鐘）
2018 年 10 月 10 日	1	第一課節	函數的性質(單調性)	理解函數單調性的定義；理解函數單調性質與圖像的關係	40
2018 年 10 月 11 日	1	第二課節	函數的性質(單調性)	結合增減函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題	40
2018 年 10 月 12 日	1	第三課節	函數的性質(奇偶性)	理解函數奇偶性的定義；理解函數奇偶性質與圖像的關係	40
2018 年 10 月 12 日	1	第四課節	函數的性質(奇偶性)	結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題	40
2018 年 10 月 15 日	1	第五課節	反函數	理解反函數的概念；理解函數與反函數的圖像關係	40
2018 年 10 月 16 日	1	第六課節	反函數	會求一些簡單函數的反函數	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1. 理解函數單調性的定義；
2. 理解函數單調性的圖像性質；
3. 能結合增減函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題；\
4. 通過實例，使學生體會、理解到函數的最大（小）值及其幾何意義，能夠借助函數圖像的直觀性得出函數的最值。
5. 理解函數奇偶性的定義；
6. 理解函數奇偶性的圖像性質；
7．能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題；
8. 通過具體函數，讓學生經歷奇函數、偶函數定義的討論，體驗數學概念的建立過程，培養其抽象的概括能力。
9．在經歷概念形成的過程中，培養學生歸納、抽象概括能力，體驗數學既是抽象的又是具體的，滲透數形結合的數學思想。
10. 理解反函數的概念；
11. 理解函數與反函數的圖像關係；
12．會求一些簡單函數的反函數；
13．通過聯繫實際問題，在嘗試，探索求反函數的過程中，深化對概念的認識，總結出求反函數的一般步驟、加深對函數與方程、數形結合以及有特殊到一般等數學思想方法的認識。
14．完善學生思維的深刻性，培養學生的逆向思維能力，用辯證的觀點分析問題，培養抽象概括的能力。

二、主要內容

函數的單調性和函數的奇偶性都是關於函數的一般性質，研究的方法都是借助函數的圖像直觀地給出結論。

在本教學內容主要分為六個課時:

第一課時主要從觀察函數圖像的特性，理解函數單調性的概念;

第二課時主要是結合增減函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題；

第三課時主要是從函數圖像的對稱性，理解函數奇偶性的概念；

第四課時主要是結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題；

第五課時主要是運用函數圖像和映射關係，理解和研究函數的性質;

第六課時主要是理解反函數的概念，學會求反函數。

三、設計創意和特色

1) 教學設計簡單直接，盡可能不增加學生學習內容負擔。

- 從函數的圖像進行課堂引入，讓學生思考如何用數學符號語言定義增減函數。
- 通過創設情境引入，提高學生的學習興趣及培養學生由感性到理性的觀察思維能力，同時導入新課。
- 將抽象的函數概念轉化為生活化的事物去解析，完善學生思維的深刻性，培養學生的逆向思維能力。

2) 例題設計講究，針對性強，清晰講解例題證明步驟。

- 讓學生即時練習和正確排序證明步驟，增強學生做題的記憶。
- 加入易錯題目，讓同學更好掌握其中內涵
- 數形結合，增強同學對函數奇偶性的理解。

3) 運用多元化教學工具

- 利用投影片的動態變化演示教與學過程，運用圖像幫助學生探究函數性質與圖像的關係。
- 利用板書詳細演示證明步驟，滲透數形結合思想、函數思想。

4) 探究學習

- 安排學生以小組形式討論及探究問題，讓學生經歷奇函數、偶函數定義的討論，體驗數學概念的建立過程，培養其抽象的概括能力，並鼓勵學生能在互動過程中合作學習，帶出實踐性和思考性的數學學習過程。

四、教學重點

1. 函數性質與圖像的關係；
2. 反函數的概念，求反函數；

五、教學難點

1. 函數單調性、奇偶性的證明，用單調性和奇偶性解決相關問題。
2. 求二次函數在指定區間上的反函數。

六、教學用具

PPT，書本，幾何畫板

貳、教案

作品名稱	函數的單調性,奇偶性和反函數	人數	24 人
實施年級	高一	總實施節數	6 節
實施日期	2018 年 10 月 10 日-10 月 16 日	每節課時	40 分鐘
科目	數學	科目每周節數	6 節

日期	節數	課題名稱	教材	教學目標：單元目標	教學目標：基力要求編號	教學內容及活動	教學資源
2018年10月10日至10月16日	6	1. 函數的性質(單調性) 2. 反函數	高中人教版數學第一冊(上)	1. 理解函數單調性的定義； 2. 理解函數單調性的圖像性質； 3. 能結合增減函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題； 4. 通過實例，使學生體會、理解到函數的最大（小）值及其幾何意義，能夠借助函數圖像的直觀性得出函數的最值。 5. 理解函數奇偶性的定義； 6. 理解函數奇偶性的圖像性質； 7·能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題； 8. 通過具體函數，讓學生經歷奇函數、偶函數定義的討論，體驗數學概念的建立過程，培養其抽象的概括能力。 9·在經歷概念形成的過程中，培養學生歸納、抽象概括能力，體驗數學既是抽象的又是具體的，滲透數形結合的數學思想。 10. 理解反函數的概念； 11. 理解函數與反函數的圖像關係； 12·會求一些簡單函數的反函	A—5—6 A—5—7 A—5—8 A—5—9	1. 函數單調性的性質與圖像的關係。 2. 函數單調性的證明。 3. 函數奇偶性的圖像性質。 4. 函數奇偶性的證明。 5. 反函數的概念;函數與反函數的圖像關係。 6. 求二次函數在指定區間上的反函數。	1.PPT 2.書本 3.幾何畫板

				數； 13．通過聯繫實際問題，在嘗試，探索求反函數的過程中，深化對概念的認識，總結出求反函數的一般步驟、加深對函數與方程、數形結合以及有特殊到一般等數學思想方法的認識。 14．完善學生思維的深刻性，培養學生的逆向思維能力，用辯證的觀點分析問題，培養抽象概括的能力。				

教學過程

2.3 函數的性質(單調性)-第一課時

【教學目標】

1. 理解函數奇偶性的定義；
2. 理解函數奇偶性的圖像性質；
3. 能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題；
4. 通過實例，使學生體會、理解到函數的最大（小）值及其幾何意義，能夠借助函數圖像的直觀性得出函數的最值。

【教學重點】函數性質與圖像的關係；

【教學難點】函數單調性、奇偶性的證明，用單調性和奇偶性解決相關問題。

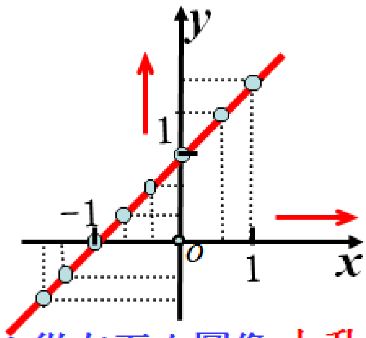
【基力要求】

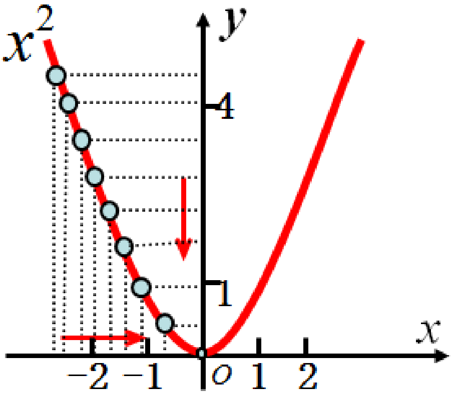
A-5 函數
A-5-6 理解函數單調性概念，能求一些常見函數的單調區間。
A-5-7 理解函數的奇偶性概念，認識奇函數與偶函數的通項特徵。
A-5-8 能運用函數的有關喜志來描述函數的圖像，學會運用函數圖像理解和研究函數的性質。

■ 課堂引入

思考1：畫出下列函數的圖像，根據圖像思考當自變數x的值增大時,相應函數值是如何變化的?

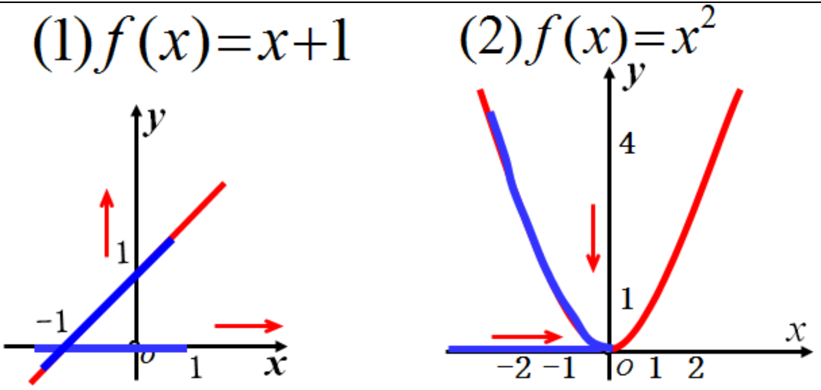
(1) $f(x)=x+1$ (2) $f(x)=x^2$





1.從左至右圖像<u>上升</u>
2.在區間 $(-\infty, +\infty)$上，隨著x的增大，f(x)的值隨著<u>增大</u>

1.$(-\infty,0]$上從左至右圖像<u>下降</u>
當x增大時$f(x)$隨著<u>減小</u>
2.$(0,+\infty)$上從左至右圖像<u>上升</u>，當x增大時$f(x)$隨著<u>增大</u>



思考2：通過上面的觀察，如何用圖象上動點P（x，y）的橫、縱坐標的變化來說明上升或下降趨勢？

函數的這種性質稱為函數的單調性

在某一區間內，

當x的值增大時,函數值y也增大——圖像在該區間內逐漸上升；
當x的值增大時,函數值y反而減小——圖像在該區間內逐漸下降。

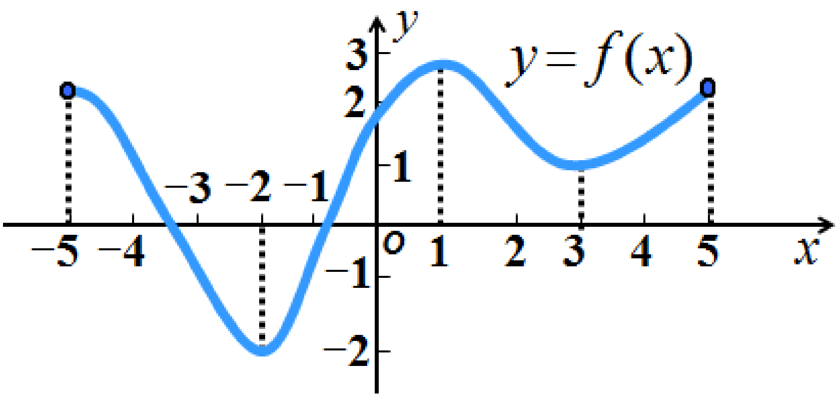
思考 3：如何用數學符號語言定義函數所具有的這種性質？

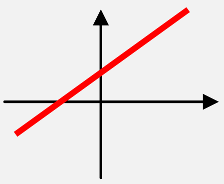
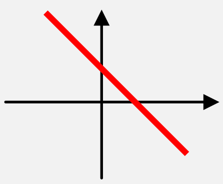
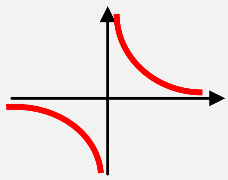
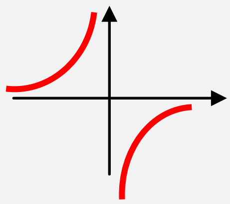
增函數定義：設函數 $f(x)$ 定義域為 I， $\forall\ x_1$， $x_2\in I$，若 $f(x_1)<f(x_2)$ 恒成立，則 $f(x)$ 在區間 I 上稱為增函數。
減函數定義：設函數 $f(x)$ 定義域為 I， $\forall\ x_1$， $x_2\in I$，若 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立，則 $f(x)$ 在區間 I 上稱為減函數。

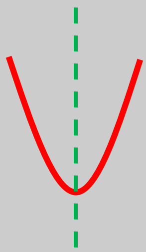
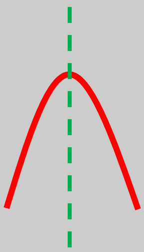
注：1. 我們把函數這種上升、下降的性質統稱“單調性”，可能在某個區間上單調遞增，此時在這一段內函數叫增函數；也可能在另一個區間上單調遞減，在這一段內函數叫減函數。所以函數的單調性是一個局部性質，在整個定義域範圍內可能有所變化。
2. 為什麼定義中出現了任意 $\forall$？改為無數個這樣的 x_1， $x_2\in I$，則 $f(x_1)<f(x_2)$，是否一定要得出是反函數的結論？

■ 例題講解

例 1. 如圖是定義在閉區間[－5, 5]上的函數 $f(x)$ 的圖像， 根據圖像說出函數在哪個區間上是增函數，哪個區間上是減函數？



一次函數 $f(x)=kx+b$		反比例函數 $f(x)=\frac{k}{x}$	
$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
增區間為 R 無減區間	減區間為 R 無增區間	增區間為 $(-\infty,0)$ 和 $(-\infty,0)$ 無減區間	減區間為 $(-\infty,0)$ 和 $(-\infty,0)$ 無增區間
			

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的單調性	
$a>0$	$a<0$
 減區間：$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 增區間：$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 對稱軸 $x=-\frac{b}{2a}$	 減區間：$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 增區間：$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 對稱軸 $x=-\frac{b}{2a}$
注：求二次函數時，1. 要留意二次項系數的正負，2. 要計算對稱軸位置。	

■　例題講解

例 2 (1) 求函數 $y=-3x^2+2x+1$ 的遞增區間、遞減區間。

(2) 若函數 $y=(2k+1)x+1$ 在 R 上是增函數，求 k 的取值範圍。

(3) 函數 $y=(3k-5)x+1$ 在 R 上是減函數，求 k 的取值範圍。

解析：(1) 先求對稱軸 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$，拋物線開口向下，所以遞增區間為 $(-\infty,\frac{1}{3})$，遞減區間為 $(\frac{1}{3},+\infty)$。

(2) 主要考查一次函數 $y=ax+b$ 的基本性質，若 $a>0$ 函數是增函數，若 $a<0$ 函數是減函數。所以由條件增函數可以確定 $2k+1>0$，即 $k>-\frac{1}{2}$。

(3) 主要考查一次函數 $y=\frac{k}{x}$ 的基本性質，若 $a>0$ 函數是增函數，若 $a<0$ 函數是減函數。所以由已知函數是減函數，可以確定 $3k-5<0$，即 $k<\frac{5}{3}$。

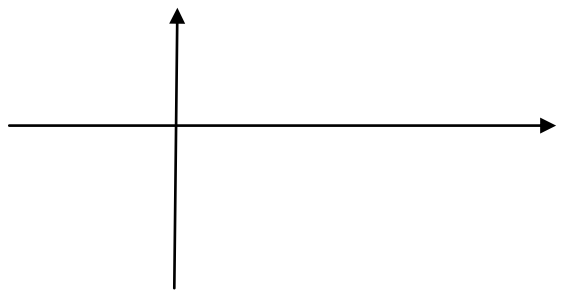
注：在高中來說，由於涉及到單調性的函數基本上都是連續函數，如果此函數在 (a,b) 單調，那麼在 $[a,b]$ 上也單調。事實上，是否涉及端點並不影響函數局部性質的單調性。如果非得選擇，用開區間表示更好，對於反比例函數也有一定的概括性。

■ 課堂小結

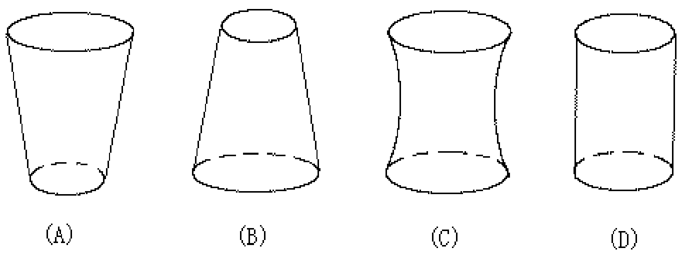
1. 本節課我們學習了哪些內容？
2. 你是否掌握了常見函數的單調區間？

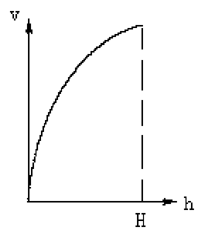
■ 課後功課

1. 增函數的圖像從左到右__________,減函數的圖像從左到右__________(填“上升”或“下降”)。
2. 請做出一個在[-2,1]是增函數，[1，2]上是減函數，[2，5]上是增函數 的函數圖像。



3. 向高為 h 的水瓶中注水，注滿為止，如果注水量 V 與深 h 的函數關係的圖像如右圖所示，那麼水瓶的形狀是以下哪一項?(　　　)





4. 下列哪一項的區間是函數 $y=x^2-2x+1$ 的單調遞減區間？

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

5. 函數 $y=-3x^2+2x+1$ 的遞增區間是______________，遞減區間是___________。

6. 函數 $y=(2k+1)x+1$ 在 R 上是增函數，則 k 的範圍是______________

7. 函數 $y=(3k-5)x+1$ 在 R 上是減函數，則 k 的範圍是______________

8. 若函數 $y=\frac{4k+3}{x}$ 是在 $(0,+\infty)$ 增函數，則 k 的範圍是____；若在 $(0,+\infty)$ 減函數，則 k 的範圍是_____。

9. 函數 $y=2x^2+4x+1$ 在[-6, a]上是減函數，則 a 的取值範圍是___________。

2.3 函數的性質(單調性)-第二課時

【教學目標】

1. 理解函數奇偶性的定義;
2. 理解函數奇偶性的圖像性質;
3. 能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題;
4. 通過實例，使學生體會、理解到函數的最大（小）值及其幾何意義，能夠借助函數圖像的直觀性得出函數的最值。

【教學重點】函數性質與圖像的關係;

【教學難點】函數單調性、奇偶性的證明，用單調性和奇偶性解決相關問題。

【基力要求】

A-5 函數
A-5-6 理解函數單調性概念，能求一些常見函數的單調區間。
A-5-7 理解函數的奇偶性概念，認識奇函數與偶函數的通項特徵。
A-5-8 能運用函數的有關喜志來描述函數的圖像，學會運用函數圖像理解和研究函數的性質。

■ 課堂引入

之前我們學習了增、減函數的定義和如何求一些簡單函數的增減區間。接下來我們需要證明函數在一特定區間上的增減性。

這個證明完全是根據定義證明。

■ 例題講解

例 1 證明: $f(x)=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

證明: $\forall\ x_1$, $x_2\in(-\infty,0)$, $x_1<x_2$, → 1.在區間上設數

則 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-3-(x_2^2-3)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ → 2.作差(因式分解)

$\because x_1$, $x_2\in(-\infty,0)$, $x_1<x_2$, $\therefore x_1-x_2<0$, $x_1+x_2<0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$ → 3.定差的正負

$\therefore f(x)=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。 → 4.下結論

證明步驟: 1. 設數 2. 作差變形 3. 定正負號 4. 下結論

■ 即時練習

證明: $f(x)=-x^2+2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數。

■ 例題講解

例 2 證明: $y=-\dfrac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數。

證明： $\forall\ x_1$， $x_2 \in (-\infty,0)$， $x_1 < x_2$， 則 $f(x_1)-f(x_2) = -\frac{1}{x_1}-3-(-\frac{1}{x_2}-3) = \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1} = \frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

$\because x_1$， $x_2 \in (-\infty,0)$， $x_1 < x_2$， $\therefore x_1 - x_2 < 0$， $x_1x_2 > 0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數。

■ 即時練習

1. 證明： $y = -x-3$ 在 R 上是減函數。
2. 證明函數的單調性有哪四個步驟？

①設數

②作差化簡

③定正負號

④作答。

3. 證明 $f(x) = \text{-}2x-3$ 在 R 上是減函數時，下列有打亂的證明次序。請根據證明單調性的步驟，對次序進行證明步驟是先後排序：

A. $f(x) = x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

B. $\forall\ x_1$， $x_2 \in R$， $x_1 < x_2$，

C. $\because x_1 < x_2$， $\therefore x_1 - x_2 < 0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$

D. $f(x_1)-f(x_2) = -2x_1-3-(-2x_2-3) = 2x_2-2x_1 = 2(x_1-x_2)$

正確的排序為_________________________。

■ 課堂小結

證明函數的單調性有哪些步驟？

1. 在此區間上任取兩個實數 x_1， x_2 且 $x_1 < x_2$；
2. 將它們的函數值作差： $f(x_1)-f(x_2)$
3. 作差後變形處理(因式分解，通分等)
4. 確定差的符號
5. 作出結論

■ 課後功課

(1) 證明： $f(x) = 2x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

(2) 證明： $y = \frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數。

(3) 證明：函數 $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數。

2.3 函數的性質(奇偶性)-第三課時

【教學目標】

1. 理解函數奇偶性的定義;
2. 理解函數奇偶性的圖像性質;
3. 能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題;
4. 通過具體函數，讓學生經歷奇函數、偶函數定義的討論，體驗數學概念的建立過程，培養其抽象的概括能力。
5. 在經歷概念形成的過程中，培養學生歸納、抽象概括能力，體驗數學既是抽象的又是具體的，滲透數形結合的數學思想。

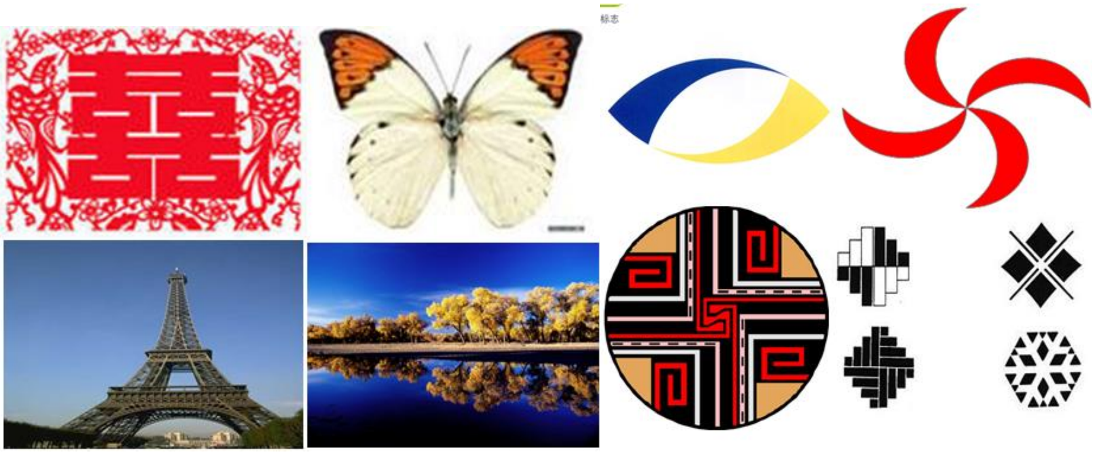
【教學重點】函數性質與圖像的關係;

【教學難點】函數單調性、奇偶性的證明，用單調性和奇偶性解決相關問題。

【基力要求】

A-5 函數
A-5-6 理解函數單調性概念，能求一些常見函數的單調區間。
A-5-7 理解函數的奇偶性概念，認識奇函數與偶函數的通項特徵。
A-5-8 能運用函數的有關喜志來描述函數的圖像，學會運用函數圖像理解和研究函數的性質。

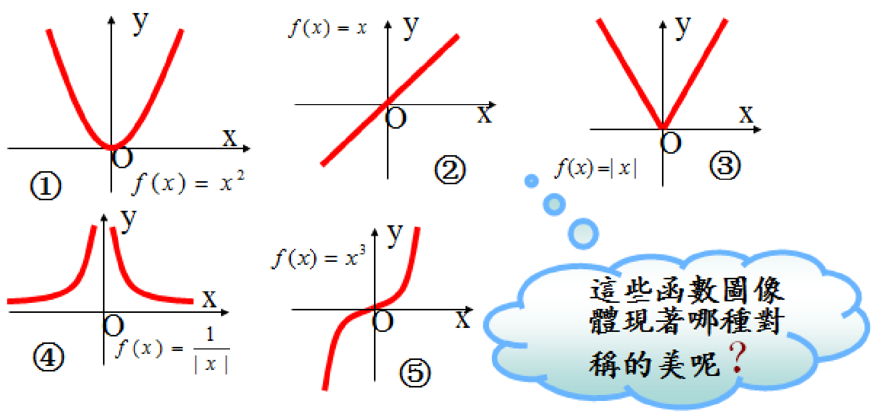
■ 課堂引入，創設情境



提問：上述圖形有什麼特點？

設計意圖：先讓同學回憶理解關於 y 軸對稱和關於原點對稱的圖形。

觀察以下函數圖像，從圖像對稱的角度把這些函數圖像分類



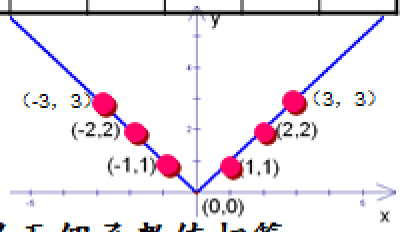
設計意圖：
培養學生由感性到理性的觀察思維能力，同時導入新課。

■ 課堂探究

作出函數 $y=|x|$ 的圖像，再觀察表格，你看出了什麼？

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=\|x\|$	…	3	−2	1	0	1	2	3	…

f(-3)=3=f(3)
f(-2)=2=f(2)
f(-1)=1=f(1)



當x取一對相反數時，相應的兩個函數值相等。

設計意圖：
通過特殊值讓學生認識兩個函數的對稱性實質：互為相反數時，對應的函數值相等這兩種關係。

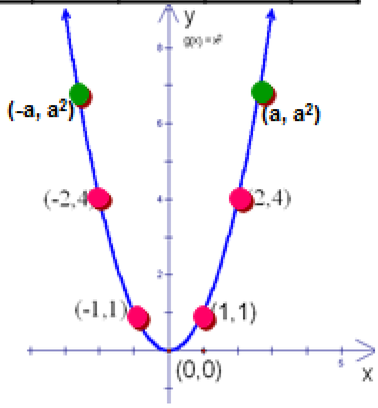
作出函數 $f(x)=x^2$ 圖像，再觀察表，你看出了什麼？

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

$f(1)=1$　$f(2)=4$　$f(a)=a^2$

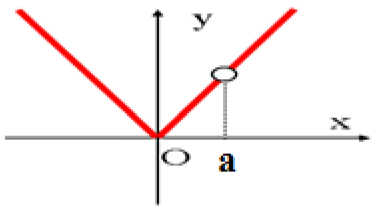
$f(-1)=1$　$f(-2)=4$　$f(-a)=a^2$

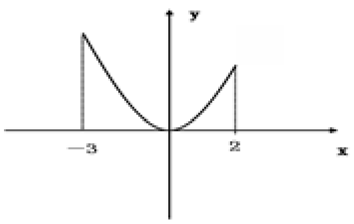
猜想：$f(-x)=f(x)$



另一個問題：

觀察下面的函數圖像，是否關於關於y軸對稱？



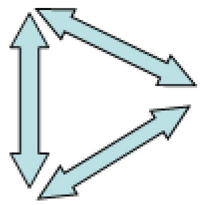


設計意圖：
加入易錯題，讓同學更好掌握其中內涵。

定義域應該關於原點對稱.

偶函數定義：設函數 $f(x)$ 的定義域為 D，$\forall x \in D$，
若總有 $f(-x)=f(x)$ 成立，則 $f(x)$ 叫偶函數。
偶函數的定義域必須對稱，
圖像關於 y 軸對稱。

$f(-x)=f(x)$



偶函數

圖像關於y軸對稱

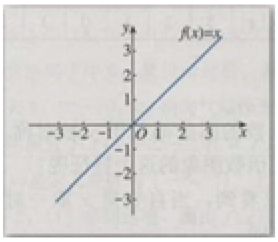
■　即時練習：判斷對錯

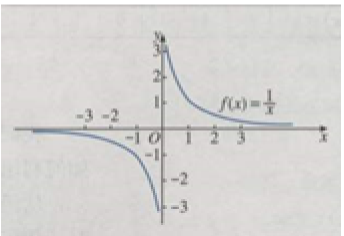
1. 如果函數 $f(x)$ 中，有 $f(-1)=f(1)$，則此函數是偶函數；
2. 函數 $f(x)=x^2$，$x\in[-2,3]$，則此函數是偶函數。

奇函數探究

(1) 函數 $f(x)=x$ 與函數 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 圖像有什麼共同特徵嗎？

(2) 相應的兩個函數值對應表是如何體現這些特徵的？





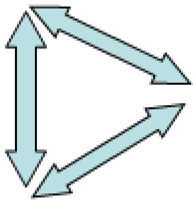
函數值的特徵探索
你能發現這兩個函數圖像有什麼共同特徵嗎？

f(-3)=-3=-f(3)
f(-2)=-2=-f(2)
f(-1)=-1=-f(1)
f(-x)=-x=-f(x)

f(-3)=-1/3=-f(3)
f(-2)=-1/2=-f(2)
f(-1)=-1=-f(1)
f(-x)=-1/x=-f(x)

實際上，對於定義域內任意的一個x，都有f(−x)=−f(x)，這時我們稱這樣的函數為奇函數.

$$f(-x)=-f(x)$$

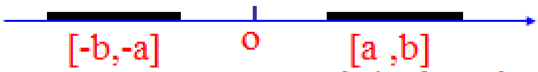


奇函數

圖像關於原點對稱

☆對奇函數、偶函數定義的說明：

(1) 函數具有奇偶性：定義域關於原點對稱 **對於定義域內的任意一個x，則－x也一定是定義域內的一個引數**



(2) 若f(x)為奇函數，則f(−x)=−f(x)成立. **圖像關於原點對稱**

若f(x)為偶函數，則f(−x)= f(x) 成立. **圖像關於y軸對稱**

(3) 如果一個函數f(x)是奇函數或偶函數，那麼我們就說函數f(x) 具有奇偶性. 函數的奇偶性是函數的整體性質；既不是奇函數也不是偶函數的函數稱為非奇非偶函數.

總結：

常見的偶函數：$y=x^{2n}$，$y=x^{-2n}=\dfrac{1}{x^{2n}}$，$y=|x|$，$y=c$ (常數函數是偶函數)

常見的奇函數：$y=x^{2n+1}$，$y=x^{-2n+1}$

既是奇函數也是偶函數：$f(x)=0$

一些性質：

奇函數+奇函數=奇函數　　偶函數+偶函數=偶函數　　奇函數+偶函數=非奇非偶

奇函數×奇函數=偶函數　　偶函數×偶函數=偶函數　奇函數×偶函數=奇函數

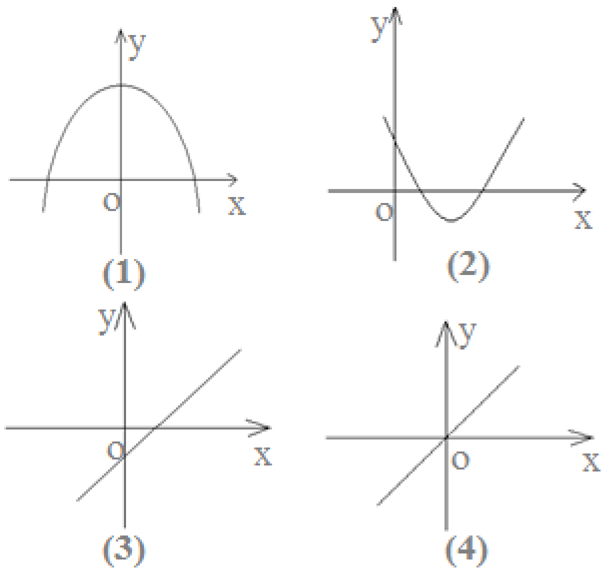
■　例題講解

例 1 判斷下列函數的奇偶性

(1) $f(x)=x^4$　　(2) $f(x)=x^2+1$　　(3) $f(x)=x+1$

(4) $f(x)=x^5$　　(5) $f(x)=x^5, x\in[-5,6]$　　(6) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+5$

例 2 判斷下列函數的奇偶性

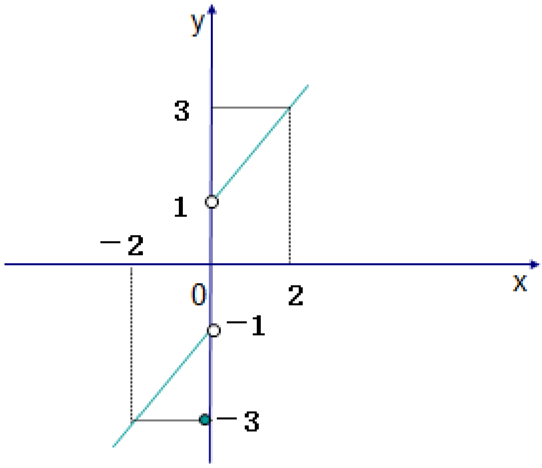


設計意圖： 數形結合，增強同學對函數奇偶性的理解。

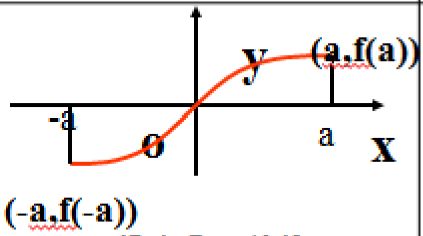
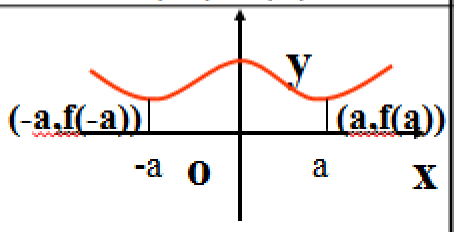
■　即時練習

已知函數 $f(x)$ 定義在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函數，其函數圖像給出了一半，請補充另一半。

設計意圖： 根據圖像性質，作出圖像，加深記憶。



■　課堂小結

奇偶性	奇函數	偶函數
定義	設函數y=f(x)的定義域為D,$\forall x \in D$,都有$-x \in D$.	
	f(-x)=-f(x)	f(-x)=f(x)
圖像性質	 關於原點對稱	 關於y軸對稱
判斷步驟	定義域是否關於原點對稱.	
	f(-x)=-f(x)	f(-x)=f(x)

■ 課後功課
工作紙

2.3 函數的性質(奇偶性)-第四課時

【教學目標】

1. 理解函數奇偶性的定義;
2. 理解函數奇偶性的圖像性質;
3. 能結合奇偶函數的性質與圖像特點解決一些簡單的問題;
4. 通過具體函數，讓學生經歷奇函數、偶函數定義的討論，體驗數學概念的建立過程，培養其抽象的概括能力。
5. 在經歷概念形成的過程中，培養學生歸納、抽象概括能力，體驗數學既是抽象的又是具體的，滲透數形結合的數學思想。

【教學重點】函數性質與圖像的關係;
【教學難點】函數單調性、奇偶性的證明，用單調性和奇偶性解決相關問題。

【基力要求】

A-5 函數	
A-5-6	**理解函數單調性概念，能求一些常見函數的單調區間。**
A-5-7	**理解函數的奇偶性概念，認識奇函數與偶函數的通項特徵。**
A-5-8	**能運用函數的有關喜志來描述函數的圖像，學會運用函數圖像理解和研究函數的性質。**

■ 課堂引入

上節課我們學習了函數的奇偶性，奇函數往往是什麼樣的？偶函數呢？如何判斷函數的奇偶性？

本節課我們學習如何證明函數的奇偶性。

■ 例題講解

證明下列函數是偶函數：(1) $f(x)=2x^4+3x^2+1$ (2) $f(x)=|x|+\dfrac{1}{x^2}$

證明：(1) $f(x)$ 定義域為 R，滿足對稱條件，

$\because f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+1=2x^4+3x^2+1=f(x)$

$\therefore$ 函數是偶函數。

(2) $f(x)$ 定義域為 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，滿足前提條件，

$\because f(-x)=|-x|+\dfrac{1}{(-x)^2}=|x|+\dfrac{1}{x^2}=f(x)$

$\therefore$ 函數是偶函數。

證明函數奇偶性有哪些步驟？

■ 即時練習

證明下列函數是偶函數：(1) $f(x)=2x^{10}+|x|-5$ (2) $f(x)=3|x|+\dfrac{x^4-1}{x^2}$

■ 例題講解

證明下列函數是奇函數：(1) $f(x)=2x^5-\dfrac{3}{x}$

證明：(1) $f(x)$ 定義域為 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，滿足對稱條件，

$$\because\ f(-x)=2(-x)^5-\frac{3}{(-x)}=-2x^5+\frac{3}{x}=-\left(2x^5-\frac{3}{x}\right)=-f(x)$$

$\therefore$ 函數是奇函數。

■ 即時練習

證明下列函數是奇函數：(1) $f(x)=x^3+x+\dfrac{2}{x}$

■ 課堂小結

證明函數奇偶性的步驟

1.檢查定義域是否對稱

2.代入 $f(-x)$，化簡

3.整理，下結論

■ 課後功課

工作紙

2.4 反函數-第一課時

【教學目標】

1. 理解反函數的概念；
2. 理解函數與反函數的圖像關係；
3. 會求一些簡單函數的反函數；
4. 通過聯繫實際問題，在嘗試，探索求反函數的過程中，深化對概念的認識，總結出求反函數的一般步驟、加深對函數與方程、數形結合以及有特殊到一般等數學思想方法的認識。
5. 完善學生思維的深刻性，培養學生的逆向思維能力，用辯證的觀點分析問題，培養抽象概括的能力。

【教學重點】反函數的概念，求反函數；

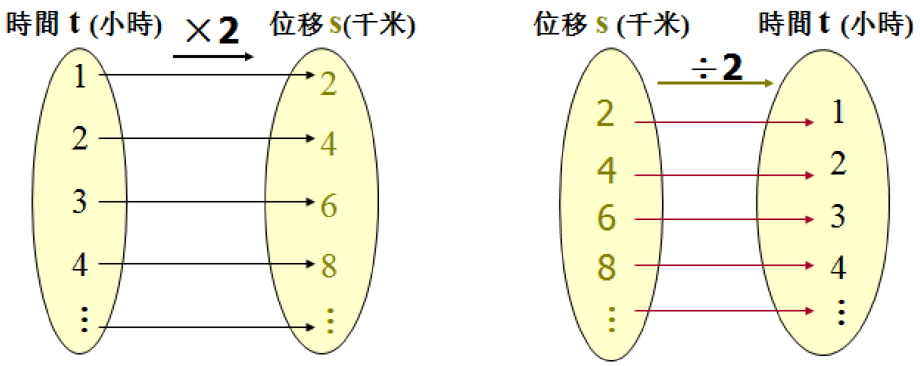
【教學難點】求二次函數在指定區間上的反函數。

【基力要求】

A-5 函數
A-5-1 理解反函數的概念。

■ 課堂引入

勻速運動　設v=2 千米/小時,t表示時間,s表示位移.



根據條件填圖, 並寫出對應的關係式.

$$s = 2t \qquad\qquad t = \frac{1}{2}s$$

觀察這兩個關係式發現:

$$s = 2t \quad ① \qquad\qquad t = \frac{1}{2}s \quad ②$$

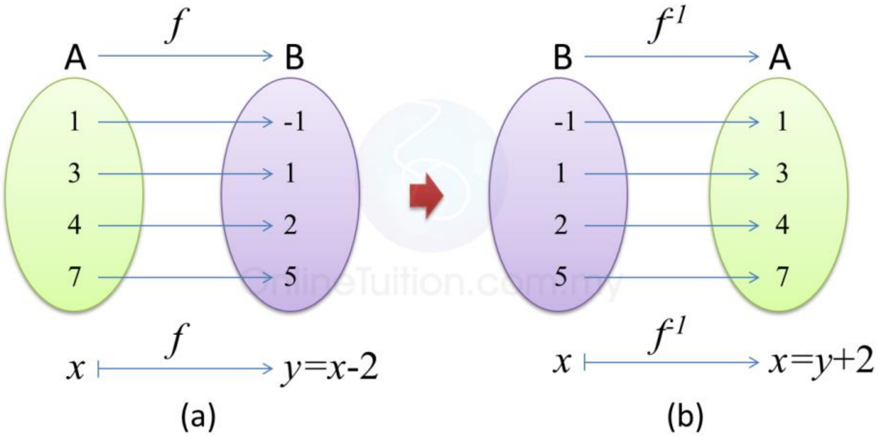
在①中 t 是自變量，s 是引數 t 的函數.

在②中 s 是自變量，t 是引數 s 的函數.

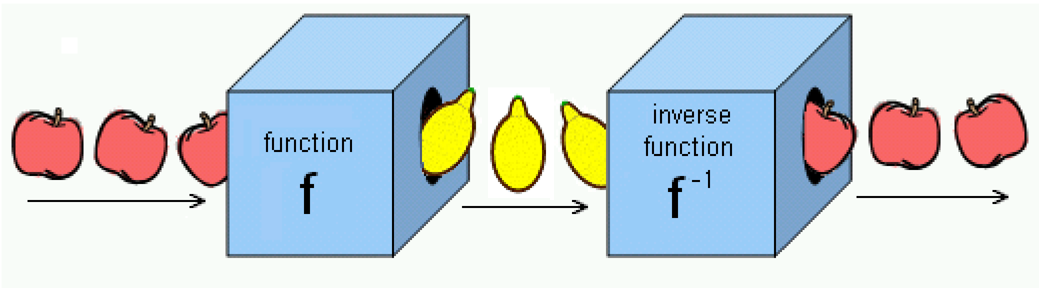
除此之外,我們還可發現②的運算式可由①的運算式變換而得,即從①式中求出t即可.

這時我們就說$t = \dfrac{s}{2}$是函數$s = 2t$的反函數

具體來說，設函數 f 是從 A→B 的映射，反過來，從 B→A 的映射定義為反函數，因為這種映射與原函數有關，所以記法上用字母 f^{-1} 表示。如下圖所示：



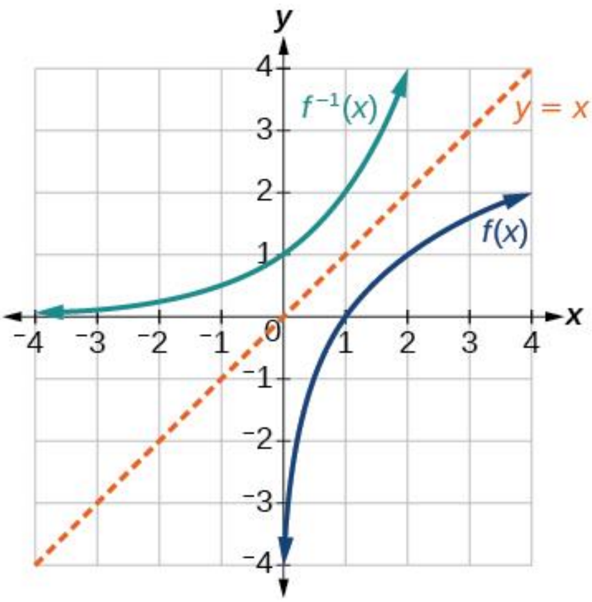
通俗地說：f 是把蘋果轉化為梨，而反函數就是把梨轉化為蘋果。

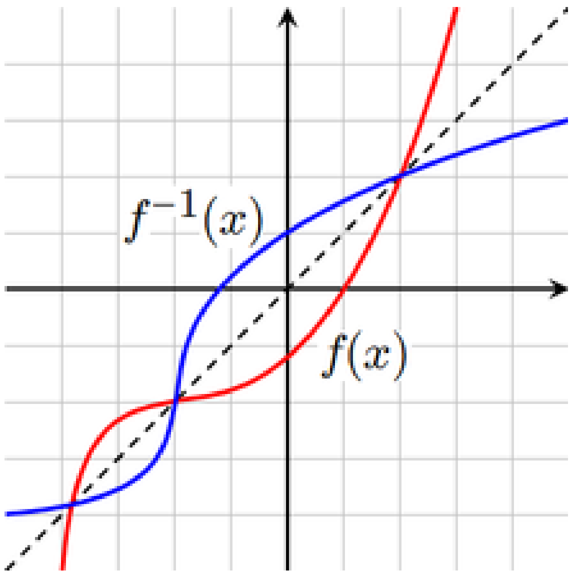


由反函數的定義可知，若原函數的定義域是 A，值域是 B，那麼反函數的定義域是 B，值域是 A。圖表可表示為：

	定義域	值域
$f(x)$	A	B
$f^{-1}(x)$	B	A

推論 1：若函數 $f(x)$ 經過點 (a,b)，則反函數必過點 (b,a)。
推論 2：由推論 1 可知，原函數與反函數必關於直線 $y=x$ 對稱。如下圖所示：





推論 3：函數要求是一對一或多對一，如果存在反函數，則原函數必是一對一的，而只有嚴格單調的函數才有一對一。所以只有單調函數才有反函數。

注：並不是所有函數都有反函數。

即時練習：

1. 如果 $f(x)$ 經過點 $(1,3)$，則反函數必過點__________。
2. 如果 $f(x)$ 的反函數定義域是[-1,8]，則 $f(x)$ 的定義域為_________。

■ 例題講解

求下列函數的反函數：(1) $y=3x-1$，$x\in R$　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\neq 1)$

解：(1)由 $y=3x-1$，$x\in R$，$y\in R$

得 $x=\dfrac{y+1}{3}$ → 把 x 解出來(用 y 表示)

$\therefore$ 反函數為 $y=\dfrac{x+1}{3}, x\in R$ → 把 x 與 y 的位置互換，補上定義域

(2)由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\neq 1)$，的 $x=\dfrac{y+3}{y-2}(y\neq 2)$

$\therefore$ 反函數為 $y=\dfrac{x+3}{x-2}(x\neq 2)$

■ 即時練習

求下列函數的反函數：(1) $y=2x+3$，$x\in R$　　(2) $y=\dfrac{x+3}{2x-2}(x\neq 1)$

■ 課堂小結

求反函數的步驟

↓

求原函數值域

↓

把 x 解出來(用 y 表示)

↓

把 x 與 y 的位置互換，
補上定義域

■ 課後功課

工作紙

2.4 反函數-第二課時

【教學目標】

1. 理解反函數的概念；
2. 理解函數與反函數的圖像關係；
3. 會求一些簡單函數的反函數；
4. 通過聯繫實際問題，在嘗試，探索求反函數的過程中，深化對概念的認識，總結出求反函數的一般步驟、加深對函數與方程、數形結合以及有特殊到一般等數學思想方法的認識。
5. 完善學生思維的深刻性，培養學生的逆向思維能力，用辯證的觀點分析問題，培養抽象概括的能力。

【教學重點】反函數的概念，求反函數；
【教學難點】求二次函數在指定區間上的反函數。

【基力要求】

A-5 函數
A-5-1 理解反函數的概念。

■ 課堂引入

求反函數的步驟有哪些？

■ 例題講解

求下列函數的反函數：(1) $y=x^3+1$， $x\in R$ (2) $y=\sqrt{x}+1(x\geq 0)$

解：(1) ∵ $x\in R$，所以 $y\in R$

$y=x^3+1$ 得 $y-1=x^3$

∴ $x=\sqrt[3]{y-1}$

∴反函數為 $y=\sqrt[3]{x-1}$， $x\in R$

(2) 由 $y=\sqrt{x}+1(x\geq 0)$， ∴ $y\geq 1$

∴ $y-1=\sqrt{x}$， 得 $x=(y-1)^2$

∴反函數為 $y=(x-1)^2$， $x\geq 1$

■ 即時練習

■ 求下列函數的反函數：(1) $y=2x^3-1$， $x\in R$ (2) $y=2\sqrt{x-1}+1(x\geq 1)$

■ 例題講解

例 2 已知 $y=\frac{1}{3}x+b$ 與 $y=ax+5$ 互為反函數，求常數 a,b 的值。

解：先求 $y=\frac{1}{3}x+b$ 的反函數

提示：反函數具有唯一性

$y-b=\frac{1}{3}x$， ∴ $3(y-b)=x$

$y=\frac{1}{3}x+b$ 的反函數為 $y=3x-3b$

根據題意， $y=\frac{1}{3}x+b$ 的反函數為 $y=ax+5$

$\therefore y=3x-3b$ 與 $y=ax+5$ 相同。

$$\therefore \begin{cases} a=3 \\ -3b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

■ 即時練習

若點（2，3）既在函數 $y=1+\sqrt{ax+b}$ 的圖像上，又在其反函數的圖像上，求 ab 的值。

■ 課堂小結

本節課學習了什麼內容？

■ 課後功課

叁、試教評估與反思建議

函數單調性教學反思:

學習函數單調性的時候，同學一般都能從函數圖像上直接觀察函數在一個區間內是增函數或減函數，但他們感到困難的位置是:(1)難以確定分界點的確切位置;(2)單調性的證明題。由於函數單調性是學生在函數內容中首次接觸到的代數論證內容，學生需要在給定的區間上設數，作差變形，判斷正負號，下結論，這些步驟都需要學生在代數方面有一定程度的推理論證能力，語言表達能力，所以這一課題對學生來說是有一定的難度。

為此，在教導學生函數單調性的時候，需要結合解析式進行嚴密化、精確化的研究，強調單調性是對定義域內某個區間而言的，離開了定義域和相應區間就談不上單調。函數單調性的兩課時中，我們運用了多媒體投影，為學生提供直觀的感知，讓學生能快速且深入地形成函數單調性的概念。我們通過例題講解、變形題目、排列正確的證明步驟等題目，有助學生對問題的理解及掌握用定義證明函數單調性的方法和步驟。而在高中來說，由於涉及到單調性的函數基本上都是連續函數，如果此函數在(a,b)單調，那麼在$[a,b]$上也單調。事實上，是否涉及端點並不影響函數局部性質的單調性。如果非得選擇，用開區間表示更好，對於反比例函數也有一定的概括性。

函數奇偶性教學反思:

學習函數奇偶性的時候，我們先展示與生活中相關的對稱圖形，激發學生的好奇心和學習興趣，同時讓學生回憶及理解關於 y 軸對稱和關於原點對稱的圖形，再讓學生直觀函數圖像把相同的對稱方法分類，培養學生由感性到理性的觀察思維能力，同時導入新課。學生能從文字、圖形、符號三種數學語言理解了函數奇偶性的概念，也通過探究活動，使學生利用定義判斷簡單函數的奇偶性，繼而再研究一些奇偶函數的性質。但學生在證明奇偶性時容易想得過於複雜，特別是加入絕對值的運算，情況更糟。

為此，在教導學生函數奇偶性的時候，可以加入易錯題，讓同學懂得自行判斷錯誤，更好掌握其中內涵。課堂上也需要和學生說明清晰證明函數奇偶性的步驟: 1.檢查定義域是否對稱; 2.代入

$f(-x)$，化簡; 3. 整理，下結論。最後，我們要多加強學生代數運算能力，以免學生因運算錯誤而影響判斷函數奇偶性。

反函數教學反思:

由於函數是一種對應關係，這個概念本身不好理解，而反函數又是函數中的一種特殊現象，它是兩個函數之間的關係 所以弄清函數與其反函數的關係，是正確理解反函數概念必不可少的重要環節。學生對於反函數與原函數之間的關係容易產生錯誤的認知，必須使學生認清反函數的實質，才能使學生接受概念並對反函數的存在有正確的認識。

在教學設計中，我們先通過對具體例子(勻速運動中的時間和位移對應的關係式、函數 f 是把蘋果轉化為梨，而反函數就是把梨轉化為蘋果)，讓學生自行觀察這兩個關係式，繼而發現函數 f 是從 A→B 的映射，反過來，從 B→A 的映射定義為反函數。也強調了函數要求是一對一或多對一，如果存在反函數，則原函數必是一對一的，而只有嚴格單調的函數才有一對一。所以只有單調函數才有反函數，並不是所有函數都有反函數。在求函數的反函數的練習中，需清楚說明求反函數的步驟，重點是反函數的定義域不是看反函數的解析式得到的，而是求原來函數的值域而得到反函數的定義域，我們不但要使學生掌握求反函數的方法步驟，並有意識地闡明函數與反函數的關係，深化了學生對函數概念的理解和掌握。

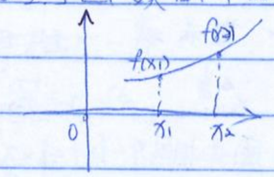
肆、參考文獻

- 周建平、隆仕寶 (2010)。《科學咨詢》。第 22 期。重慶市
- 李秀萍、趙思林 (2017)。《內江師範學院學報》。第 32 卷第 10 期。四川
- 教育暨青年局 (2017)。《高中教育基本學力要求》

伍、相關教材

- **學生筆記(函數的單調性)**

§2.3 函數的單調性

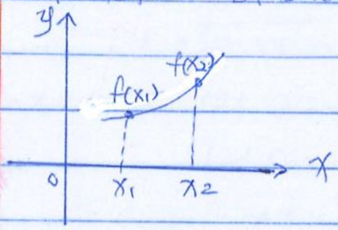


當: $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$

∴ $f(x)$ 在區間 D 上是增函數

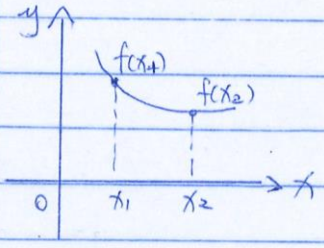
2.3 §函數的單調性

一、設函數 $f(x)$ 的定義域為 I，如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2



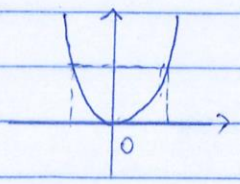
當 $x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$ $f(x)$在區間 D 上是增函數



當 $x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$ 減函數.



$y = x^2$

$x=0$ $y=0$ $x=2$ $y=4$

∴ $[0,+\infty)$上是增

$[-\infty,0]$上是減

例3. 證：$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,\infty)$ 上是減函數

解：設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$.

$f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$

∴ $f(x)=\frac{1}{x}$ 在……減函數.

2. 證明函數 $f(x)=-2x+1$ 在R上是減函數.

解. 設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)-f(x_2)$

$=-2x_1+1-(-2x_2+1)$

$=-2x_1+1+2x_2-1=0$ ∴ $f(x)=-2x+1$ 在R上是減函數.

3. 證明函數 $f(x)=\frac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數

解. 設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{3}{x_1}-\frac{3}{x_2}=\frac{3x_2-3x_1}{x_1x_2}>0$ ∴ $f(x)=\frac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 是減函數.

4. 判斷函數 $f(x)=x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數還是減函數?

解 設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-x_2<0$

$f(x_1)-f(x_2)(x_1^2+1)-(x_2^2+1)$

$=x_1^2+1-x_2^2-1<0$

∴ $f(x)=x^2+1$ …是增函數

設 $x_1<x_2$ $x_1-x_2<0$

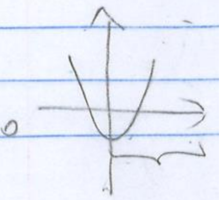
$f(x_1)-f(x_2)$

$x_1^2+1-x_2^2-1$

$x_1^2-x_2^2$

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

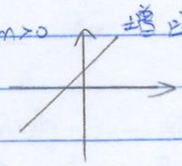
$+$



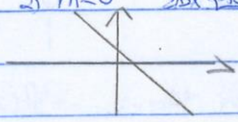
P.66

1. $y=mx+b$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上

1) $m>0$ 增函數



2) $m<0$ 減函數

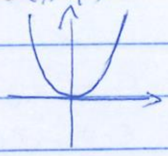


2) $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$ $y=kx$ $(k\neq0)$

	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
單調區間	$(-\infty,0)(0,\infty)$	$(-\infty,0)(0,\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
單調性	減	增	增	減

P.97 $y=x^2-2x+1$

Pf 解 $(x-1)^2$

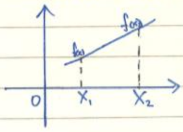


遞減區 $(-\infty,1)$

Date Page

2.2 函數表示方法：① 解析法
② 列表法
③ 圖象法

2.3 函數的單調性



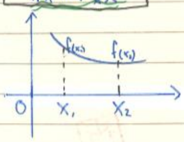
當 $x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$
∴ f(x) 在區間 D 上是增函數

x 越大
y 越大

設函數 f(x) 的定義域為 I，如果對於定義域 I 內某個區間 D 上的任意兩個自變量的值 x_1, x_2

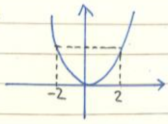
當 $x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$
減函數

x 越大
y 越小



Data Page

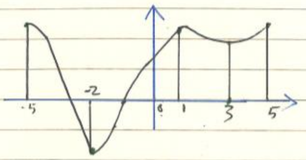
eg.



x = 0, y = 0
x = 2, y = 4

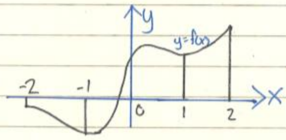
在 $[0, +\infty)$ 上是增函數
在 $(-\infty, 0)$ 上是減函數

eg1.



單調區間：$[-5, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, 3)$, $[3, 5]$
減 增 減 增

p.65

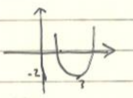


增函數 $[-1, 0)$, $[1, 2]$
減函數 $[-2, -1)$, $(0, 1]$

Date Page

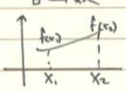
Find the Domain and Range.

(4) $y = x^2 - 6x + 7$
$y = (x-3)^2 - 2$
$\therefore x \in R$
$y \geq -2$

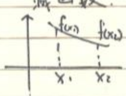


函數表示方法
1. 解析式
2. 列表法
3. 圖象法

① $x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$
增函數



② $x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$
減函數



p.64 例2 $f(x) = 3x + 2$ 在 $x \in R$ 上是增函數　$f(x_1) < f(x_2)$
$f(x_1) - f(x_2) < 0$

設 $x_1 < x_2$
$f(x_1) - f(x_2)$
$= 3x_1 + 2 - (3x_2 + 2)$
$= 3x_1 + 2 - 3x_2 - 2$
$= 3(x_1 - x_2) < 0$
∴ $f(x) = 3x + 2$ 在 $x \in R$ 是增函數.

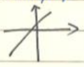
Data Page

P.65 例2 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 是減函數　$f(x_1) > f(x_2)$
$f(x_1) - f(x_2) > 0$

設 $x_1 < x_2$
$f(x_1) - f(x_2)$
$= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$
$= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$
∴ $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上是減函數.

p.66 1. $y = mx + b$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上

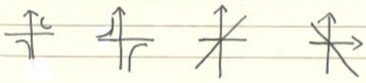
(1) $m > 0$
增函數



(2) $m < 0$
減函數

2.

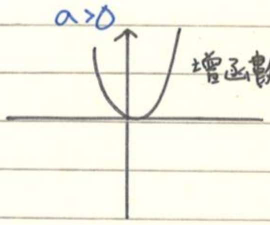
	$y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$		$y = kx$ $(k \neq 0)$	
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
單調區間	$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
單調性	減函數	增函數	增函數	減函數



Date Page

3 $y=ax^2$ 在 $(0,+\infty)$

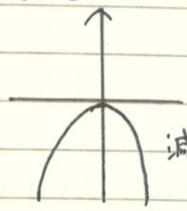
$a>0$



增函數

4. $y=ax^2$ 在 $(0,+\infty)$

$a<0$



減函數.

7. 證：$f(x)=ax^2+bx-c$ $(a<0)$ 在 $\underbrace{(-\infty,-\frac{b}{2a})}$ 上是增函數.

$f(x_1)-f(x_2)<0$

pf: $f(x_1)-f(x_2)$

$=ax_1^2+bx_1+c-ax_2^2-bx_2-c$

$=ax_1^2+bx_1-ax_2^2-bx_2$

$=a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)<0$

$=(x_1-x_2)[a(x_1-x_2)+b]<0$ $=a(x_1x_2)(x_1+x_2+\frac{b}{a})$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ 在 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上是增函數

$-\infty<x_1<-\frac{b}{2a}$

$-\infty<x_2<-\frac{b}{2a}$

$x_1+x_2<-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}$

$x_1+x_2<-\frac{b}{a}$

$x_1+x_2+\frac{b}{a}<0$

找出頂点

$f(x)=ax^2+bx+c$

$=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$

$=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c$

$=a\underline{(x+\frac{b}{2a})}^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$x=-\frac{b}{2a}$

Date Page

p.98 習 5. $y=(2k+1)x+1$ 在 R 上是增函數. 則 k 範圍是 ______

$f(x_1)-f(x_2)<0$

pf: $2kx_1+x_1+1-2kx_2-x_2-1<0$

$2k(x_1-x_2)+(x_1-x_2)<0$

$(x_1-x_2)(2k+1)<0$

$2k+1>0$

$k>-\frac{1}{2}$

- **學生的功課(函數的單調性)**

補 P.97 #4、6 (1,3)

17/10

#4 $y=-3x^2+2x+1$ 的遞增區間是 $(-\infty, \frac{1}{3}]$

遞減區間是 $[\frac{1}{3}, +\infty)$

開口向下 值域是 $(-\infty, \frac{4}{3})$

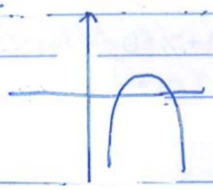
$x=-\frac{b}{2a}$

$=-\frac{2}{2\cdot(-3)}$

$=\frac{1}{3}$

$y=-3\times(\frac{1}{3})^2+2\times\frac{1}{3}+1$

$y=\frac{4}{3}$



#6 (1) 證明 $y=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數.

pf: $f(x_1)-f(x_2)$

$=x_1^2-3-x_2^2+3$

$=x_1^2-x_2^2>0$ $=x_1+x_2(x_1-x_2)$

$\therefore$ $y=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數.

(3) 證明 $y=-\frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數.

pf: $f(x_1)-f(x_2)$

$=-\frac{1}{x_1}-3+\frac{1}{x_2}+3$

$=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$

$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$ <0

$\therefore$ $y=-\frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數.

(2) 證明: $y=-2x-3$ 在R上是增函數.

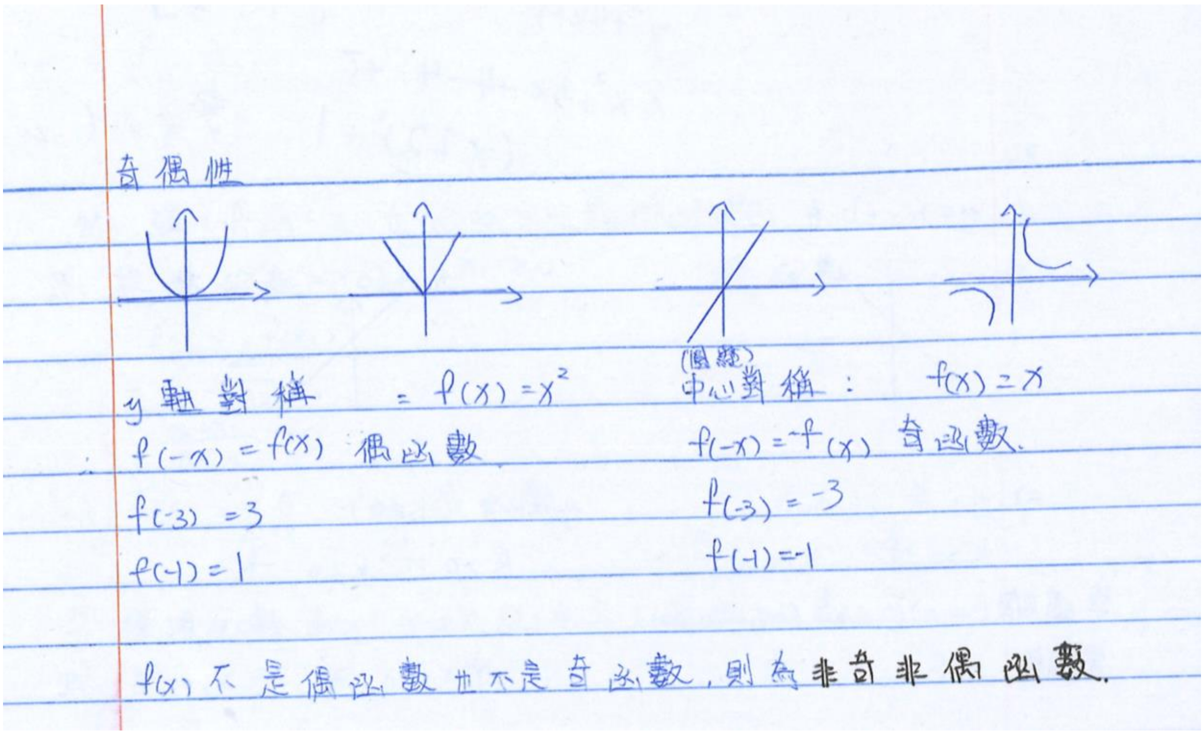
pf: $f(x_1)-f(x_2)$

$=-2x_1-3+2x_2+3$

$=-2(x_1-x_2)<0$

$\therefore$ $y=-2x-3$ 在R上是增函數。

- **學生的筆記(函數的奇偶性)**



奇偶性

y軸對稱 $f(x)=x^2$

$f(-x)=f(x)$ 偶函數

$f(-3)=3$

$f(-1)=1$

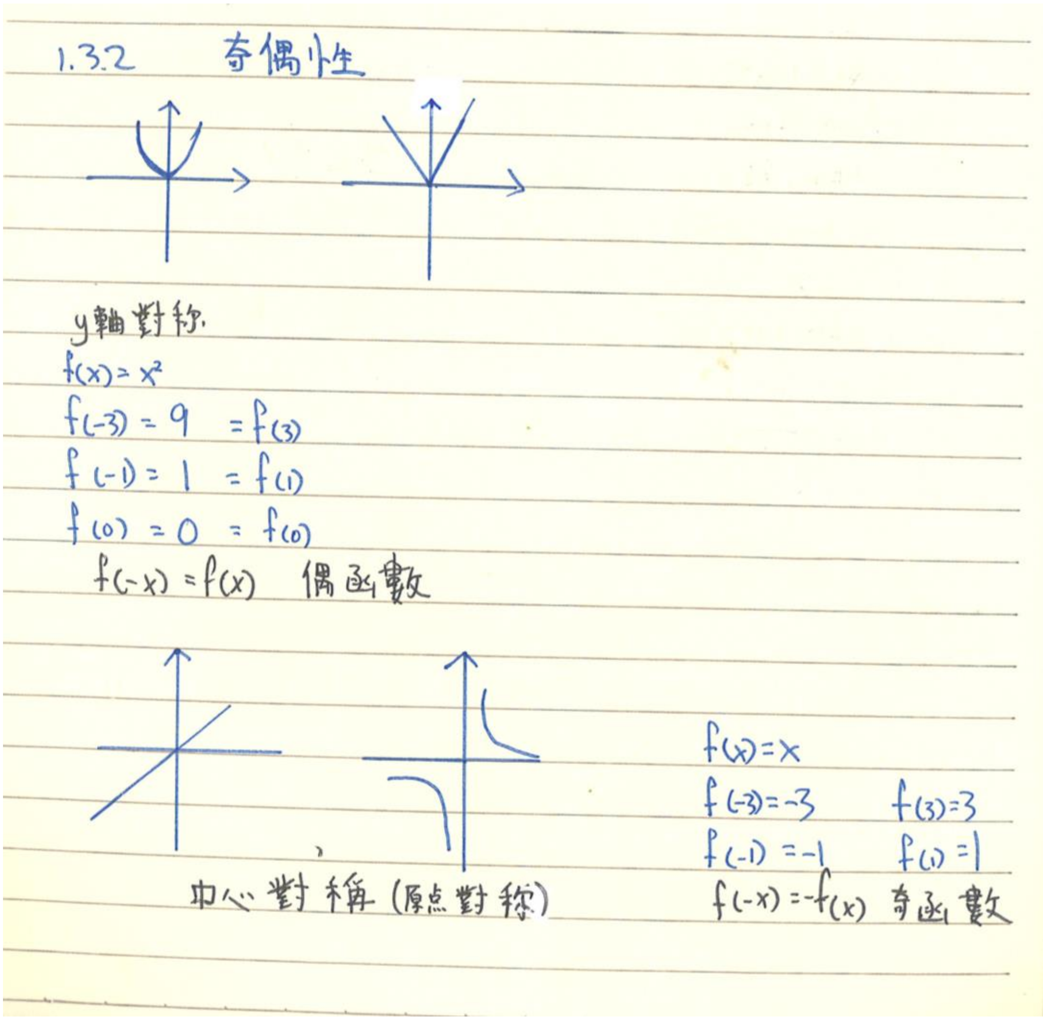
(圓點)中心對稱：$f(x)=x$

$f(-x)=-f(x)$ 奇函數.

$f(-3)=-3$

$f(-1)=-1$

$f(x)$ 不是偶函數也不是奇函數，則為非奇非偶函數.



1.3.2 奇偶性

y軸對稱

$f(x)=x^2$

$f(-3)=9=f(3)$

$f(-1)=1=f(1)$

$f(0)=0=f(0)$

$f(-x)=f(x)$ 偶函數

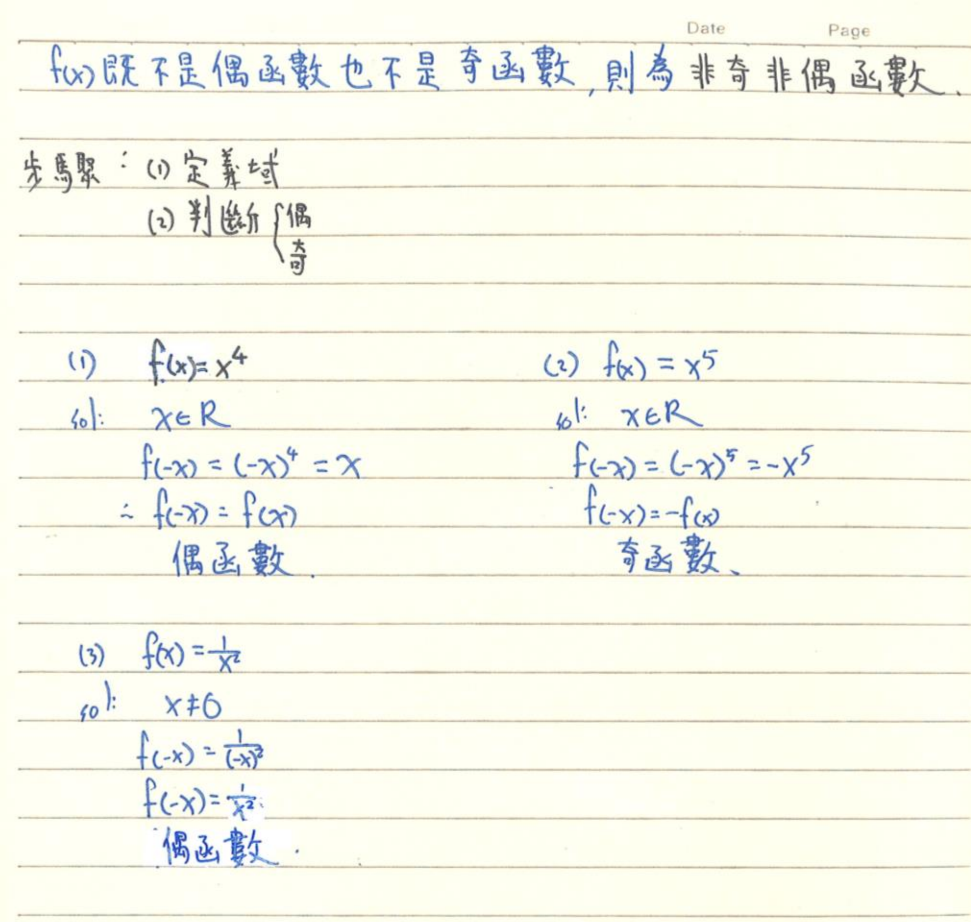
中心對稱(原点對稱)

$f(x)=x$

$f(-3)=-3$　$f(3)=3$

$f(-1)=-1$　$f(1)=1$

$f(-x)=-f(x)$ 奇函數



f(x)既不是偶函數也不是奇函數，則為非奇非偶函數.

步驟：(1) 定義域

(2) 判斷 {偶 / 奇

(1) $f(x)=x^4$

sol: $x\in R$

$f(-x)=(-x)^4=x$

$\therefore f(-x)=f(x)$

偶函數.

(2) $f(x)=x^5$

sol: $x\in R$

$f(-x)=(-x)^5=-x^5$

$f(-x)=-f(x)$

奇函數.

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

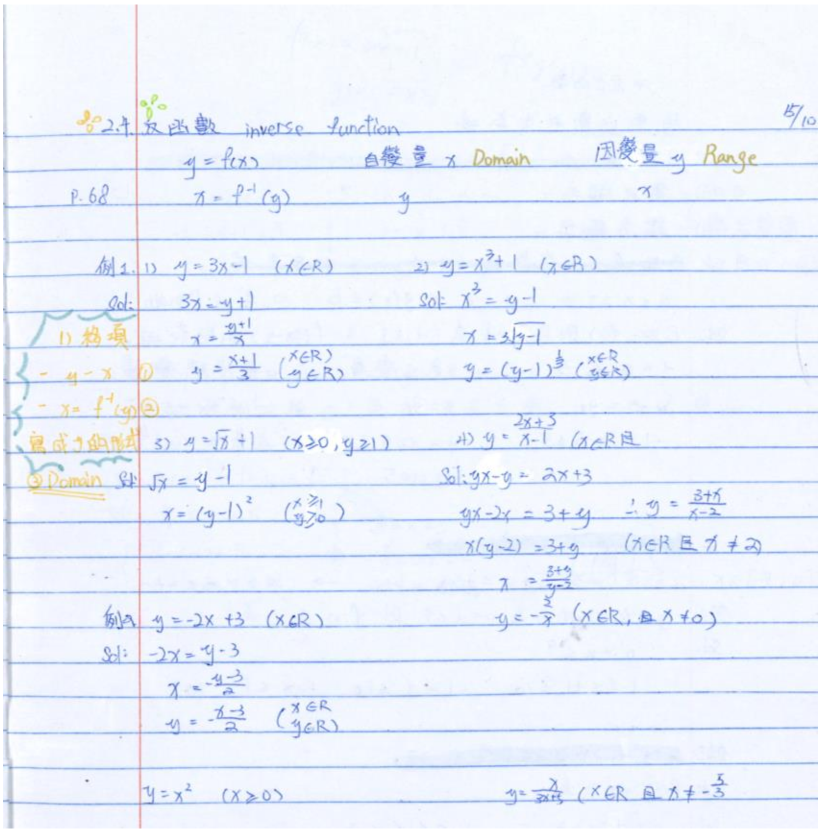
sol: $x\neq 0$

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}$

$f(-x)=\frac{1}{x^2}$

偶函數.

● **學生的筆記(反函數)**



2.4 反函數 inverse function 15/10

$y=f(x)$ 自變量 x Domain 因變量 y Range

p.68 $x=f^{-1}(y)$ y x

例1. 1) $y=3x-1$ $(x\in R)$

Sol: $3x=y+1$

$x=\frac{y+1}{3}$

$y=\frac{x+1}{3}$ $\binom{x\in R}{y\in R}$

2) $y=x^3+1$ $(x\in R)$

Sol: $x^3=y-1$

$x=\sqrt[3]{y-1}$

$y=(y-1)^{\frac{1}{3}}$ $\binom{x\in R}{y\in R}$

1) 移項

- $y \to x$ ①
- $x=f^{-1}(y)$ ②

寫成y的形式

② Domain

3) $y=\sqrt{x}+1$ $(x\geq 0, y\geq 1)$

Sol: $\sqrt{x}=y-1$

$x=(y-1)^2$ $\binom{x\geq 1}{y\geq 0}$

4) $y=\frac{2x+3}{x-1}$ ($x\in R$ 且

Sol: $yx-y=2x+3$

$yx-2x=3+y$

$x(y-2)=3+y$

$x=\frac{3+y}{y-2}$

$\therefore y=\frac{3+x}{x-2}$ ($x\in R$ 且 $x\neq 2$)

例2. $y=-2x+3$ $(x\in R)$

Sol: $-2x=y-3$

$x=-\frac{y-3}{2}$

$y=-\frac{x-3}{2}$ $\binom{x\in R}{y\in R}$

$y=-\frac{3}{x}$ ($x\in R$, 且 $x\neq 0$)

$y=x^2$ $(x\geq 0)$

$y=\frac{x}{3x+5}$ ($x\in R$ 且 $x\neq -\frac{5}{3}$

Date Page

2.4 反函數

	Domain	Range
$y=f(x)$	自變量 x	因變量 y
$x=f^{-1}(y)$	y	x

p.68 例1. 求反函數

(1) $y=3x-1$ $(x\in R)$

sol: $3x=y+1$

$x=\frac{y+1}{3}$

$\therefore y=\frac{x+1}{3}$ $(x\in R)$ $(y\in R)$

步驟

① $y\longrightarrow x$

② $y=f^{-1}(x)$

寫成 y 的形式

(2) $y=x^3+1$ $(x\in R)$

sol: $x^3=y-1$

$x=\sqrt[3]{y-1}$

$x=(y-1)^{\frac{1}{3}}$

$y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ $(x\in R)$ $(y\in R)$ $f^{-1}(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$

(3) $y=\sqrt{x}+1$ $(x\geq 0)$ $(y\geq 1)$

sol: $\sqrt{x}=y-1$

$x=(y-1)^2$

$\therefore y=(x-1)^2$ $x\geq 1$, $y\geq 0$

(4) $y=\frac{2x+3}{x-1}$ $(x\in R$ 且 $x\neq 1)$

sol: $\boxed{\text{值域 } y=\frac{x-1+x-1+5}{x-1}}$

$=1+1+\frac{5}{x-1}$

$=2+\frac{5}{x-1}$

$yx-y=2x+3$

$yx-2x=3+y$

$x=\frac{3+y}{y-2}$

$\therefore y=\frac{3+x}{x-2}$ $(x\in R$ 且 $x\neq 2)$

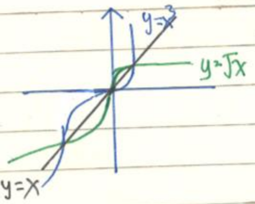
Date Page

例3 $y=x^3$ $(x\in R)$

sol: $x^3=y$

$x=\sqrt[3]{y}$

$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



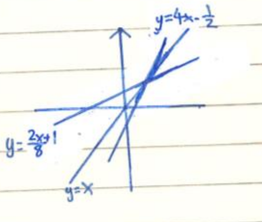
函數 $y=f(x)$ 的圖象和它的反函數 $y=f^{-1}(x)$ 的圖象关于直線 $y=x$ 對稱

p70 (1) $y=4x-\frac{1}{2}$ $(x\in R)$

$4x=y+\frac{1}{2}$

$x=\frac{2y+1}{8}$

$f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{8}$ $(x\in R)$



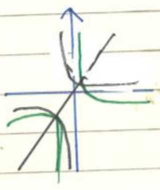
(2) $y=\frac{1}{x+3}$ $(x\in R$ 且 $x\neq -3)$

$y(x+3)=1$

$yx+3y=1$

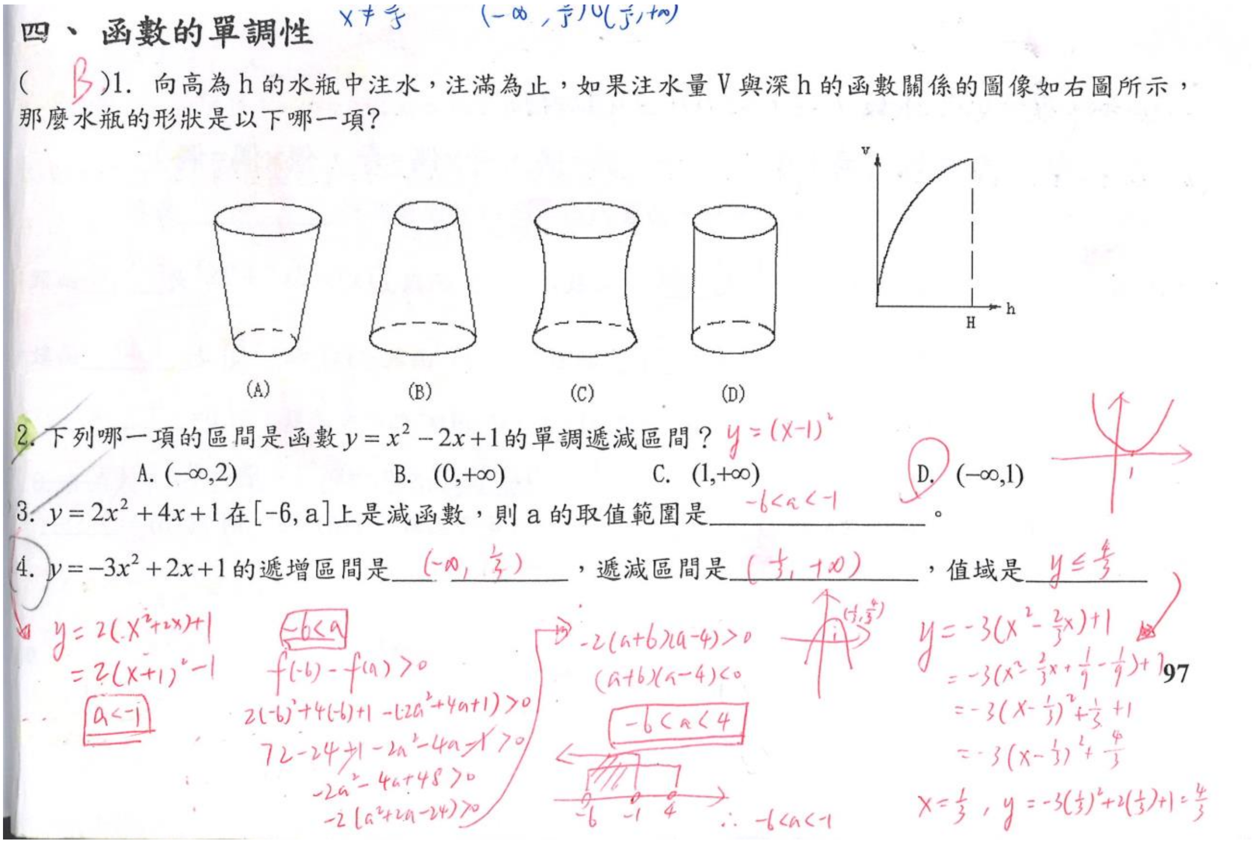
$x=\frac{1-3y}{y}$

$f^{-1}(x)=\frac{1-3x}{x}$ $(x\neq 0)$



- **輔助教學資料(校本補充教材)**

- **函數單調性、奇偶性及反函數教材照片**



四、函數的單調性

$x \neq \frac{1}{3}$　$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

(B)1. 向高為 h 的水瓶中注水，注滿為止，如果注水量 V 與深 h 的函數關係的圖像如右圖所示，那麼水瓶的形狀是以下哪一項?

(A)　(B)　(C)　(D)

2. 下列哪一項的區間是函數 $y = x^2 - 2x + 1$ 的單調遞減區間？ $y = (x-1)^2$

A. $(-\infty, 2)$　B. $(0, +\infty)$　C. $(1, +\infty)$　D. $(-\infty, 1)$

3. $y = 2x^2 + 4x + 1$ 在 $[-6, a]$ 上是減函數，則 a 的取值範圍是 $-6 < a < -1$。

4. $y = -3x^2 + 2x + 1$ 的遞增區間是 $(-\infty, \frac{1}{3})$，遞減區間是 $(\frac{1}{3}, +\infty)$，值域是 $y \leq \frac{4}{3}$

$y = 2(x^2 + 2x) + 1$
$= 2(x+1)^2 - 1$
$\boxed{a < -1}$

$\boxed{-6 < a}$
$f(-6) - f(a) > 0$
$2(-6)^2 + 4(-6) + 1 - (2a^2 + 4a + 1) > 0$
$72 - 24 + \cancel{1} - 2a^2 - 4a - \cancel{1} > 0$
$-2a^2 - 4a + 48 > 0$
$-2(a^2 + 2a - 24) > 0$

$-2(a+6)(a-4) > 0$
$(a+6)(a-4) < 0$
$\boxed{-6 < a < 4}$
-6　-1　4
$\therefore -6 < a < -1$

$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

$y = -3(x^2 - \frac{2}{3}x) + 1$
$= -3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}) + 1$
$= -3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} + 1$
$= -3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{4}{3}$
$x = \frac{1}{3}$, $y = -3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3}) + 1 = \frac{4}{3}$

97

$x_1<x_2$　$x_1-x_2<0$

$f(x_1)-f(x_2)<0$

$(2k+1)x_1+1-(2k+1)x_2-1<0$

$(2k+1)(x_1-x_2)<0$

$2k+1>0$

$2k>-1$

$k>-\frac{1}{2}$

5. $y=(2k+1)x+1$ 在 R 上是增函數，則 k 的範圍是 $k>-\frac{1}{2}$

12/10

6. (1)證明： $y=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函數

pf：設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-x_2<0$

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-3-x_2^2+3$

$=x_1^2-x_2^2$

$=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$

$\therefore y=x^2-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是減函数

(2) 證明：$y=-2x-3$ 在 R 上是減函數

pf：設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-x_2<0$

$f(x_1)-f(x_2)=-2x_1-3+2x_2+3$

$=-2(x_1-x_2)>0$

$=2(x_2-x_1)>0$

$\therefore y=-2x-3$ 在 R 上是减函数.

(3) 證明：$y=-\frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數

pf：設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-x_2<0$

$f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{x_1}-3+\frac{1}{x_2}+3$

$=-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

$=\frac{-x_2+x_1}{x_1x_2}<0$

$\therefore y=-\frac{1}{x}-3$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

(4) 證明：函數 $y=\frac{2}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數

pf：設 $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{x_1^2}-\frac{2}{x_2^2}$

$=\frac{2(x_2^2-x_1^2)}{x_1^2x_2^2}$

$=\frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1x_2)^2}<0$

$\therefore y=\frac{2}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数

$f(x)=0$（既奇且偶函数）关于原点对称且y軸对称

五、 函數的奇偶性（奇+奇=奇，偶+偶=偶，奇×偶=奇，偶×偶=偶）

1. 函數 $f(x)=x$ 的圖像關於 原点 對稱。函數 $f(x)=x^2+1$ 的圖像關於 y軸 對稱。

2. 判斷奇偶性：(1) 函數 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$ 是 偶 函數； (2) 函數 $f(x)=3x^2+2x^3$ 是 非奇非偶 函數；

(3) 函數 $f(x)=-x^3+x$ 是 奇 函數； (4) 函數 $f(x)=x^2+|x|$ 是 偶 函數。

3. (1) $f(x)=ax^2+4x$ 是奇函數，則 a= 0 ，$f(x)=x^3+(b-4)x^2$ 也是奇函數，則 b= 4 。

(2) $f(x)=(a-1)x^3+4x^2+1$ 是偶函數，則 a= 1 ，$f(x)=x^{2016}+(b-4)x^{2015}$ 是偶函數，則 b= 4 。

4. 若 $f(x)$ 是偶函數，$f(6)=8$，則 $f(-6)=$ 8 ；若 $f(x)$ 是奇函數，$f(6)=8$，則 $f(-6)=$ -8 。

5. $y=f(x)$ is odd function and $f(1)=3$, then $f(-1)=$ -3 .

(1) $f(-x)=-f(x)$

$ax^2-4x=-ax^2-4x$

$2ax^2=0$

$-x^3+(b-4)x^2=-x^3-(b-4)x^2$

$2(b-4)x^2=0$

$b-4=0$

$b=4$

(2) $-(a-1)x^3+4x^2+1=(a-1)x^3+4x^2+1$

$2(a-1)x^3=0$

$a=1$

$x^{2016}+(b-4)x^{2015}$

$=x^{2016}-(b-4)x^{2015}$

$2(b-4)x^{2015}=0$

$b=4$

$\frac{a-1}{1+1}=\frac{-a-1}{1+1} \Rightarrow 2a=0$

已知 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x^2+1}$。若 $f(x)=f(-x)$ 總成立，則 $f(1)=$ $-\frac{1}{2}$

$f(x)=f(-x)$
$(m+1)x^2-mx+5=(m+1)x^2+mx+5$
$2mx=0$
$m=0$
$y=x^2+5$

$f(-1)=1+5=6$
$f(-\sqrt{2})=2+5=7$
$f(2)=4+5=9$

若 $y=(m+1)x^2+mx+5$ 是偶函數，則 $f(-1), f(-\sqrt{2}), f(2)$ 由小到大的順序是 $f(-1)<f(-\sqrt{2})<f(2)$。

(1) 證明：$y=\dfrac{1}{x}+x+x^3$ 是奇函數； $x\neq 0$

Pf: $f(x)=\frac{1}{x}+x+x^3$

$f(-x)=-\frac{1}{x}-x-x^3=-(\frac{1}{x}+x+x^3)=-f(x)$

$\therefore y=\frac{1}{x}+x+x^3$ 是奇函數

(2) 證明：$y=2+\dfrac{1}{x^2}+|x|+x^2$ 是偶函數； $x\neq 0$

Pf: $f(x)=2+\frac{1}{x^2}+|x|+x^2$

$f(-x)=2+\frac{1}{(-x)^2}+|-x|+(-x)^2$

$=2+\frac{1}{x^2}+|x|+x^2$

$=f(x)$

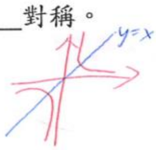
$\therefore y=2+\frac{1}{x^2}+|x|+x^2$ 是偶函數

六、反函數(掌握原函數的值域=反函數的定義域)

若點(1，4)在函數 $y=f(x)$ 的圖像上，則下列哪一點必在其反函數圖像上？(A)

A. (4，1)　　B. (-4，-1)　　C. (-1，4)　　D. (1，-4)

奇函數的圖像關於 原點 對稱；原函數的圖像與反函數的圖像關於 $y=x$ 對稱。



$2=b$

$y=3x-4$ 的反函數是 $y=\frac{x+4}{3}$；$y=\dfrac{3x+5}{5x-3}$ 的反函數是 $y=\frac{5+3x}{5x-3}$。

$y=2x^3+1(x\in R)$ 的反函數是 $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}\ (x\in R)$。

$y=\frac{x-b}{k}$　　$-1=\frac{3-2}{k} \Rightarrow k=-1$

函數 $f(x)=kx+b$ 的圖象經過點 $(0,2)$，其反函數經過點 $(3,-1)$，函數 $f(x)$ 的解析式為 $f(x)=-x+2$。

$y\leq\frac{1}{8}$

若 $f(x)=-2x^2+x$，$x\in[-2,0]$，則 $f^{-1}(x)$ 的定義域為 $x\in(-\infty,\frac{1}{8})$；

$3(y-b)=x$
$y=3x-3b$
$y=ax+5$

已知 $y=\dfrac{1}{3}x+b$ 與 $y=ax+5$ 互為反函數，則常數 a，b 的值分別是 3 和 $-\frac{5}{3}$。

若點（2，3）既在函數 $y=1+\sqrt{ax+b}$ 的圖像上，又在其反函數的圖像上，則 $ab=$ -30

$y-5=ax$
$\frac{y-5}{a}=x$
$\therefore y=\frac{x-5}{a}$
$y=\frac{x}{a}-\frac{5}{a}$
$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$
$a=3$
$b=-\frac{5}{3}$

$y=\frac{(x-1)^2-b}{a}$

$3=1+\sqrt{2a+b}$
$2=\sqrt{2a+b}$
$4=2a+b$

$3=\frac{1-b}{a}$
$3a=1-b$
$3a+b=1$

$\begin{cases}2a+b=4\\3a+b=1\end{cases}$

$a=-3$
$b=10$

求函數 $y=x^2-3x-6\ (2\leq x\leq 4)$ 的反函數。

Sol: $y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{33}{4}$

$\pm\sqrt{y+\frac{33}{4}}=x-\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{y+\frac{33}{4}}$

$\therefore$ 反函數是 $y=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{4x+33}}{2}$

$4x+33\geq 0$
$4x\geq -33$
$x\geq -\frac{33}{4}$

10. 求函數 $y=x^2-4x-6\ (3\leq x\leq 6)$ 的反函數。

Sol: $y=(x-2)^2-10$

$y+10=(x-2)^2$

$\pm\sqrt{y+10}=x-2$

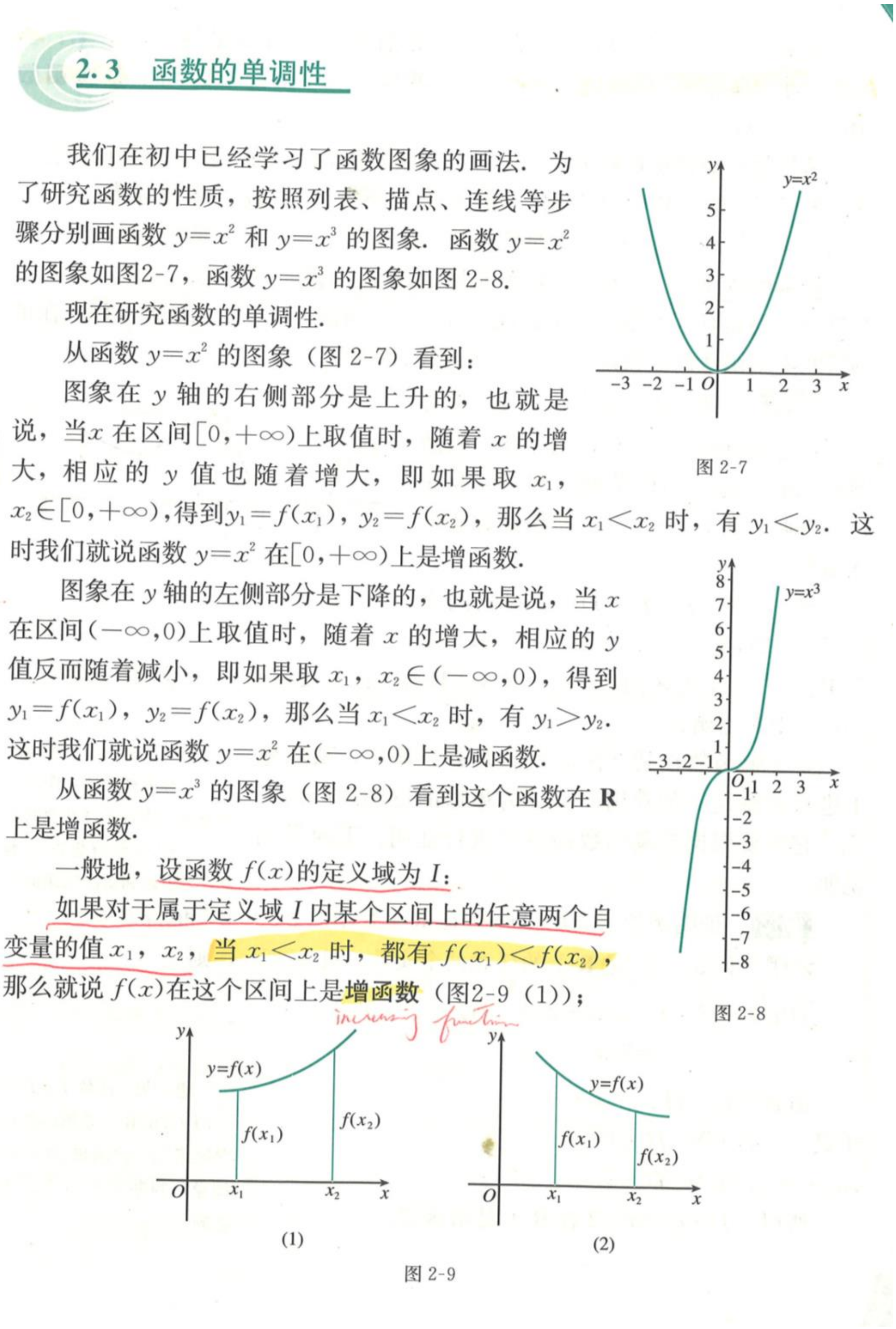
$x=2\pm\sqrt{y+10}$

$\therefore$ 反函數是 $y=2\pm\sqrt{x+10}$

$x+10\geq 0$
$x\geq -10$

教材課件

函數單調性課本照片



2.3 函数的单调性

我们在初中已经学习了函数图象的画法．为了研究函数的性质，按照列表、描点、连线等步骤分别画函数 $y=x^2$ 和 $y=x^3$ 的图象．函数 $y=x^2$ 的图象如图2-7，函数 $y=x^3$ 的图象如图 2-8．

现在研究函数的单调性．

从函数 $y=x^2$ 的图象（图 2-7）看到：

图象在 y 轴的右侧部分是上升的，也就是说，当 x 在区间 $[0,+\infty)$ 上取值时，随着 x 的增大，相应的 y 值也随着增大，即如果取 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，得到 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，那么当 $x_1<x_2$ 时，有 $y_1<y_2$．这时我们就说函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数．

图 2-7

图象在 y 轴的左侧部分是下降的，也就是说，当 x 在区间 $(-\infty,0)$ 上取值时，随着 x 的增大，相应的 y 值反而随着减小，即如果取 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，得到 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，那么当 $x_1<x_2$ 时，有 $y_1>y_2$．这时我们就说函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数．

从函数 $y=x^3$ 的图象（图 2-8）看到这个函数在 **R** 上是增函数．

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数**（图2-9（1））；

图 2-8

increasing function

(1)　(2)

图 2-9

如果对于属于定义域 I 内某个区间的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**减函数**（图 2-9（2））.

decreasing function

函数是增函数还是减函数，是对定义域内某个区间而言的. 有的函数在一些区间上是增函数，而在另一些区间上不是增函数. 例如函数 $y=x^2$（图 2-7），当 $x\in[0,+\infty)$ 时是增函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时是减函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有（严格的）**单调性**，这一区间叫做 $y=f(x)$ 的**单调区间**. 在单调区间上增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的.

例 1 图 2-10 是定义在闭区间 $[-5,5]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象，根据图象说出 $y=f(x)$ 的单调区间，以及在每一单调区间上，$y=f(x)$ 是增函数还是减函数.

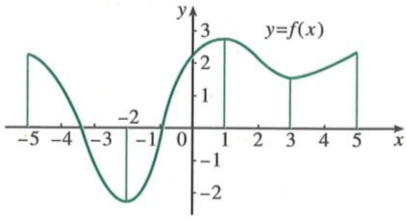


图 2-10

解： 函数 $y=f(x)$ 的单调区间有 $[-5,-2)$，$[-2,1)$，$[1,3)$，$[3,5]$，其中 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,-2)$，$[1,3)$ 上是减函数，在区间 $[-2,1)$，$[3,5]$ 上是增函数.

要了解函数在某一区间是否具有单调性，从图象上进行观察是一种常用而又较为粗略的方法. 严格地说，它需要根据单调函数的定义进行证明，下面举例说明.

通过观察图象，对函数是否具有某种性质，作出一种猜想，然后通过推理的办法，证明这种猜想的正确性，是发现和解决问题的一种常用数学方法.

$x\in R.$

例 2 证明函数 $f(x)=3x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

证明： 设 x_1，x_2 是 $\mathbf{R}$ 上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)$$
$$=3(x_1-x_2).$$

由 $x_1<x_2$，得 $x_1-x_2<0$，

于是 $\quad f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $\quad f(x_1)<f(x_2)$.

所以，$f(x)=3x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

想一想：函数 $f(x)=-3x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数还是减函数？试画出 $f(x)$ 的图象，判断你的结论是否正确.

单调，奇偶，先求 Domain

$x\neq0$

例 3 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

证明： 设 x_1，x_2 是 $(0,+\infty)$ 上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}.$$

由 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，得 $x_1x_2>0$，

又由 $x_1<x_2$，得 $x_2-x_1>0$，

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

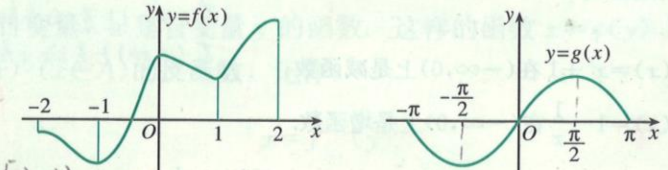
即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

想一想：如果 $x\in(-\infty,0)$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是增函数还是减函数？并证明你的结论.

练习

1. 如图，已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象（包括端点），根据图象说出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，函数是增函数还是减函数.



$[-2,-1]$ $[-1,0]$ $[0,1]$，$[1,2]$

↓ ↑ ↓ ↑

（第 1 题）

$[-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$[\frac{\pi}{2},\pi]$

↓ ↑ ↓

2. 证明函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

3. 证明函数 $f(x)=\dfrac{3}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数.

4. 判断函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数还是减函数？增

$x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+1-x_2^2-1=x_1^2-x_2^2<0$

$f(x_1)<f(x_2)$

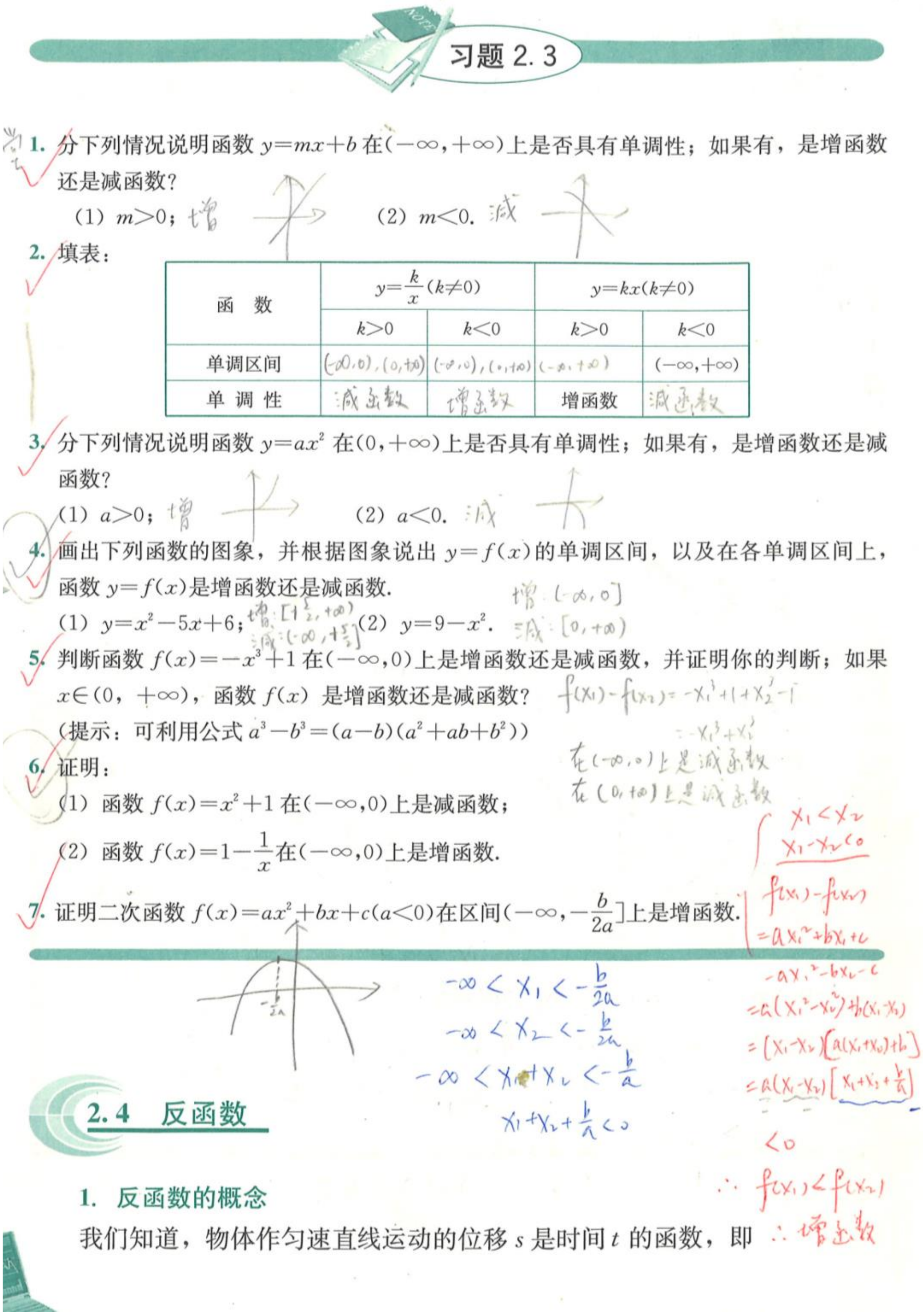
$x_1<x_2$

2. $f(x_1)-f(x_2)=-2x_1+1+2x_2-1=2(x_2-x_1)>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

3. $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{3}{x_1}-\dfrac{3}{x_2}=\dfrac{3(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$



习题 2.3

1. 分下列情况说明函数 $y=mx+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否具有单调性；如果有，是增函数还是减函数？

   (1) $m>0$；增　　(2) $m<0$. 减

2. 填表：

函数	$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$		$y=kx(k\neq0)$	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
单调区间	$(-\infty,0),(0,+\infty)$	$(-\infty,0),(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	减函数	增函数	增函数	减函数

3. 分下列情况说明函数 $y=ax^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否具有单调性；如果有，是增函数还是减函数？

   (1) $a>0$；增　　(2) $a<0$. 减

4. 画出下列函数的图象，并根据图象说出 $y=f(x)$ 的单调区间，以及在各单调区间上，函数 $y=f(x)$ 是增函数还是减函数.

   (1) $y=x^2-5x+6$；增：$[1\frac{1}{2},+\infty)$　减：$(-\infty,1\frac{1}{2}]$　(2) $y=9-x^2$. 增：$(-\infty,0]$　减：$[0,+\infty)$

5. 判断函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数还是减函数，并证明你的判断；如果 $x\in(0,+\infty)$，函数 $f(x)$ 是增函数还是减函数？

   (提示：可利用公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)

   $f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3+1+x_2^3-1$
   $=-x_1^3+x_2^3$
   在 $(-\infty,0)$ 上是减函数
   在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

6. 证明：

   (1) 函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数；

   (2) 函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

7. 证明二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上是增函数.

$x_1<x_2$
$x_1-x_2<0$
$f(x_1)-f(x_2)$
$=ax_1^2+bx_1+c-ax_2^2-bx_2-c$
$=a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)$
$=(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]$
$=a(x_1-x_2)[x_1+x_2+\frac{b}{a}]$
<0
$\therefore f(x_1)<f(x_2)$
$\therefore$ 增函数

$-\frac{b}{2a}$

$-\infty<x_1<-\frac{b}{2a}$
$-\infty<x_2<-\frac{b}{2a}$
$-\infty<x_1+x_2<-\frac{b}{a}$
$x_1+x_2+\frac{b}{a}<0$

2.4 反函数

1. 反函数的概念

我们知道，物体作匀速直线运动的位移 s 是时间 t 的函数，即

反函數課本照片

$$s=vt,$$

其中速度 v 是常量. 反过来，也可以由位移 s 和速度 v（常量）确定物体作匀速直线运动的时间，即

$$t=\frac{s}{v},$$

这时，位移 s 是自变量，时间 t 是位移 s 的函数.

在这种情况下，我们就说 $t=\frac{s}{v}$ 是函数 $s=vt$ 的反函数.

又例如，在函数 $y=2x+6$（$x\in\mathbf{R}$）中，x 是自变量，y 是 x 的函数．由 $y=2x+6$ 可以得到式子 $x=\frac{y}{2}-3$（$y\in\mathbf{R}$）. 这样，对于 y 在 $\mathbf{R}$ 中任何一个值，通过式子 $x=\frac{y}{2}-3$，x 在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一的值和它对应. 也就是说，可以把 y 作为自变量（$y\in\mathbf{R}$），x 作为 y 的函数，这时我们就说 $x=\frac{y}{2}-3$（$y\in\mathbf{R}$）是函数 $y=2x+6$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数.

一般地，函数 $y=f(x)$（$x\in A$）中，设它的值域为 C. 我们根据这个函数中 x，y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么，$x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)$（$y\in C$）叫做函数 $y=f(x)$（$x\in A$）的**反函数**，记作

步骤：
①求 x
② x → y.
③ Domain

$$x=f^{-1}(y).$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 表示自变量，x 表示函数. 但在习惯上，我们一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为此我们常常对调函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$（在本书中，今后凡不特别说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都采用这种经过改写的形式）. 例如函数 $y=2x$ 的反函数为 $y=\frac{x}{2}$（$x\in\mathbf{R}$），函数 $y=5x-6$ 的反函数为 $y=\frac{x+6}{5}$（$x\in\mathbf{R}$）等.

从反函数的概念可知，如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $y=f(x)$，这就是说，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

从映射的概念可知，函数 $y=f(x)$是定义域集合 A 到值域集合 C 的映射，而它的反函数 $y=f^{-1}(x)$是集合 C 到集合 A 的映射.

函数 $y=f(x)$的定义域，正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域；函数 $y=f(x)$的值域，正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域（如下表）.

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	A	C
值　域	C	A

例 1　求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1(x\in\mathbf{R})$；　$y\in\mathbb{R}$

(2) $y=x^3+1(x\in\mathbf{R})$；　$y\in\mathbb{R}$.

(3) $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$；　$y\geq 1$

(4) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in\mathbf{R},且\ x\neq 1)$.　$y=\dfrac{x-1+x-1+5}{x-1}=1+1+\dfrac{5}{x-1}=2+\dfrac{5}{x-1}$

$(y\in\mathbb{R}\ 且\ y\neq 2)$

解：(1) 由 $y=3x-1$，得 $x=\dfrac{y+1}{3}$，所以，函数 $y=3x-1(x\in\mathbf{R})$的反函数是

$$y=\frac{x+1}{3}(x\in\mathbf{R})；\quad y\in\mathbb{R}$$

(2) 由函数 $y=x^3+1(x\in\mathbf{R})$，得 $x=\sqrt[3]{y-1}$，所以，函数 $y=x^3+1$ $(x\in\mathbf{R})$的反函数是

$$y=\sqrt[3]{x-1}\ (x\in\mathbf{R})；\quad y\in\mathbb{R}$$

(3) 由函数 $y=\sqrt{x}+1$，得 $x=(y-1)^2$，所以，函数 $y=\sqrt{x}+1$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数是

$$y=(x-1)^2\ (x\geqslant 1)；\quad y\geq 0.$$

(4) 由函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$，得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$，所以，函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ $(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 1)$ 的反函数是

$$y=\frac{x+3}{x-2}\ (x\in\mathbf{R}，且\ x\neq 2).$$

2. 互为反函数的函数图象间的关系

如果函数 $y=f(x)$ $(x\in A)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，那么在直角坐标系 xOy 中，它们的图象有什么关系呢？

我们看下面的问题.

例 2 求函数 $y=3x-2$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数，并且画出原来的函数和它的反函数的图象.

解：由 $y=3x-2$，得 $x=\dfrac{y+2}{3}$. 因此，函数 $y=3x-2$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是

$$y=\frac{x+2}{3}\ (x\in\mathbf{R}).$$

函数 $y=3x-2$ $(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象如图 2-11 中所示.

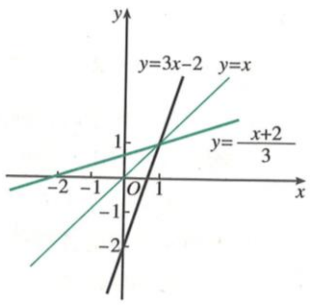


图 2-11

例 3 求函数 $y=x^3$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数，并画出原来的函数和它的反函数的图象.

解：由 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}$. 因此，函数 $y=x^3$ 的反函数是

$$y=\sqrt[3]{x}\ (x\in\mathbf{R}).$$

函数 $y=x^3$ $(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象如图 2-12 所示.

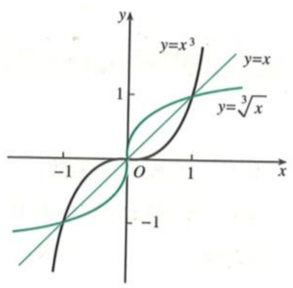


图 2-12

从图 2-11 可以看出，函数 $y=3x-2$ $(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

从图 2-12 可以看出，函数 $y=x^3$ $(x\in\mathbf{R})$ 和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，**函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $\boxed{y=x}$ 对称.**

练 习

15/10

已知函数 $y=f(x)$，求它的反函数 $y=f^{-1}(x)$：

1. $y=-2x+3$ （$x\in\mathbf{R}$）． $2x=3-y$ $x=\frac{3-y}{2}$ $y=\frac{3-x}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$
2. $y=-\frac{2}{x}$ （$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$）． $y=-\frac{2}{x}$ $(x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq0)$
3. $y=x^2$ （$x\geqslant0$）． $y=\pm\sqrt{x}$ $(x\geq0)$
4. $y=\frac{x}{3x+5}$ （$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-\frac{5}{3}$）． $x=-\frac{5y}{3y-1}$ $y=-\frac{5x}{3x-1}$ $(x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{3})$
5. （1）在直角坐标系内，画出直线 $y=x$，然后找出下面这些点关于直线 $y=x$ 的对称点，并写出它们的坐标（不必说明理由）：

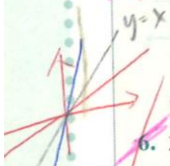
   A（2，3），B（1，0），C（-2，-1），D（0，-1）．

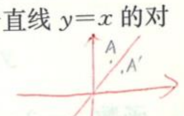
   $A'(3,2)$ $B'(0,1)$ $C'(-1,-2)$ $D'(-1,0)$

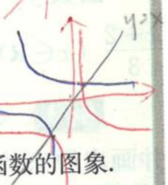
   （2）上面所求得的各对称点的坐标同原来的点的坐标有什么关系？
6. 求下列函数的反函数，并画出函数及其反函数的图象：

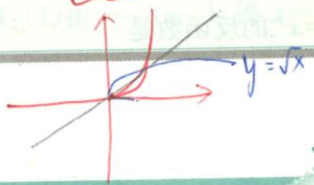
   （1）$y=4x-\frac{1}{2}$（$x\in\mathbf{R}$）；　（2）$y=\frac{1}{x+3}$（$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-3$）．

   $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{8}$ $(x\in\mathbb{R})$　$y=\frac{1}{x}-3$ $(x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq0)$
7. 画出函数 $y=x^2$（$x\in[0,+\infty)$）的图象，再利用对称关系画出它的反函数的图象．









习题 2.4

1. 求下列函数的反函数：

   （1）$y=-4x+3$（$x\in\mathbf{R}$）； $y=\frac{3-x}{4}$ $(x\in\mathbb{R})$

   （2）$y=x^3+4$（$x\in\mathbf{R}$）； $y=\sqrt[3]{x-4}$ $(x\in\mathbb{R})$

   （3）$y=x^2$（$x\leqslant0$）； $y=\pm\sqrt{x}$ $(x\geq0)$

   （4）$y=1-\frac{2}{x+3}$（$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-3$）； $y=\frac{2}{1-x}-3$ $(x\neq1)$ $y=\frac{2-3+3x}{1-x}=\frac{-1+3x}{1-x}$

   （5）$y=\frac{2x-3}{5x+1}$（$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-\frac{1}{5}$）； $y=\frac{x+3}{2-5x}$ $(x\neq\frac{2}{5})$

   （6）$y=\frac{4x+1}{5x-3}$（$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq\frac{3}{5}$）； $y=\frac{1+3x}{5x-4}$ $(x\neq\frac{4}{5})$

   （7）$y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}+1$（$x\in\mathbf{R}$）； $y=1+2(x-1)^3$ $(x\in\mathbb{R})$

高中数学 第一册（上）

$x^2-25\le 0$

$-5\le x\le 5$

$25-x^2\ge 0$

$0\le x\le \frac{5}{2}$

$0\le x^2\le \frac{25}{4}$

$0\le 4x^2\le 25$

~~(8)~~ $y=\sqrt{2x-4}$ $(x\geq 2)$. $y=\frac{x^2+4}{2}$ $(x\ge 0$ ~~$x\in R$~~$)$

~~2.~~ 已知函数 $y=\sqrt{25-4x^2}$ $(x\in[0,\frac{5}{2}])$，求它的反函数. $y=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$ $(0\le x\le 5)$

$y\in[0,5]$

$0\ge -4x^2\ge -25$

$25\ge 25-4x^2\ge 0$

$5\ge\sqrt{25-4x^2}\ge 0$

3. 已知函数 $y=2|x|$.

(1) 当 $x\in[0,+\infty)$时，求它的反函数，并指出反函数的定义域； $y=\frac{|x|}{2}$ $(x\ge 0)$

(2) 在同一坐标系内画出函数 $y=2|x|$ $(x\in[0,+\infty))$及其反函数的图象.

*4. 已知 $y=\frac{1}{5}x+b$ 与 $y=ax+3$ 互为反函数，求常数 a，b 的值.

$y=\frac{1}{5}x+b$

$y-b=\frac{1}{5}x$

$5(y-b)=x$

$\therefore y=5(x-b)$

$y=5x-5b$

$y=ax+3$

$5=a$

$b=-\frac{3}{5}$

*5. 求证函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$ 的反函数是该函数自身.

*6. 举例说明，在同一个坐标系内：

(1) $y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象有什么关系？

(2) $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图象有什么关系？

5. $y+yx=1-x$

$x(y+1)=1-y$

$x=\frac{1-y}{y+1}$

$\therefore y=\frac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$

$\therefore$ Q.E.D.

3. 求 $f(x)=x^2-4x+3$，$x\in[-1,3]$ 的值域

Sol: $f(x)=x^2-4x+4-1$

$=(x-2)^2-1$

$x=2$, $y_{min}=-1$

$(x-2)^2\ge 0$

$(x-2)^2-1\ge -1$

$y\ge -1$

$x=-1$ 时，$y=8$

$\therefore y\in[-1,8]$

$y+1=(x-2)^2$

$\pm\sqrt{y+1}+2=x$

$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x+1}+2$

$-1\le\sqrt{x+1}+2\le 3$

$-3\le\sqrt{x+1}\le 1$

$-3\le\sqrt{x+1}$

$9<x+1$

$8<x$

$\sqrt{x+1}\le 1$

$x+1\le 1$

$x\le 0$

Quiz

1. 判断奇偶性.

$f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(-x)=-x+\frac{1}{(-x)}$

$=-(x+\frac{1}{x})$

$=-f(x)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$

$\therefore$ 原函数是奇函数

2. 證明在$(-\infty,0)$是减函数

$f(x)=2x^2+4$

Pf: 设 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)$

$=2(x_1)^2+4-2(x_2)^2-4$

$=2(x_1^2-x_2^2)$

$=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$

$x_1-x_2<0$

$x_1+x_2<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

$\therefore f(x)=2x^2+4$在$(-\infty,0)$是减函数

4. $f(x)=\frac{3x+5}{5x-3}$，$x\neq\frac{3}{5}$ 的反函数

$5xy-3y=3x+5$

$x(5y-3)=5+3y$

$x=\frac{5+3y}{5y-3}$

$f^{-1}(x)=\frac{5+3x}{5x-3}$

$x\neq\frac{3}{5}$