2018/2019 學年教學設計獎勵計劃

極座標
Polar Coordinates

參選類型：教案

參選編號：**C118**

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高三(理組)

簡介

解析幾何（英語：Analytic geometry），是一種借助解析式進行圖形研究的幾何學分支。在中學課本中，解析幾何被簡單地解釋為：採用數值的方法來定義幾何形狀，並從數值的輸出中而獲得一些資訊。然而，這些資訊可能是一個方程或者是一種幾何形狀。

在中學課程中，解析幾何通常使用二維的平面直角坐標系及極坐標系統來研究直線、圓、圓錐曲線、心臟線、擺線、玫瑰線等各種一般平面曲線及它們的方程，並定義一些圖形的概念和參數。在初中時，對於“極坐標系統”老師曾經在課程中簡單提過外，沒有其他章節會有較深入的探討，所以同學對於“極坐標系統”比較陌生。

是次教學設計計劃主要是對 “平面直角坐標及極坐標之間的變換”、“平面直角坐標方程及極坐標方程的變換”、“極坐標作圖”、 “極坐標下曲線扇形面積計算”及“極坐標曲線方程上水平及垂直於極軸的切線的求法”五個課題作簡單的探討，藉此讓學生對於“極坐標系統”有更多的認識。

目次

教學進度表

授課時間（年 － 月 － 日）	節數	課節	課題名稱	課題內容	課時（分鐘）
2019 － 03 － 14	2	3/4	I. 平面直角座標及極座標之間的變換	1. 極坐標的表示方法 2. 直角座標系統與極座標系統之間的關係 3. 直角座標與極座標中點的變換	80
2019 － 03 － 15	2	7/8	II. 平面直角座標曲線方程與極座標曲線方程的變換	1. 將直角座標方程轉化為極座標曲線方程	80
2019 － 03 － 18 2019 － 03 － 19 2019 － 03 － 20 2019 － 03 － 21	5	5 3 5/6 3	III. 描繪極座標方程圖像	1. 認識幾種常用極座標方程圖像 2. 極座標曲線方程的對稱性 3. 過極點的切線方程 4. 極座標曲線方程繪製 5. 利用 DESMOS 軟件輔助繪製極座標曲線	200
2019 － 03 － 21 2019 － 03 － 22 2019 － 03 － 25	4	4 7/8 5	IV. 極座標函數面積計算	1. 極座標函數面積計算 2. 求兩曲線交點的極座標 3. 兩曲線圍成的面積	160
2019 － 03 － 26 2019 － 03 － 27	3	3 5/6	V. 極座標曲線方程上水平及垂直於極軸的切線方程	1. 求極座標曲線上平行極軸的切點座標及切線方程 2. 求極座標曲線上垂直極軸的切點座標及切線方程	120

壹、教學計劃內容簡介

單元一、平面直角座標及極座標之間的變換

在數學中，”極座標系”是一個二維座標系統。該座標系統中任意位置可由一個**夾角**和一段相對原點—極點的**距離**來表示。在兩點間的關係用夾角和距離很容易表示時，極座標系便顯得尤為有用；而在平面直角座標系中，這樣的關係就只能使用三角函數來表示。極座標系的應用領域十分廣泛，包括數學、物理、工程、航海、航空以及機器人等領域。

第一單元主要是講述當我們知道一點 P 的笛卡兒座標(x, y)想轉換成極座標(r, θ)，或者，當我們知道一點 P 的極座標(r, θ)，想轉換為笛卡兒座標(x, y)的方法。

單元二、平面直角座標曲線方程與極座標曲線方程的變換

對於很多類型的曲線，如果使用平面直角座標系統表示，有時過於繁複及累贅，而用極座標系統表示會比較簡單得多。比如伯努利(lemniscate)雙紐線，蚶線（limaçon），還有心臟線(cardioid)等。或甚至對於某些曲線來說，只有極座標方程才能夠表示。

第二單元是講述將平面直角座標曲線方程轉換極座標曲線方程的互換。

單元三、 極座標曲線方程的描繪

傳統的極座標曲線繪製，由於繪製時所需步驟及數據處理的計算量較多及繁瑣，一般學生感到困難，從而失去學習興趣。為此，本單元除了用傳統的教授方法，介紹學生繪製幾種常用的極座標曲線方程，特別是心臟線的繪製方法。我們亦引入 DESMOS 這個電腦軟件，輔助學生繪製極座標曲線及輔助老師在教學的用途。

DESMOS 為一免費網上軟件，能幫助學生快速而準確地根據所輸入的數據，而繪畫出相對應的極座標曲線。利用 DESMOS 軟件，老師可鼓勵同學多嘗試、多創建一些美麗的極座標曲線，提高學生的學習興趣。DESMOS 亦能幫助老師減少教學所需的繪圖時間，從而提昇教學的效能。

單元四、 極座標函數面積計算

本單元主要是將積分在平面直角坐標系統中積出曲線面積的概念，應用積分的方法，求出極座標曲線的扇形面積。同學在設計計算過程中，必須注意極座標下曲線扇形面積的開始點及結束點。

單元五、 極座標曲線方程上平行及垂直於極軸的切線方程求法

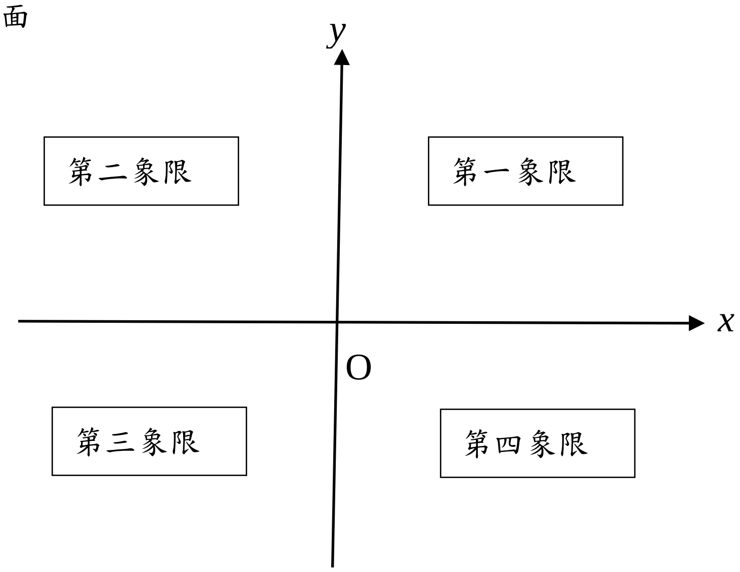
利用微分技巧在平面直角座標系統中，求極座標曲線方程上平行及垂直於極軸的切線方程的方法。

貳、教案

單元一：直角座標與極座標

教學日期：	2019/3/14
教學時間：	一節（40 分鐘）
教學對象：	F6 B/C/D
教學目標：	1. 學生知道直角座標及極座標之間的關係。 2. 學生能將直角座標轉化為極座標。 3. 學生能將極座標轉化為直角座標。
重點/難點：	重點：1）極座標與直角座標的不同表示方法。 2）極座標與直角座標中"點"的對應關係。 難點：學生難於理解當 $r < 0$ 時，"點"應如何處理。

1.1 直角座標平面



(a) 直角坐標平面由 ***x*** 軸(橫軸)和 ***y*** 軸(縱軸)兩條軸線互相垂直，兩條軸線相交於原點 ***O*** 組成，箭頭向右表示正方向；箭頭向上表示正方向。

(b) 平面上一點 **P** 的位置可記作 **P**（***m***，***n***），其中，***m*** 為橫坐標，；***n*** 為 **P** 點的縱坐標。

(c) 假設點 P(x,y)

(i)如 $x>0$ 及 $y>0$，點 P 在第一象限內。

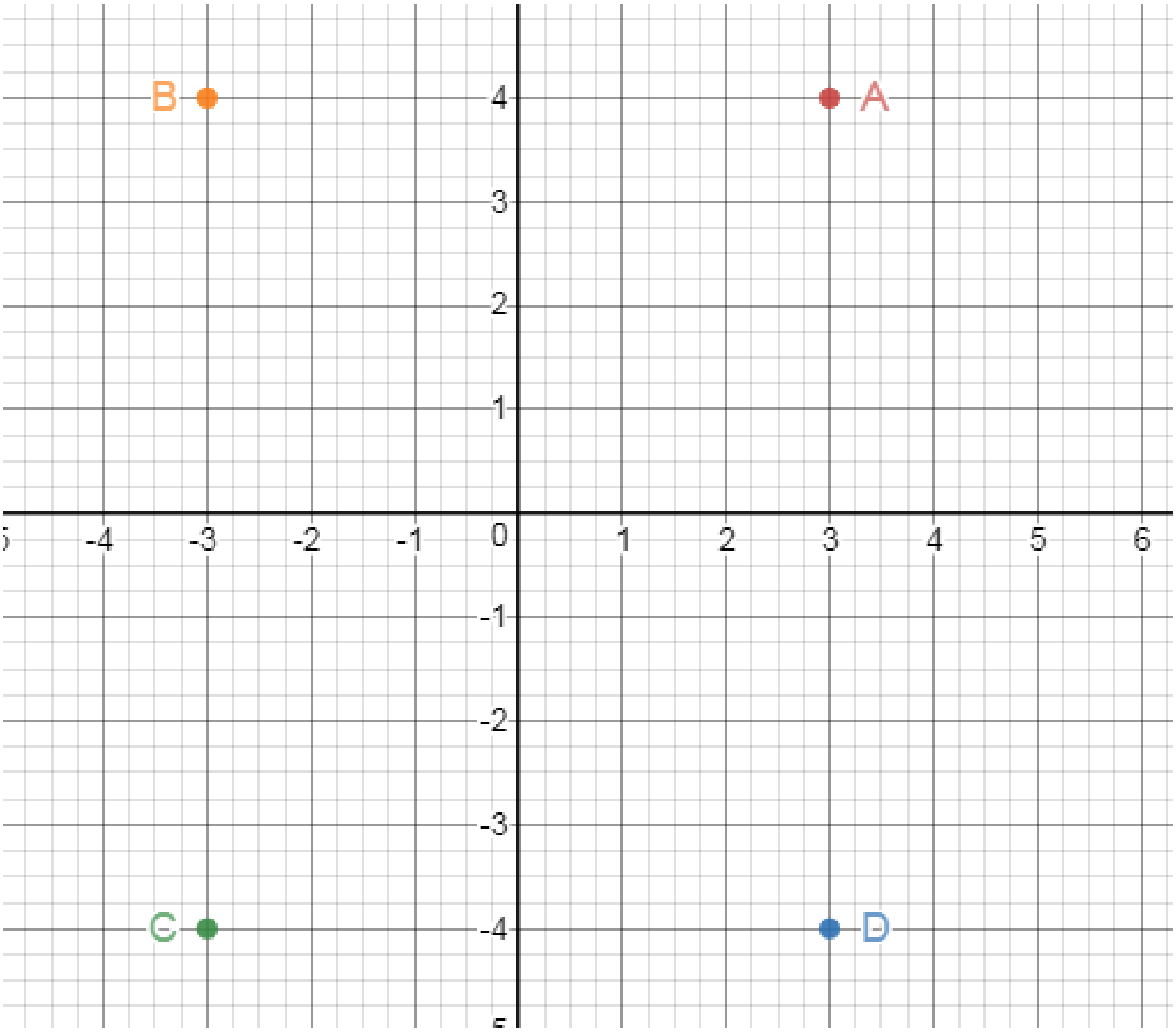
(ii) 如 $x<0$ 及 $y>0$，點 P 在第二象限內。

(iii) 如 $x<0$ 及 $y<0$，點 P 在第三象限內。

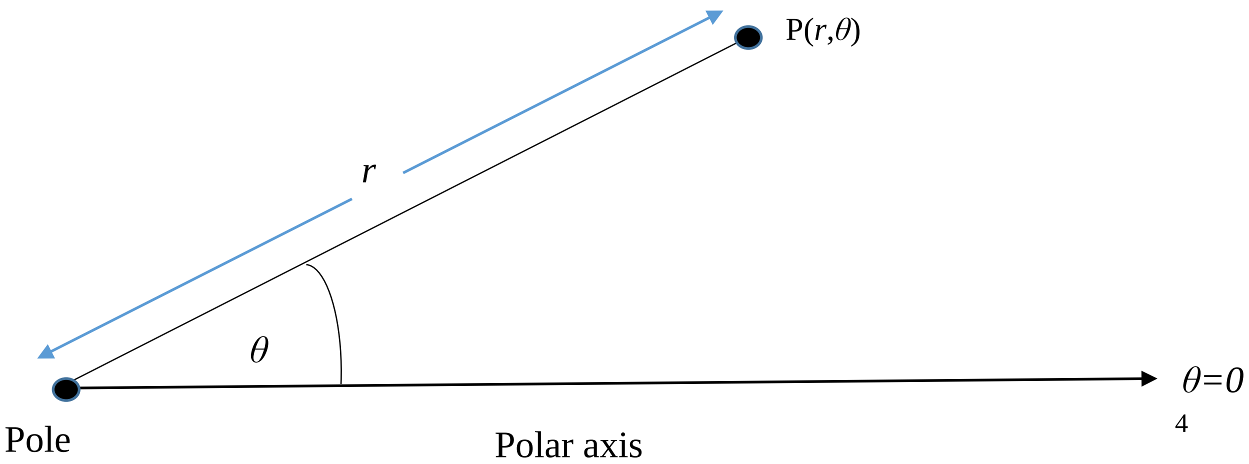
(iv) 如 $x>0$ 及 $y<0$，點 P 在第四象限內。

例子如下：

點 A(3, 4)表示由原點向右行三步，再向上行四步，點 A 在第一象限內。
點 B(−3, 4)表示由原點向左行三步，再向上行四步，點 B 在第二象限內。
點 C(−3, −4)表示由原點向左行三步，再向下行四步，點 C 在第三象限內。
點 D(3, −4)表示由原點向右行三步，再向下行四步，點 D 在第四象限內。



1.2 極座標平面



在上圖中:

r 為半徑座標

θ 為角座標、極角或方位角

極點(Pole)

極軸(Polar axis or initial line)

在極坐標系統中，P 點的表示方法為 (r,θ)

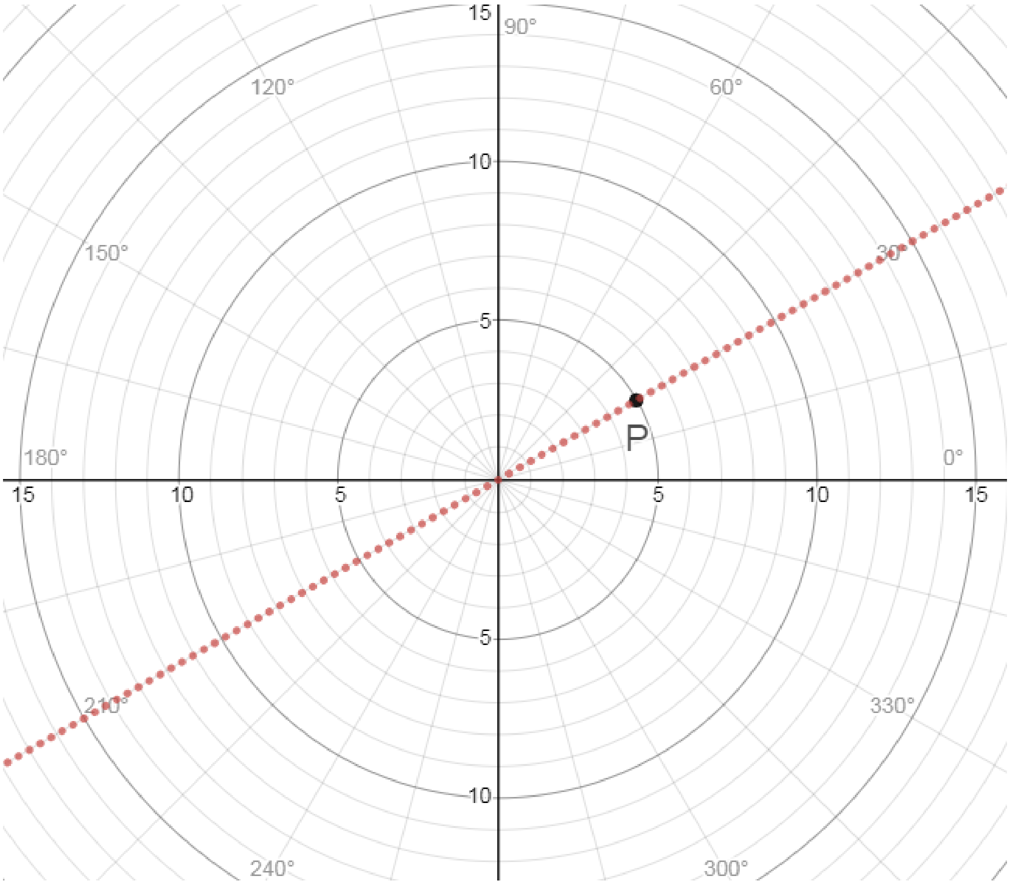
極座標平面上有兩個座標軸，r 為半徑座標，θ 為角座標、極角或方位角。

r 座標表示與極點(Pole)距離，$r>0$ 表示座標沿射線方向，$r<0$ 表示座標沿射線相反方向；$\theta>0$ 表示按逆時針方向座標距離極軸，

$\theta<0$ 表示座標按順時針方向座標距離極軸。

極座標平面有一個特性，$P(r,\theta)$ 可以有無限種表達形式，可表達為 $P(r,\theta\pm 2n\pi)$ 或 $P(-r,\theta\pm(2n+1)\pi)$，其中 n 為任意整數。

問題 1:提問學生下圖中點 P 極座標。

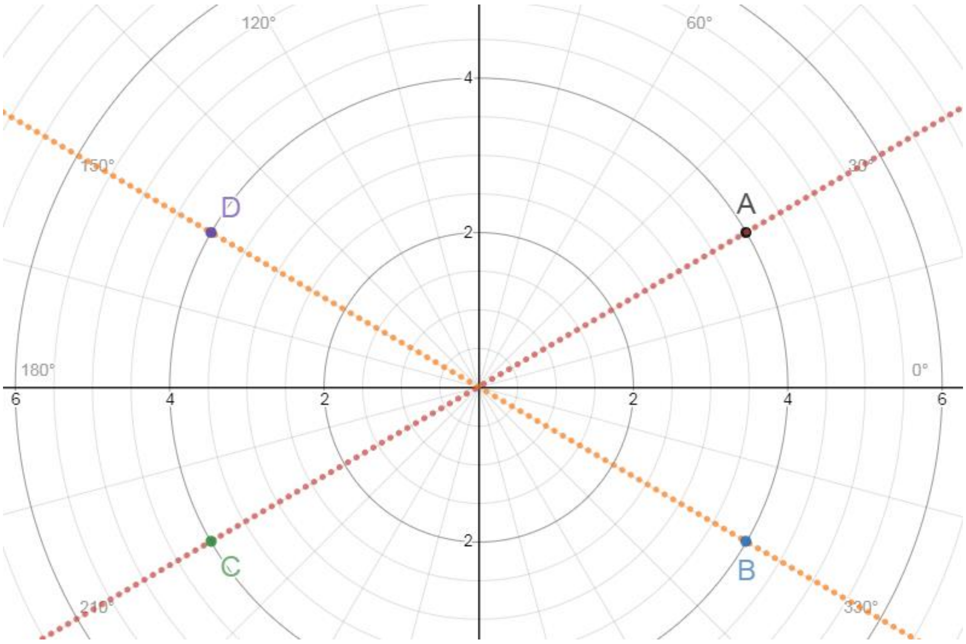


點 P 可記為 $P(5,\ \frac{\pi}{6})$，$P(-5,\ \frac{7\pi}{6})$, $P(-5,\ -\frac{5\pi}{6})$, $P(5,\ 2\pi+\frac{\pi}{6})$,

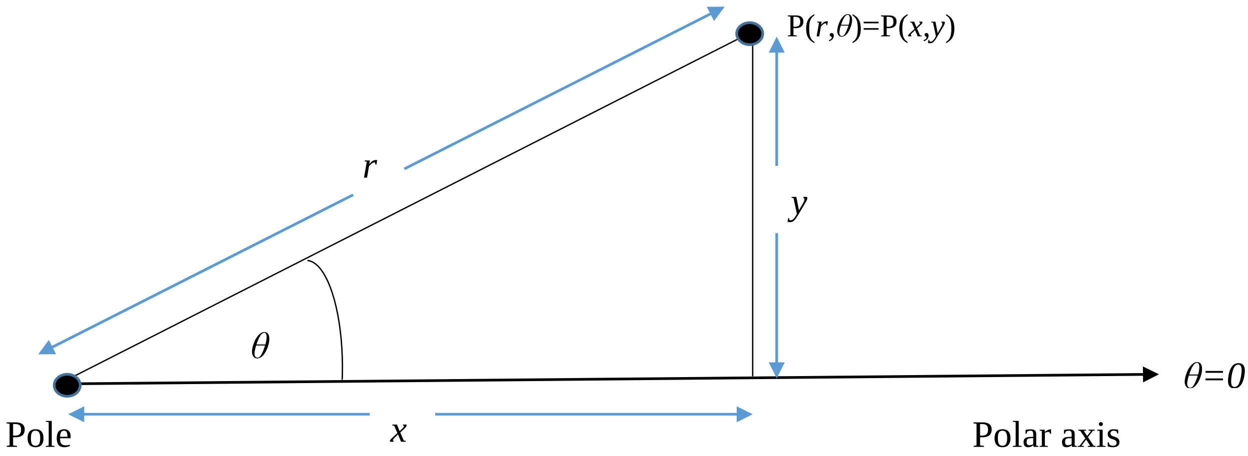
$P(5,\ 2\pi+2\pi+\frac{\pi}{6})$, $P(-5,\ -2\pi-\frac{5\pi}{6})$, $P(-5,\ -2\pi-2\pi-\frac{5\pi}{6})\ldots$

問題 2：要求學生畫出現以下座標：

A$(4, \frac{\pi}{6})$　　B$(4, -\frac{\pi}{6})$　　C$(-4, \frac{\pi}{6})$　　D$(-4, -\frac{\pi}{6})$



1.3 直角座標與極座標變換

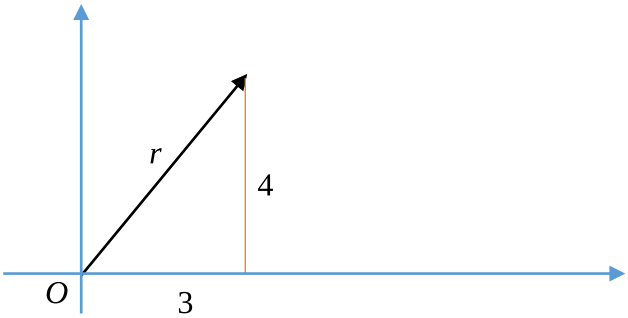


1. 提問學生如已知 r 及 θ，如何求 x 及 y。	2. 提問學生如已知 x 及 y，如何求 r 及 θ。
引導學生給出以下答案： $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$	引導學生給出以下答案： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{y}$

問題 3（使學生能利用所學知識解決問題）

1. 已知點 P 的直角坐標為$(3,\ 4)$，求其極坐標。
2. 已知點 P 的直角坐標為$(5,\ -12)$，求其極坐標。
3. 已知點 P 的直角坐標為$(-\sqrt{3},-1)$，求其極坐標。

1.

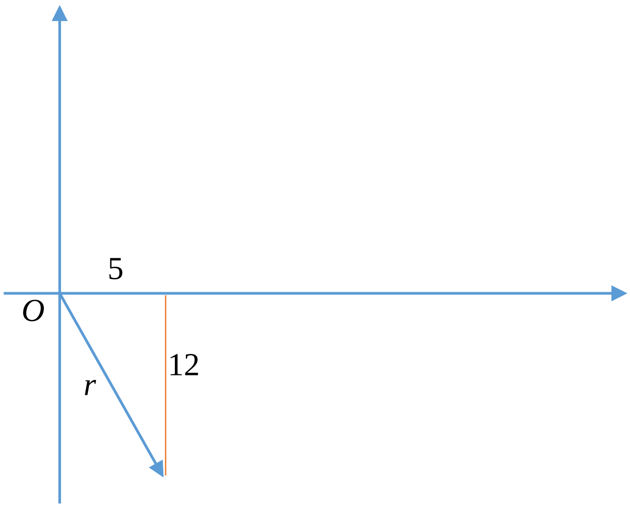


$$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\tan\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=53.13°$$

$$\therefore P(5,53.13°)$$

2.

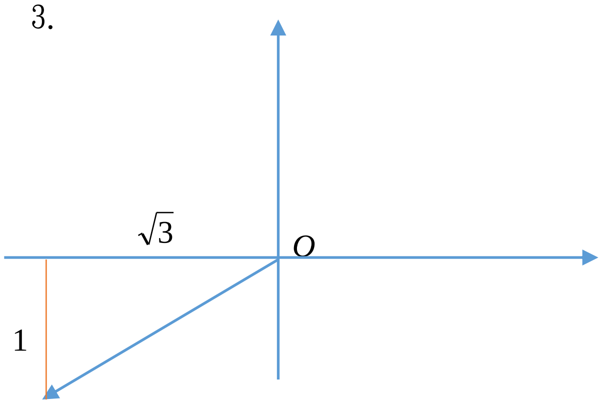


$$r=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

$$\tan\theta=\frac{-12}{5}\Rightarrow\theta=-67.4°$$

$$\therefore P(13,-67.4°)$$

3.



$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=\frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore P\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$$

問題 4

1. 已知點 P 的極坐標為$\left(10, \frac{4\pi}{3}\right)$，求其直角坐標。

2. 已知點 P 的極坐標為$\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$，求其直角坐標。

1. $x=r\cos\theta=10\cos\frac{4\pi}{3}=-5$

   $y=r\sin\theta=10\sin\frac{4\pi}{3}=-5\sqrt{3}$

   $\therefore P\left(-5,-5\sqrt{3}\right)$

2. $x=r\cos\theta=8\cos\frac{2\pi}{3}=-4$

   $y=r\sin\theta=10\sin\frac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}$

   $\therefore P\left(-4,4\sqrt{3}\right)$

單元二：直角座標方程與極座標方程變換

教學日期：	2019/3/15
教學時間：	一節（40 分鐘）
教學對象：	F6 B/C/D
教學目標：	1. 學生能將直角座標方程轉化為極座標方程。 2. 學生能將極座標方程轉化為直角座標方程。
重點/難點	重點：如何使用 $x = r\cos\theta$ 及 $y = r\sin\theta$ 這兩式子作直角座標及極座標的轉換。 難點：複角公式運用。

2.1 直角座標方程化為極座標方程

提問學生：

$r\cos\theta = x$

$r\sin\theta = y$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

問題 5：求下列曲線的直角座標方程

1. $r = 5$　　2. $r = 2 + \cos 2\theta$　　3. $r^2 = \sin 2\theta$ ，　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1. 展示學生如何利用：$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求出

$(r)^2 = (5)^2$

$r^2 = 25$

$\therefore x^2 + y^2 = 25$

2. 提示學生嘗試利用：$r\cos\theta = x$， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求出

$r = 2 + 2\cos^2\theta - 1$

$r = 1 + 2\cos^2\theta$

$r \cdot r^2 = r^2(1 + 2\cos^2\theta)$

$r^3 = r^2 + 2r^2\cos^2\theta$

$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 + y^2 + 2x^2$

$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 3x^2 + y^2$

3. 要求學生自行嘗試求直角座標方程：

$$r^2 = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$r^4 = 2(r\sin\theta)(r\cos\theta)$$
$$(x^2+y^2)^2 = 2xy$$

2.2 極座標方程化為直角座標方程

提問學生:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

問題 6: 求下列曲線的極座標方程

1. $y^2 = 4x$　　2. $x^2 - y^2 = 5$　　3. $y\sqrt{3} = x + 4$

1. $(r\sin\theta)^2 = 4r\cos\theta$

   $r = 4\cot\theta\csc\theta$

2. $(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 5$

   $r^2 = 5\sec 2\theta$

3. $r\sin\theta\sqrt{3} = r\cos\theta + 4$

   $r = 2\csc\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$

2.3 課堂練習

1. 求下列曲線的直角座標方程
   (a) $r = 5\csc\theta$　　(b) $r = 3a\sin\theta$　　(c) $r^2 = 1 + \tan^2\theta$
2. 求下列曲線的極座標方程
   (a) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy$　　(b) $x - y = 3$　　(c) $y = x(x-a)$

單元三:描繪極座標方程圖像

教學日期:	2019/3/18-21
教學時間:	二節（80 分鐘）
教學對象:	F6 B/C/D
教學目標:	1. 學生認識幾種常見極座標方程圖像。 2. 學生能根據已知極座標方程而描繪出其圖像。 3. 學生能學懂 DESMOS 軟件繪畫極座標方程圖像。
重點/難點:	重點：1）過極點的切線方程。 2）移動點在極座標方程的最大值及最小值。 3）利用極座標曲線的對稱性，減少 ”點” 位置的計算量。 4）極座標曲線方程中變數值對曲線的影響。 5）極座標曲線方程中常數值對曲線的影響。 難點：1）極座標曲線方程中 θ 的定義域的取值範圍。 2）$r^2 = f(\theta)$ 的極坐標曲線方程的繪製。

讓學生認識描繪極座標方程圖像步驟,

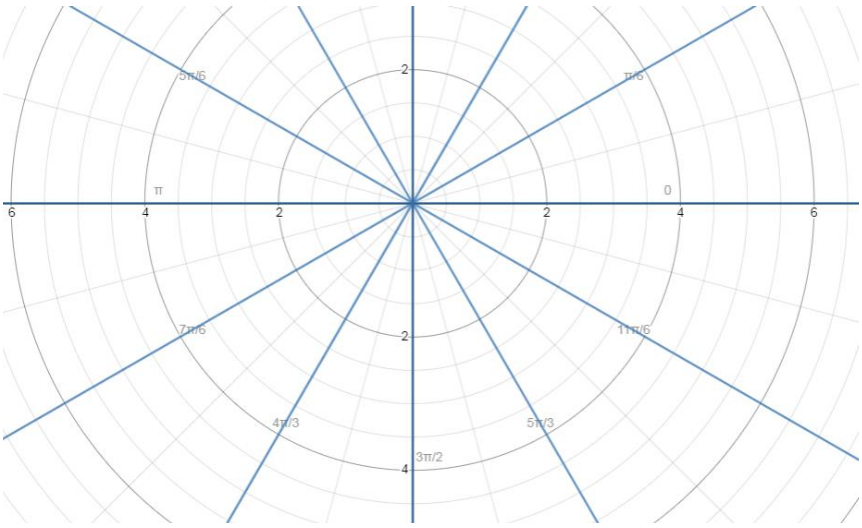
問題 7. 描繪 $r=\theta$， $0\le\theta\le2\pi$ 圖像

1. 根據 θ 建立表格

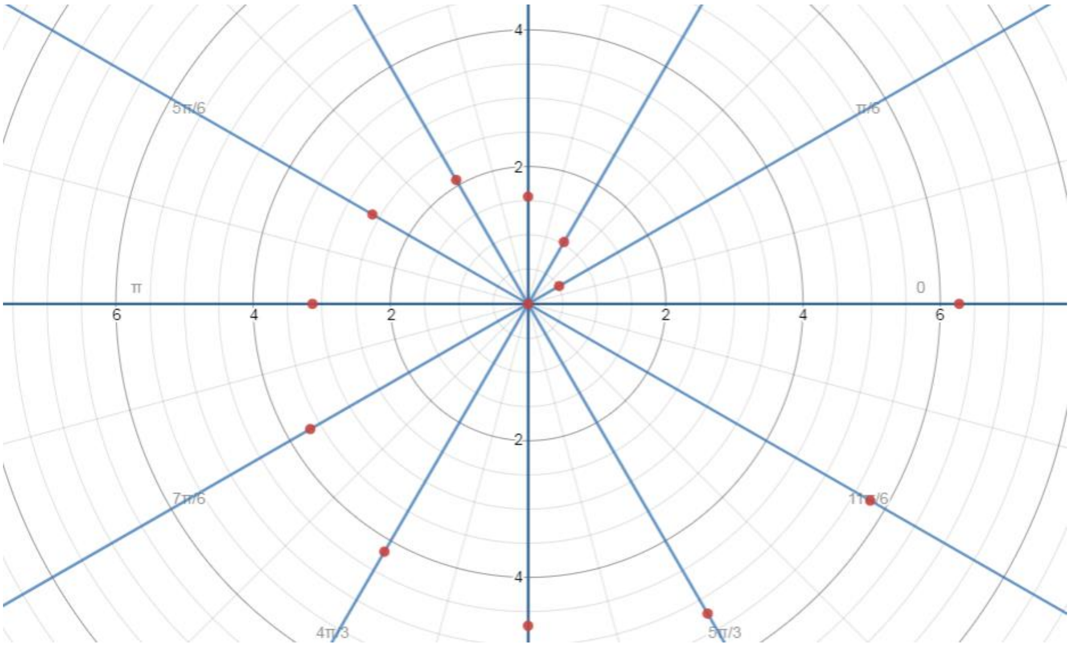
θ	0	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$	$\frac{14\pi}{12}$	$\frac{16\pi}{12}$	$\frac{18\pi}{12}$	$\frac{20\pi}{12}$	$\frac{22\pi}{12}$	$\frac{24\pi}{12}$
$r=\theta$													

2. 使用 DESMOS 以上描點各點，讓學生觀察與自己用手描繪有何不同

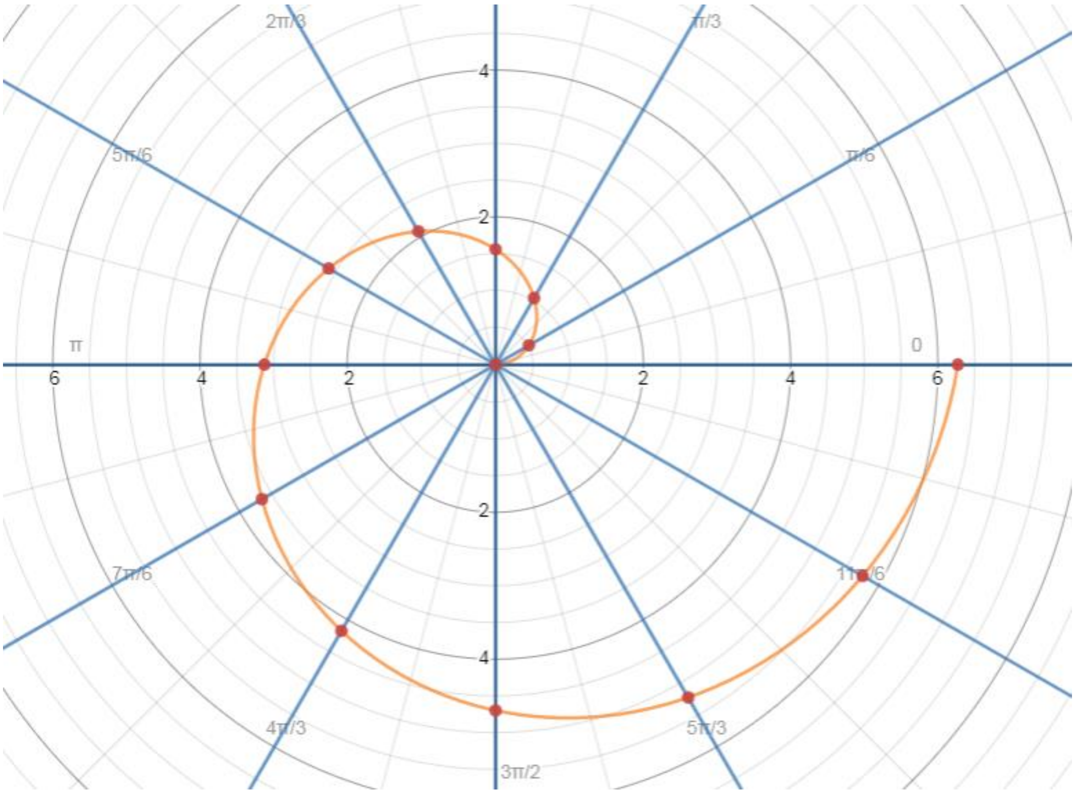
第一步 先畫出方位角



第二步 根據 r 定位

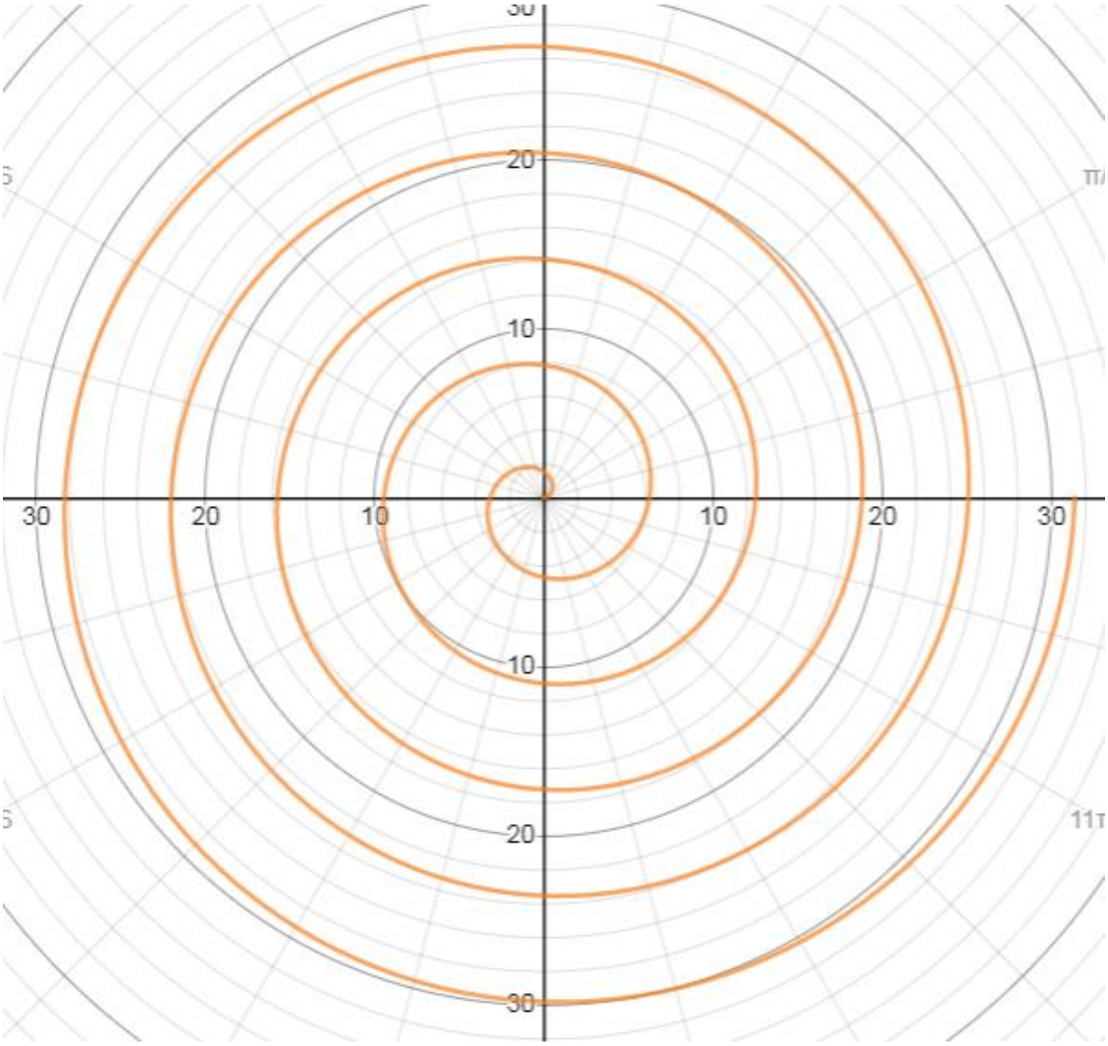


第三步 連接極座標點



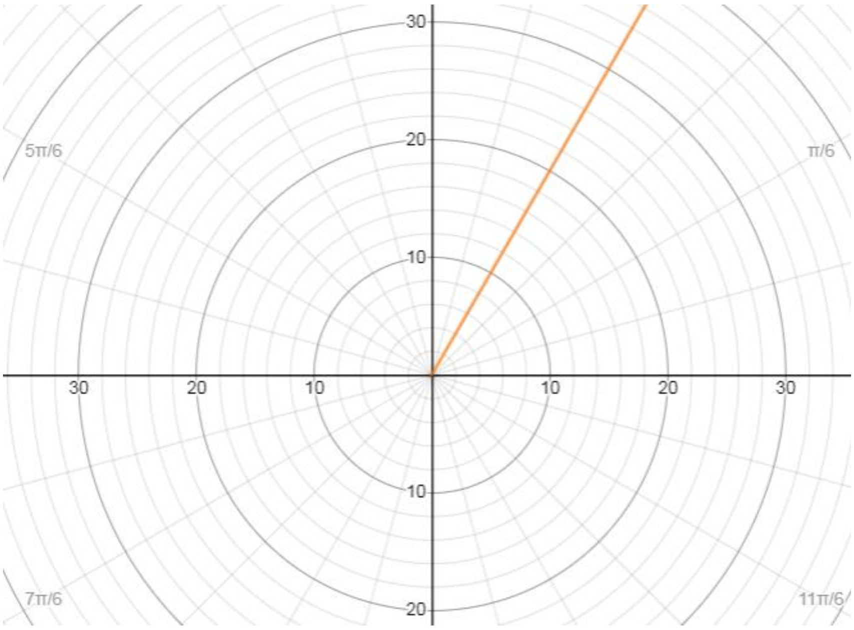
使用 DESMOS 直接繪出 $r=\theta$，讓學生比較答案

以下圖像為 $r=\theta$， $0\le\theta\le10\pi$



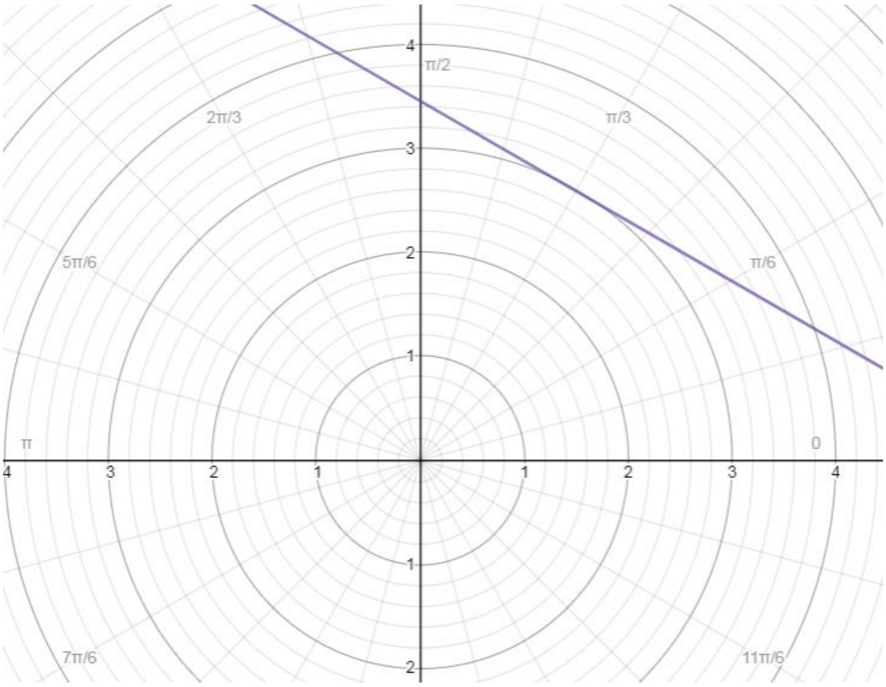
問題 8. 描繪 $\theta = \alpha$ 圖像

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$



問題 9. 描繪 $r = k\sec(\alpha - \theta)$ 圖像

$$k = 3, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

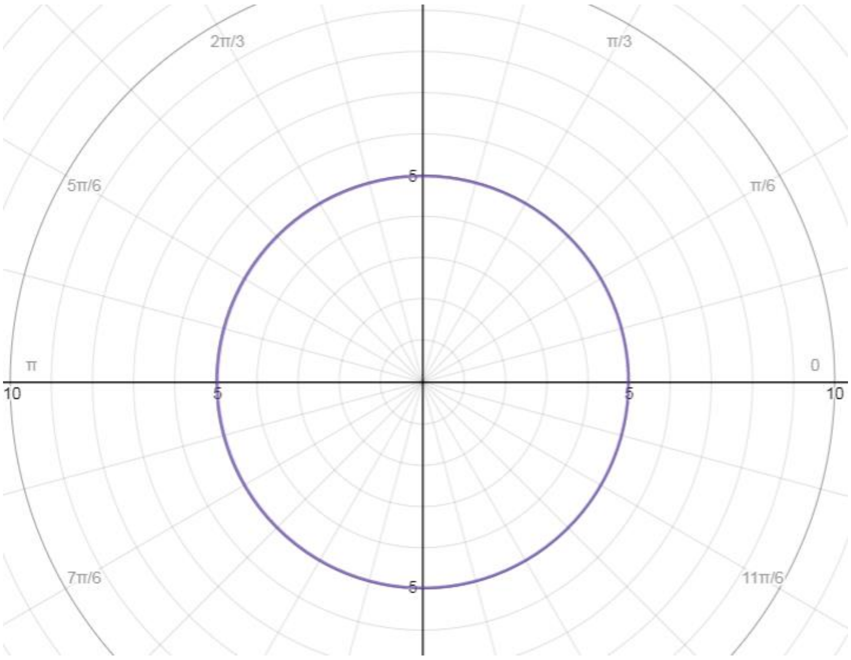


練習：描繪 $r = k\sec(\alpha - \theta)$ 圖像。

1. $r = 2\sec\left(\dfrac{\pi}{6} - \theta\right)$ 圖像。
2. $r = 2\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ 圖像。
3. $r = 2\sec\theta$ 圖像。

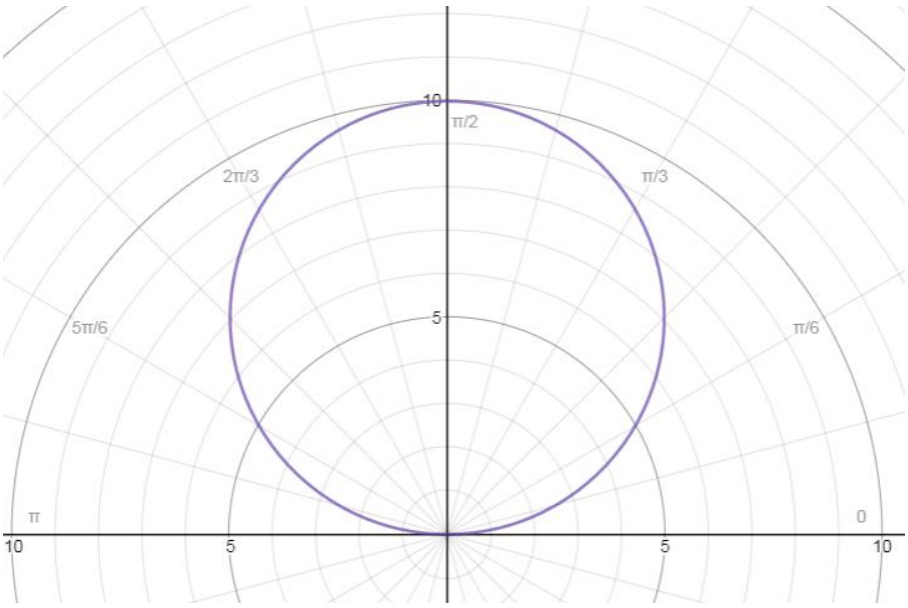
問題 10. 描繪 $r = a$ 圖像

$a = 5$



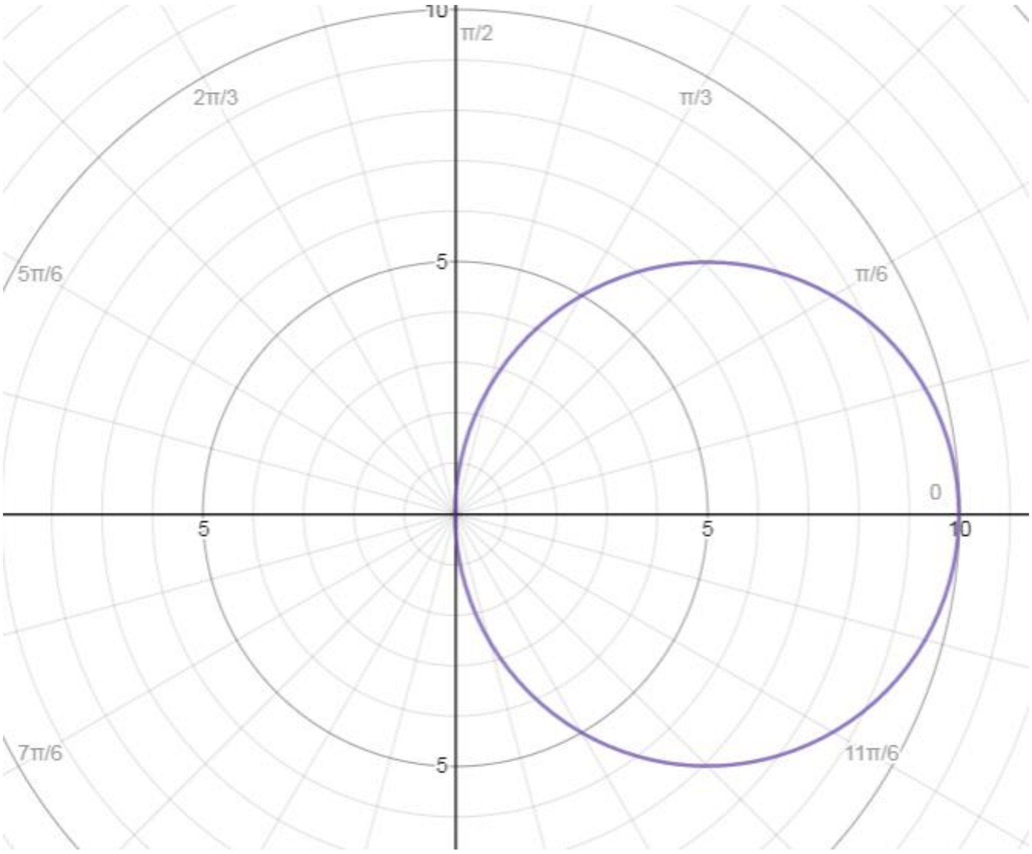
問題 11. 描繪 $r = 2a\sin\theta$ 圖像

$a = 5$



問題 12. 描繪 $r = 2a\cos\theta$ 圖像

$a = 5$



學生已有一定描繪基礎，說故事引起學生學習興趣

十七世紀出生於法國的笛卡兒是第一個發現直角坐標的人，這對後人的貢獻相當大，可惜一生窮困潦倒。一直到52歲，仍一直默默無名。當時法國正流行黑死病，笛卡兒不得不逃離，流浪到瑞典當乞丐。

某天，他在市場乞討時，有一群少女經過，其中一名少女發現他的口音不像是瑞典人，她對笛卡兒非常好奇，於是上前問他：

「你從哪來的啊?」

「法國。」

「你是做什麼的啊?」

「我是數學家。」

這名少女叫克麗絲汀，18歲，是位公主，她和其它女孩

不同，

克麗絲汀不喜歡文學，而是熱衷數學。

當她聽到笛卡兒說明身份後，感到相當大的興趣，於是把笛卡兒邀請回宮。

笛卡兒就成了她的數學老師，將一生的研究傾囊相授，

而克麗絲汀的數學也日益進步，直角坐標當時也只有笛卡兒這對師生才懂。

後來，他們之間產生了不一樣的情愫，發生喧騰一時的師生戀。

然而這件事傳到國王耳中，讓國王相當憤怒！下令將笛卡兒處死，克麗絲汀以自縊相逼，

國王害怕寶貝女兒真的會想不開，於是…將笛卡兒放逐回法國，也將克麗絲汀軟禁。

笛卡兒一回到法國沒多久就染上黑死病，躺在床上奄奄一息。

笛卡兒不斷地寫信到瑞典給克麗絲汀，都被國王攔截沒

收。

克麗絲汀也就不曾收到過笛卡兒寫來的信…

就在笛卡兒快要死去的時候，他寄出了第 13 封信，當他寄出去沒多久後就氣絕身亡。

這封信的內容只有短短的一行…

$r = a(1-\sin\theta)$

國王攔截到這封信後拆開看，發現並不是一如往常的情話。

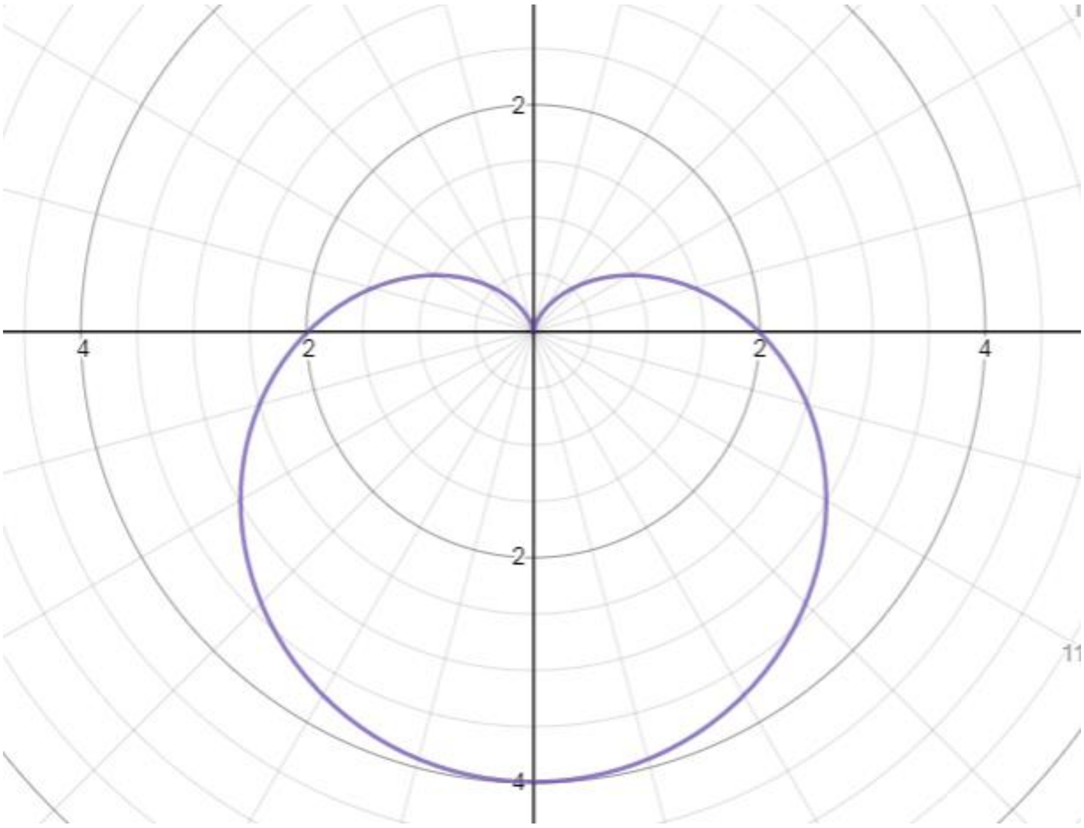
於是找來城裡所有科學家來研究，但都沒有任何人能夠解開。

國王心想…反正笛卡兒就快要死了，而且公主被軟禁時都悶悶不樂，便把信交給克麗絲汀。

課堂練習

描繪 $r = 2(1 - \sin\theta)$

答案:



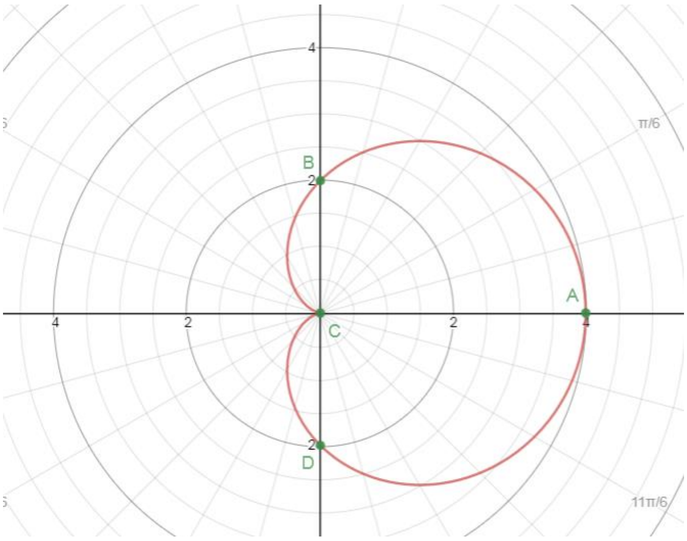
第二部分

$r=a+b\cos\theta$ 心狀線（$a,b\in R$）

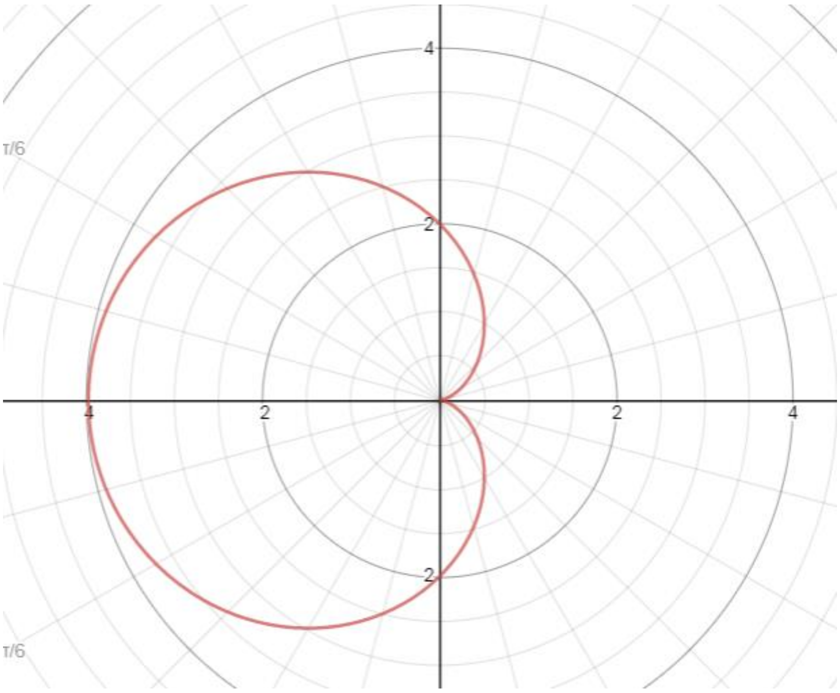
如何利用　　1 圖像對稱性

2. $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 時，對應之 r 值

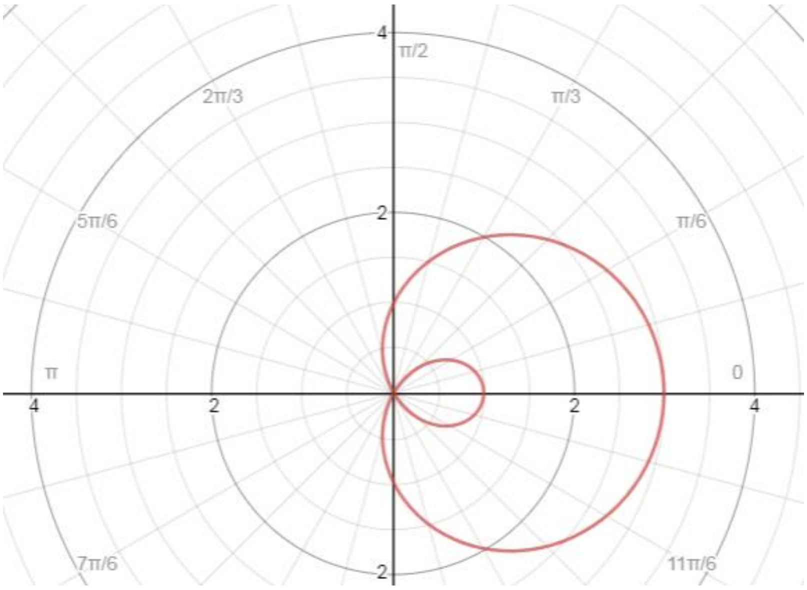
1. 引導學生去繪畫心狀線 $r=2+2\cos\theta$



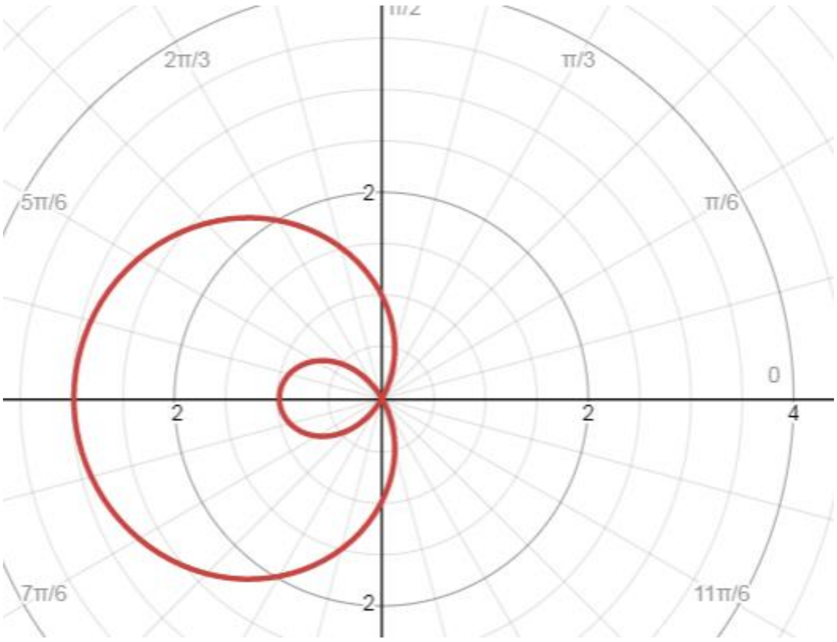
2. $r=2-2\cos\theta$



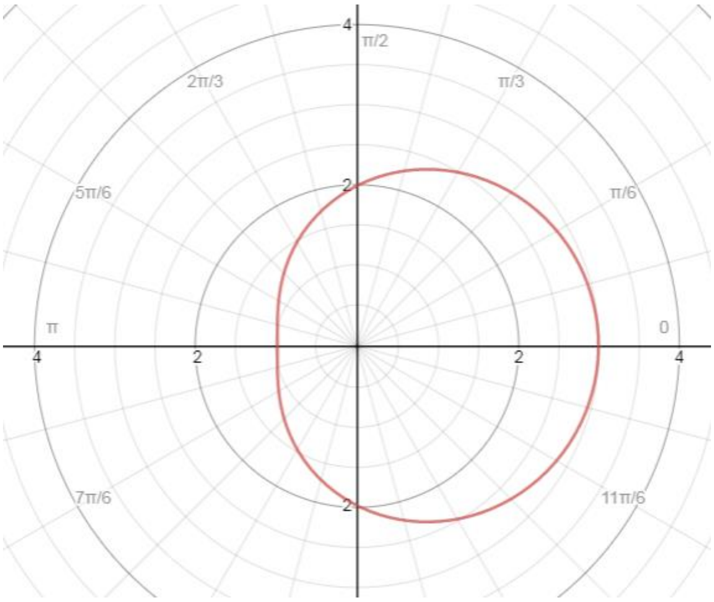
3. $r = 1 + 2\cos\theta$



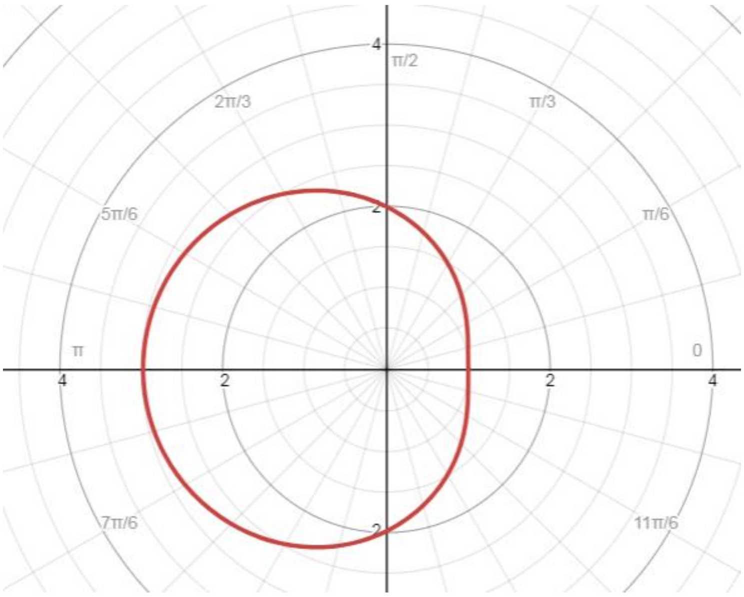
4. $r = 1 - 2\cos\theta$



5. $r = 2 + \cos\theta$

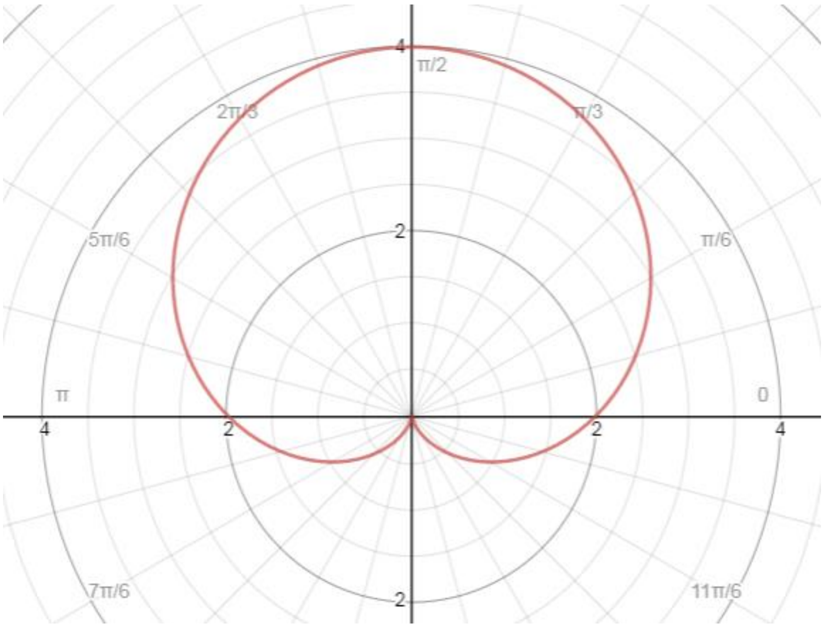


6. $r = 2 - \cos\theta$

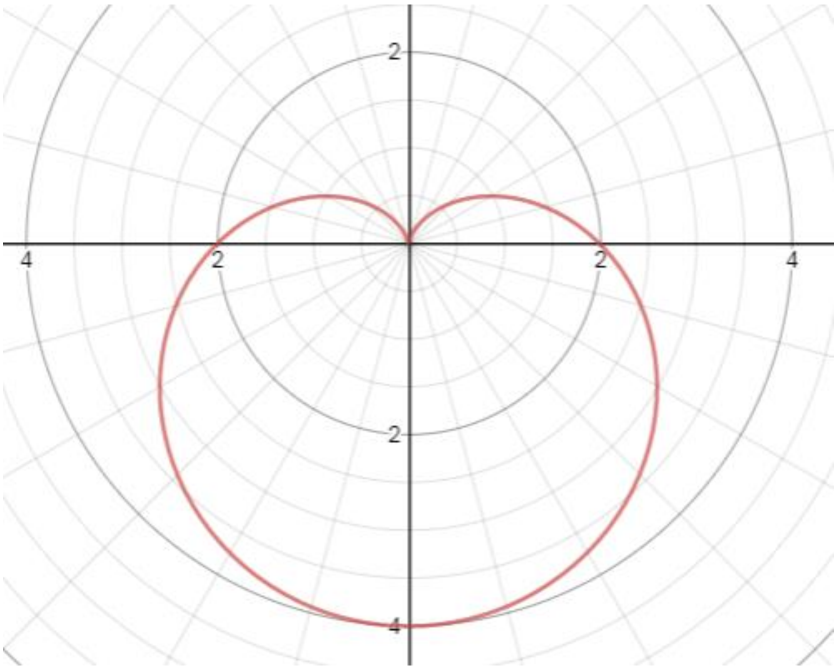


課堂練習

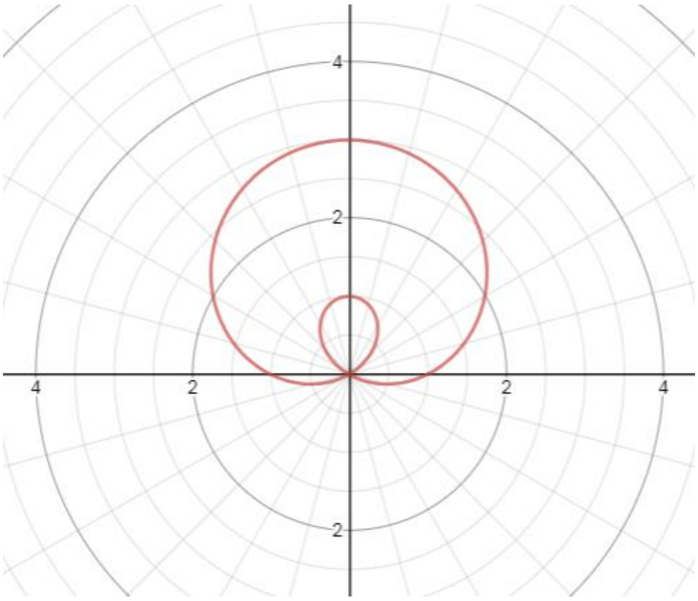
1. $r = 2 + 2\sin\theta$



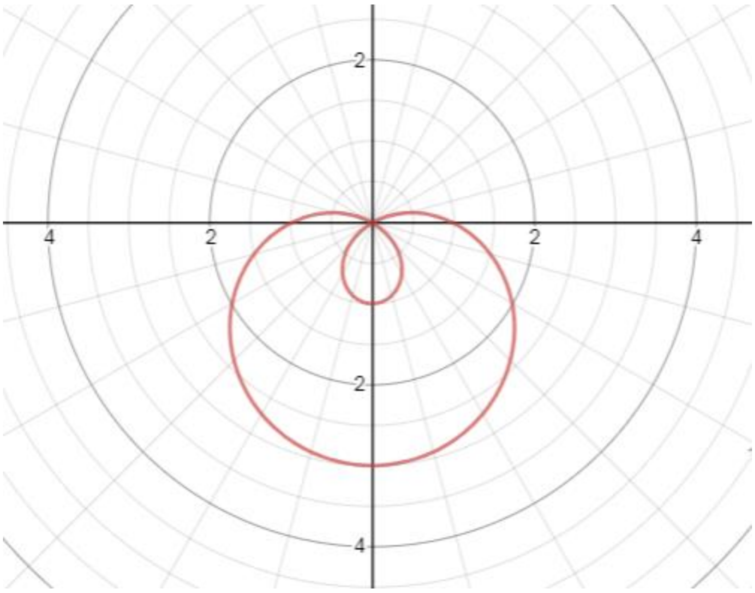
2. $r = 2 - 2\sin\theta$



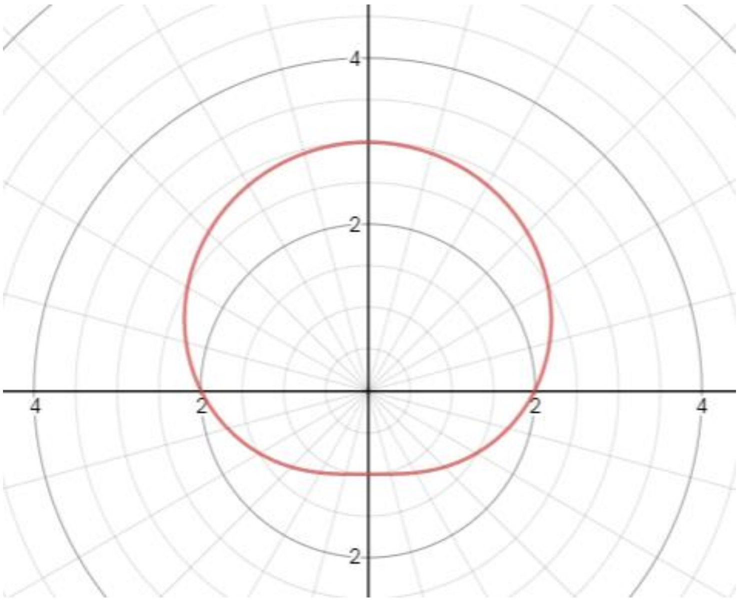
3. $r = 1 + 2\sin\theta$



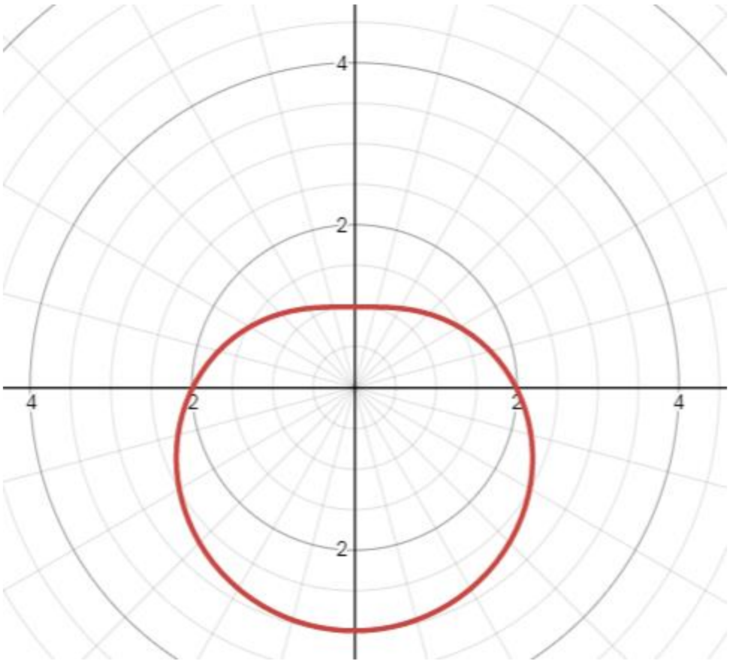
4. $r = 1 - 2\sin\theta$



5. $r = 2 + \sin\theta$



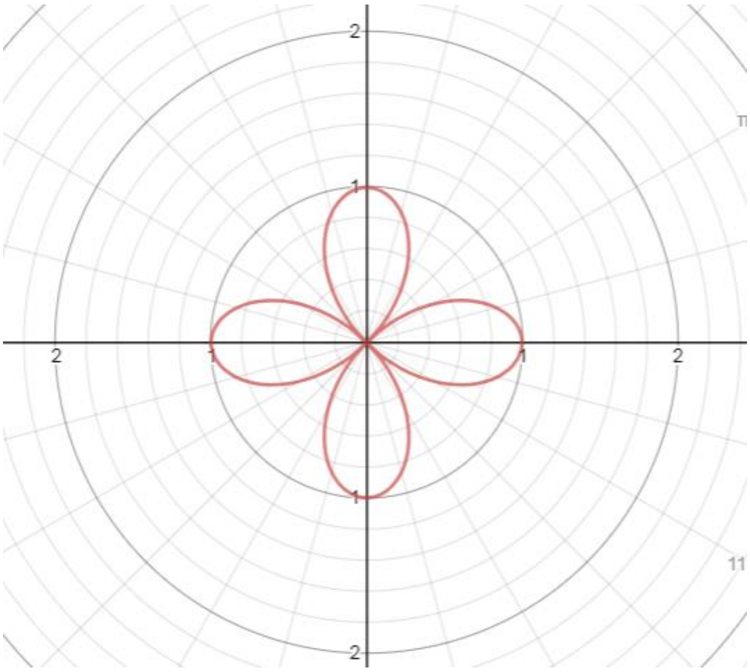
6. $r = 2 - \sin\theta$



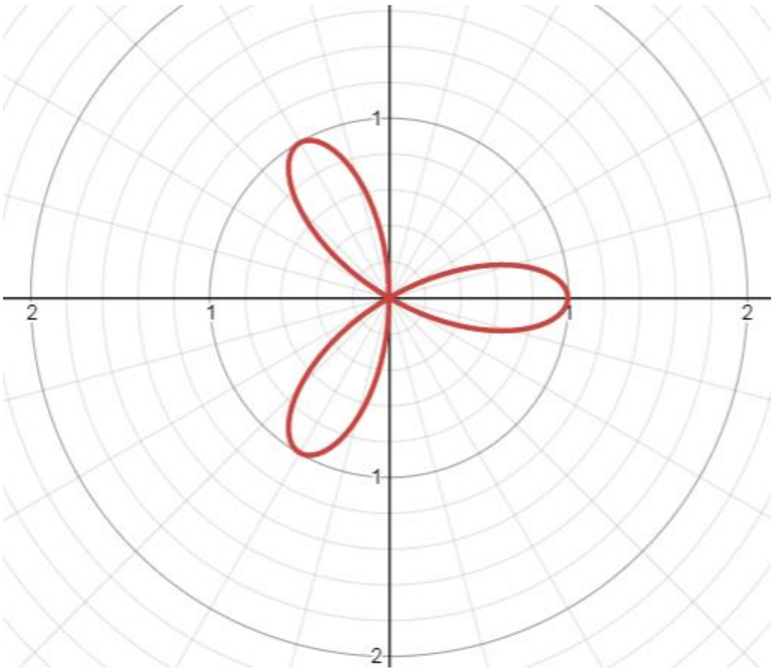
第三部分(其他常見圖型)

引導學生利用所學去畫出以下圖案

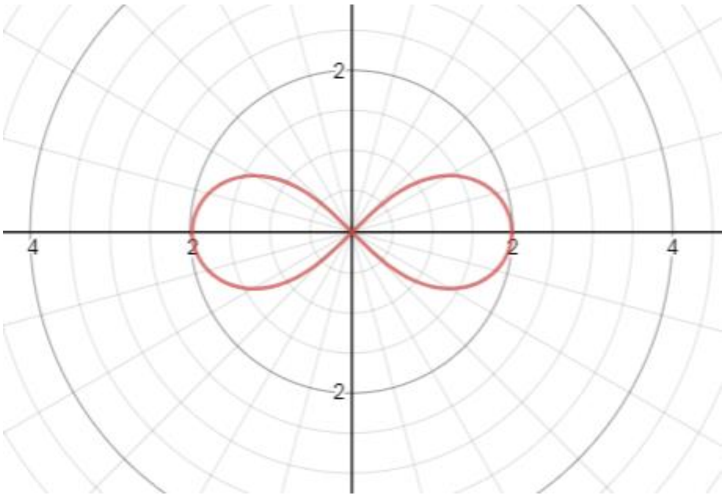
1. $r=\cos 2\theta$



2. $r=\cos 3\theta$

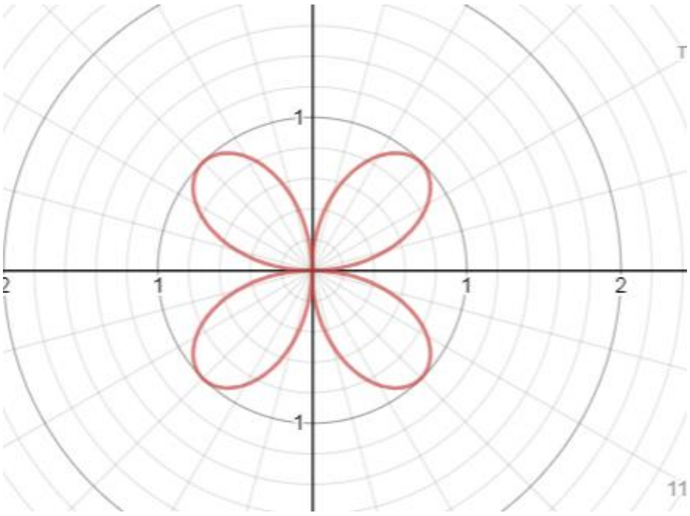


3. $r^2 = 4\cos 2\theta$

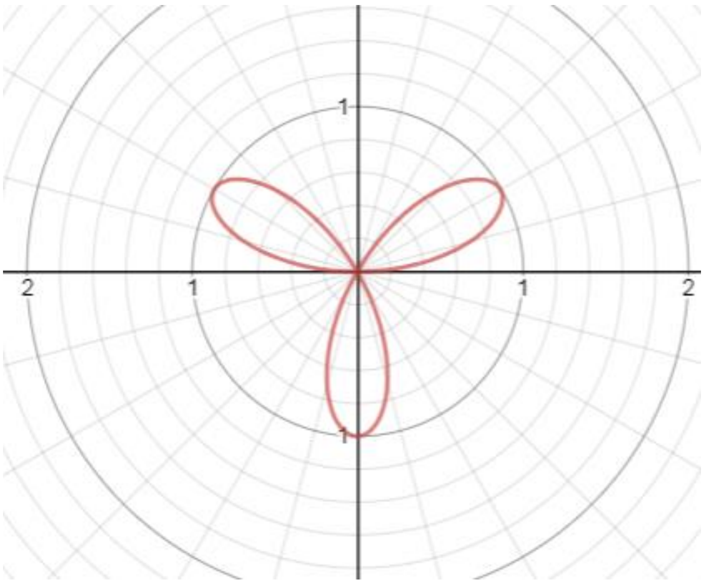


課堂練習

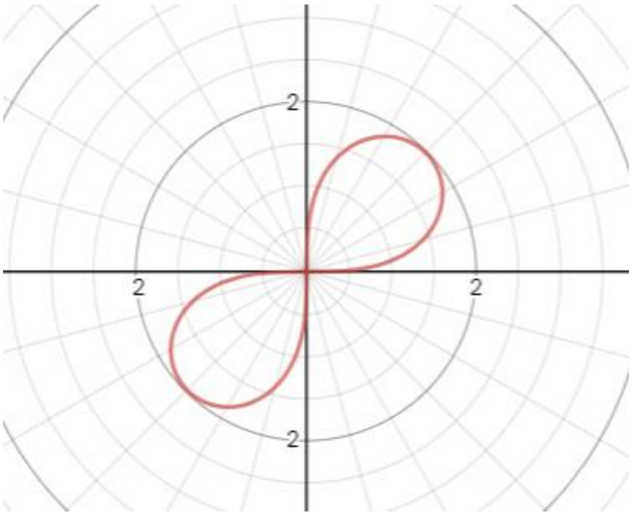
1. $r = \sin 2\theta$



2. $r = \sin 3\theta$



3. $r^2 = 4\sin 2\theta$

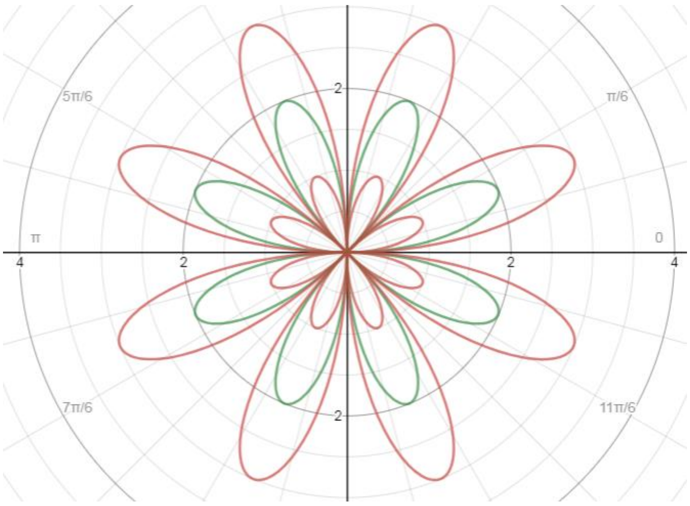


欣賞極座標曲線，使學生能感受數學與藝術之間的聯繫。

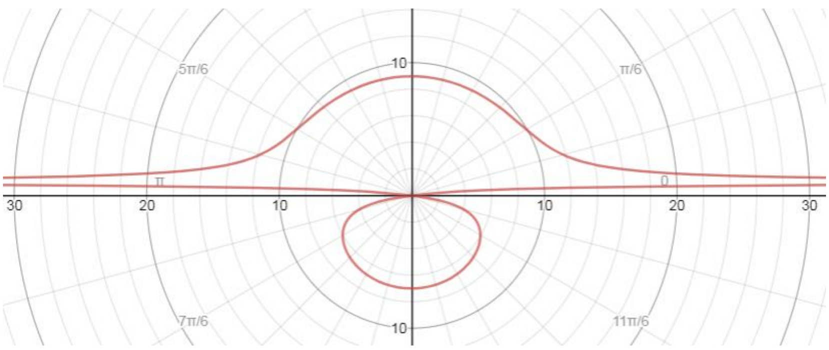
1. $r = \sin 4\theta$

   $r = 2\sin 4\theta$

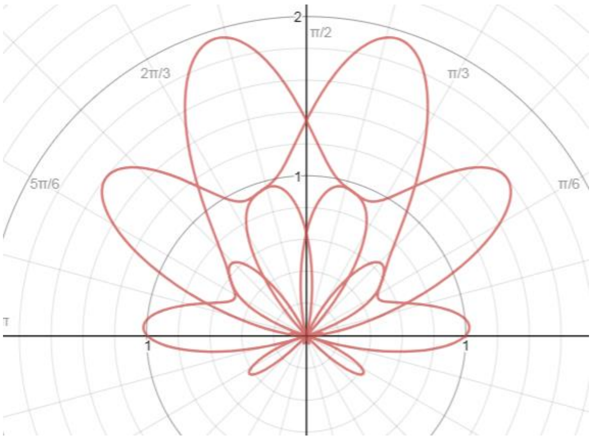
   $r = 3\sin 4\theta$



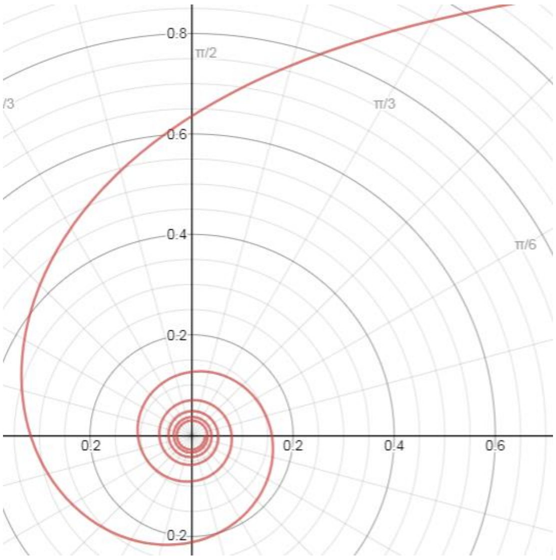
2. $r = 8 + \csc\theta$



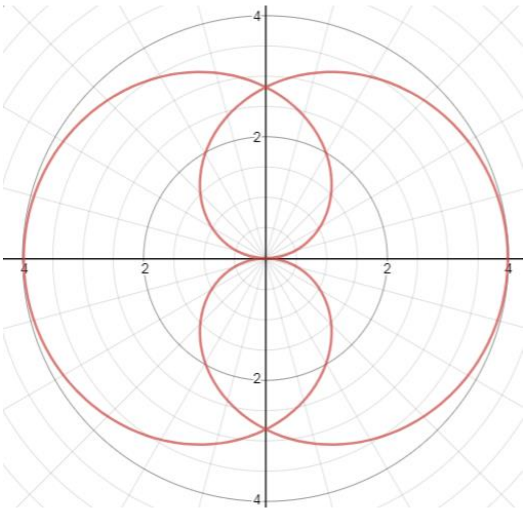
3. $r = \sin\theta + (\sin 2.5\theta)^3$



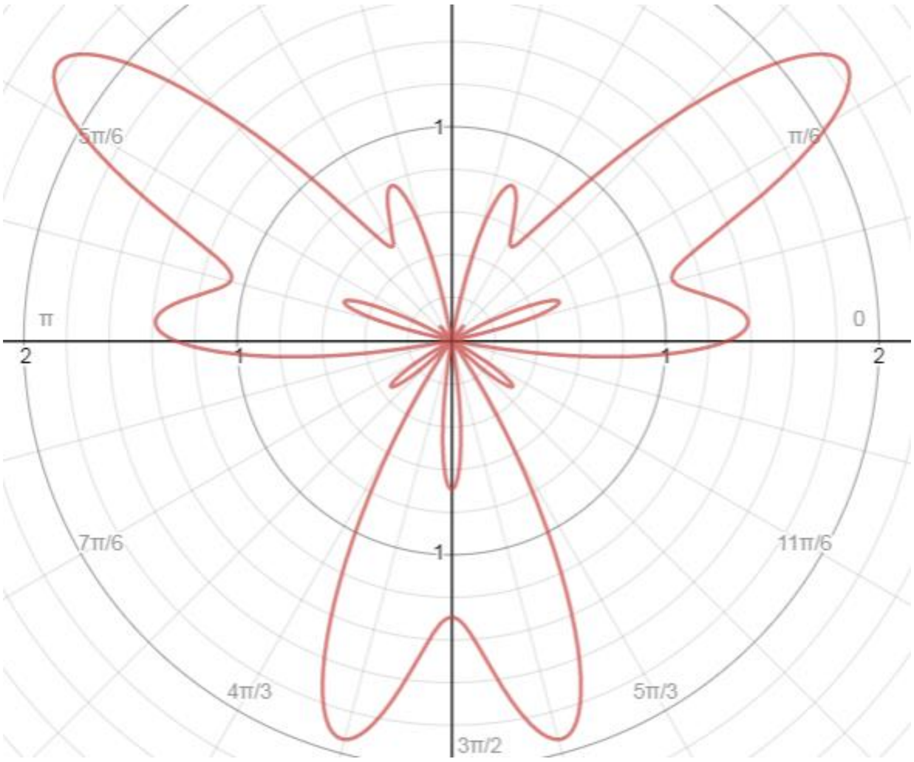
4. $r = \dfrac{1}{\theta}$



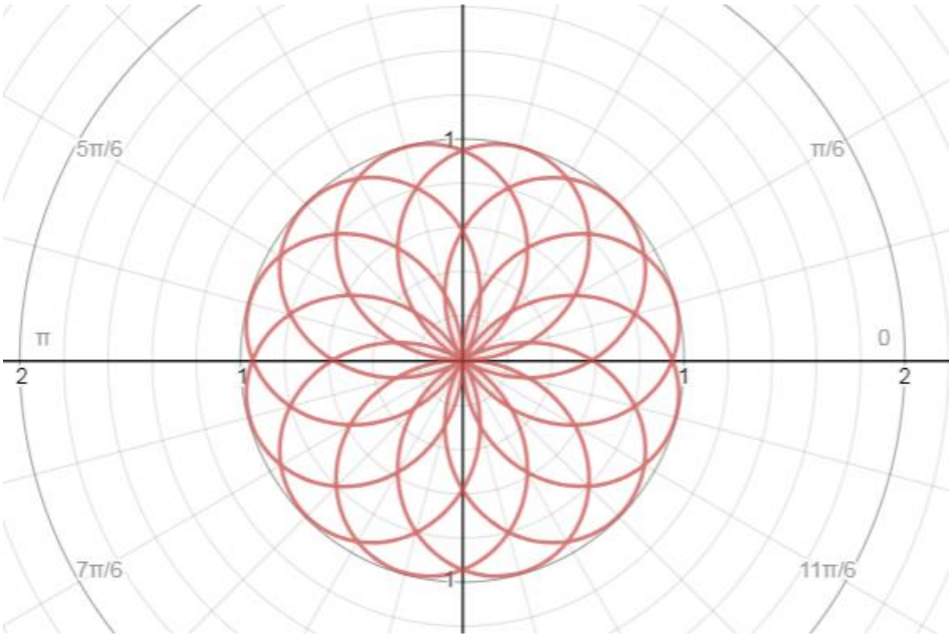
5. $r = 4\cos\dfrac{\theta}{2}$



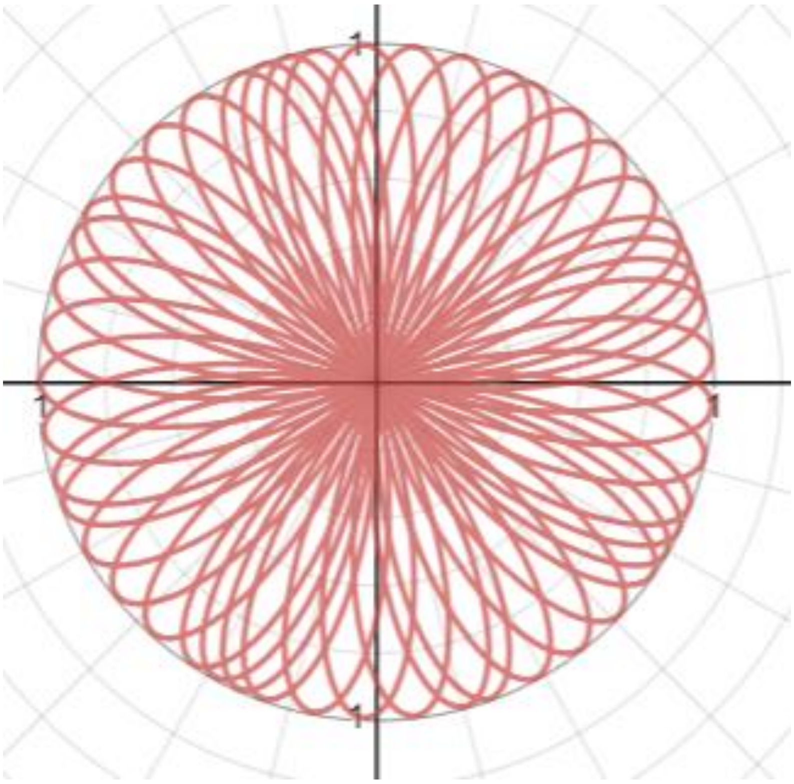
6. $r = (\cos 5\theta)^2 + \sin 3\theta + 0.3$



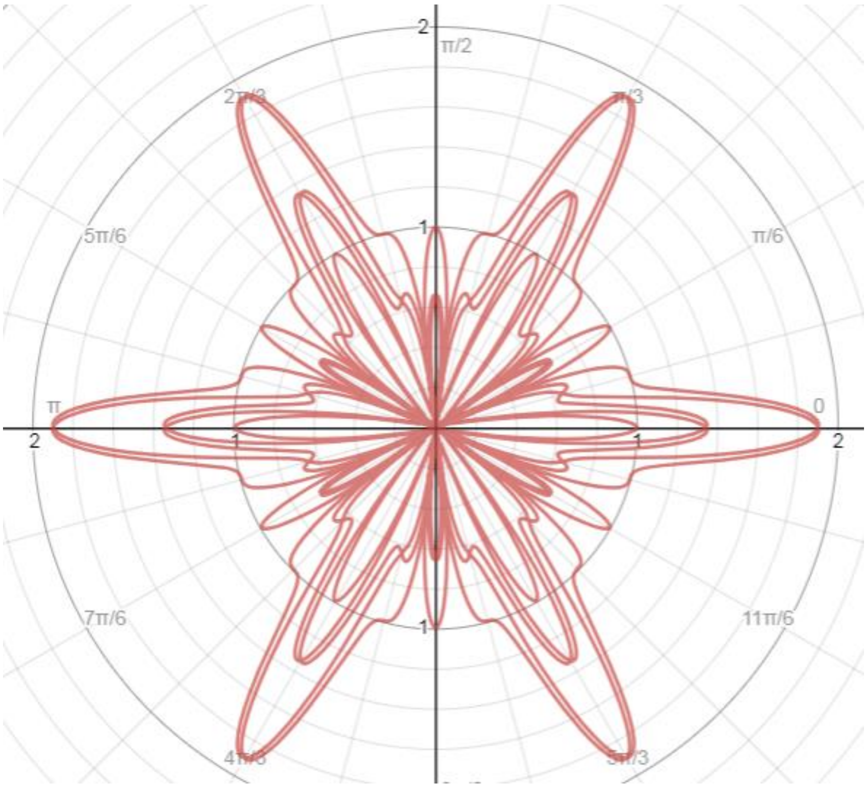
7. $r = \sin 1.2\theta$



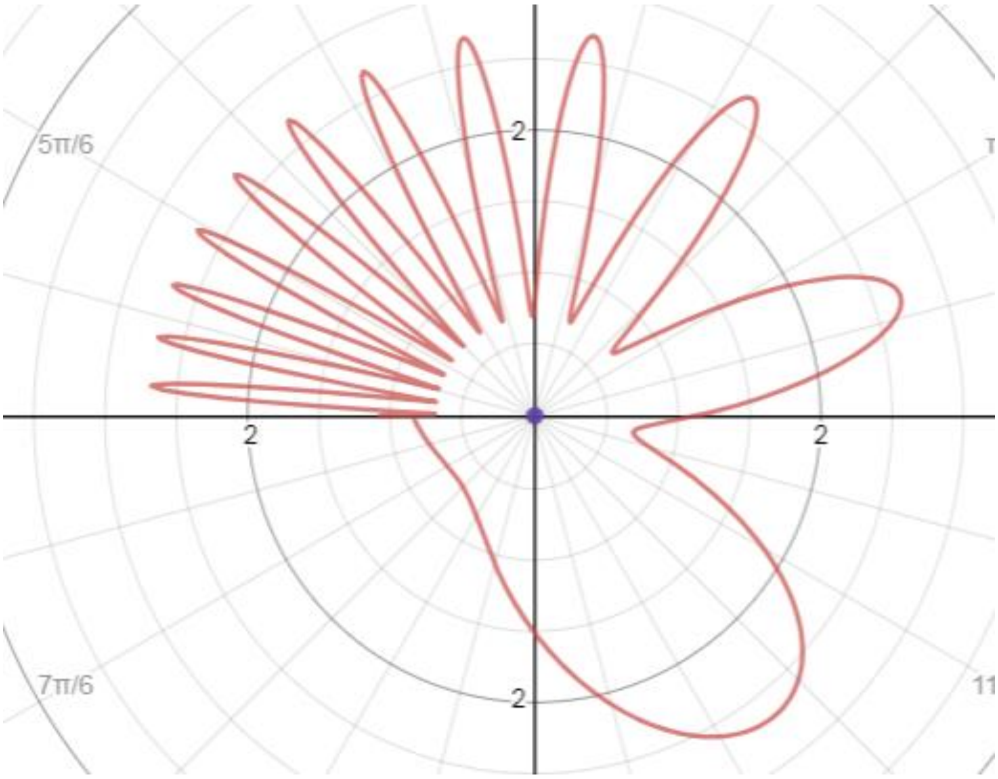
8. $r = \sin 4.1\theta$



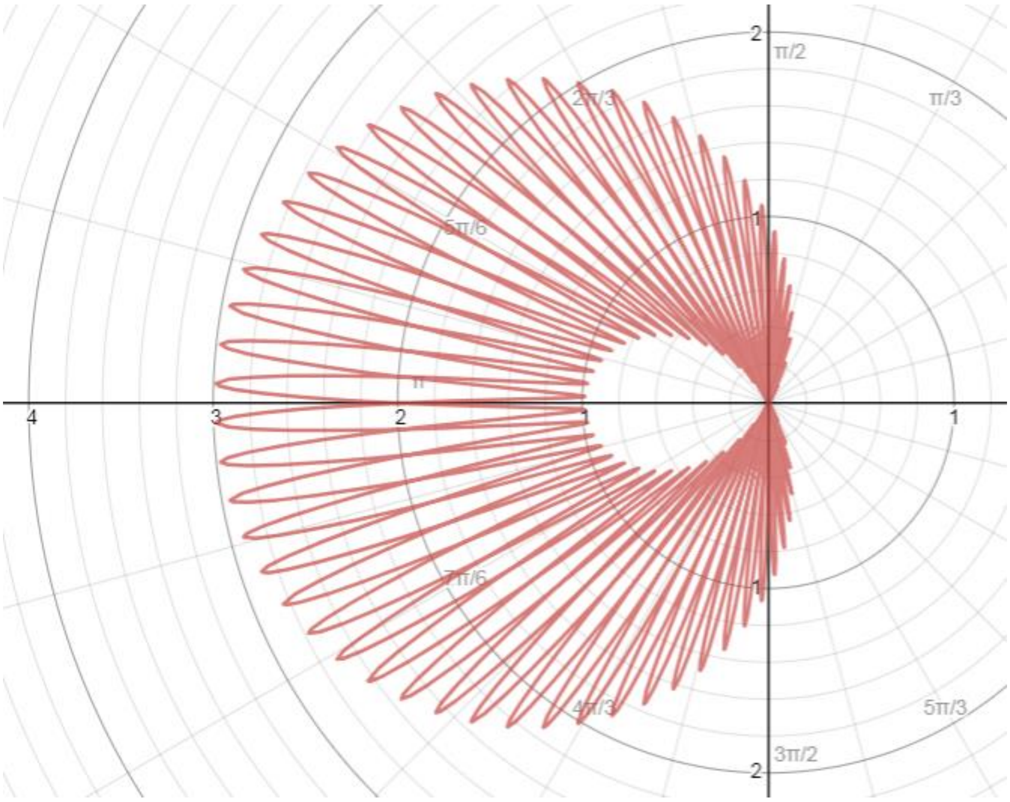
9. $r = \sin^2 1.2\theta + \cos^2 6\theta$



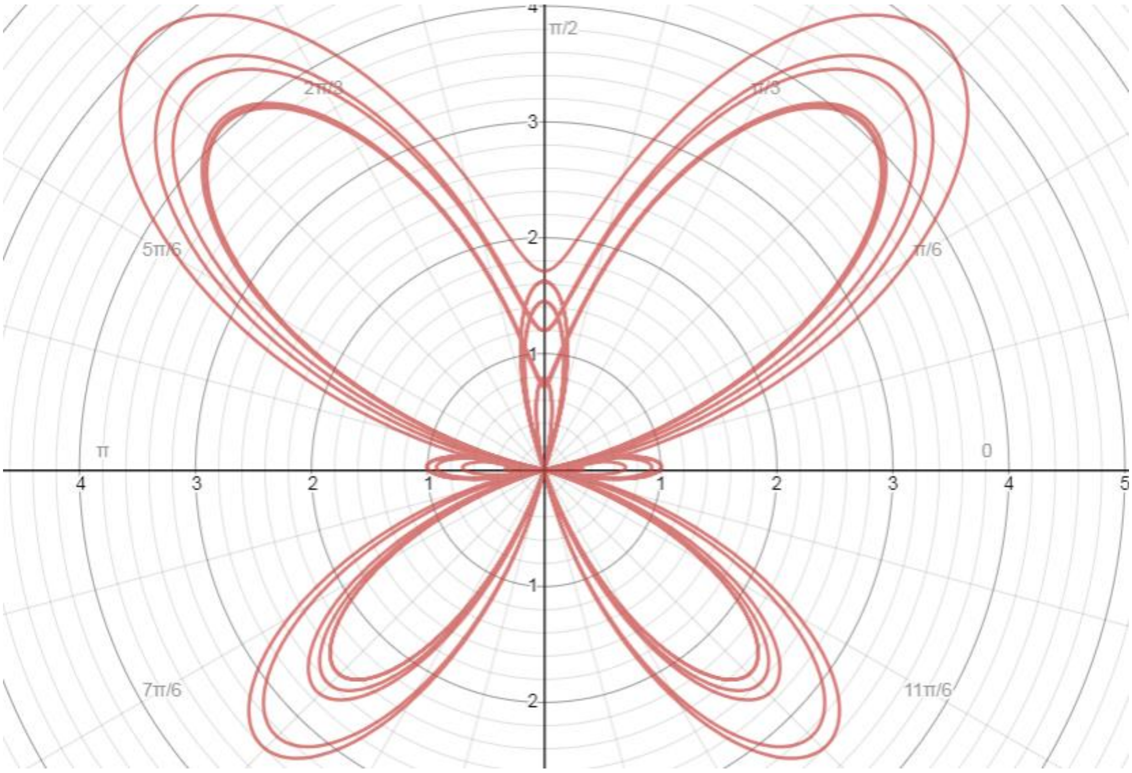
10. $r = \sin(2^{\theta}) - 1.7$



11. $r = \sin 44\theta - 2\cos\theta$



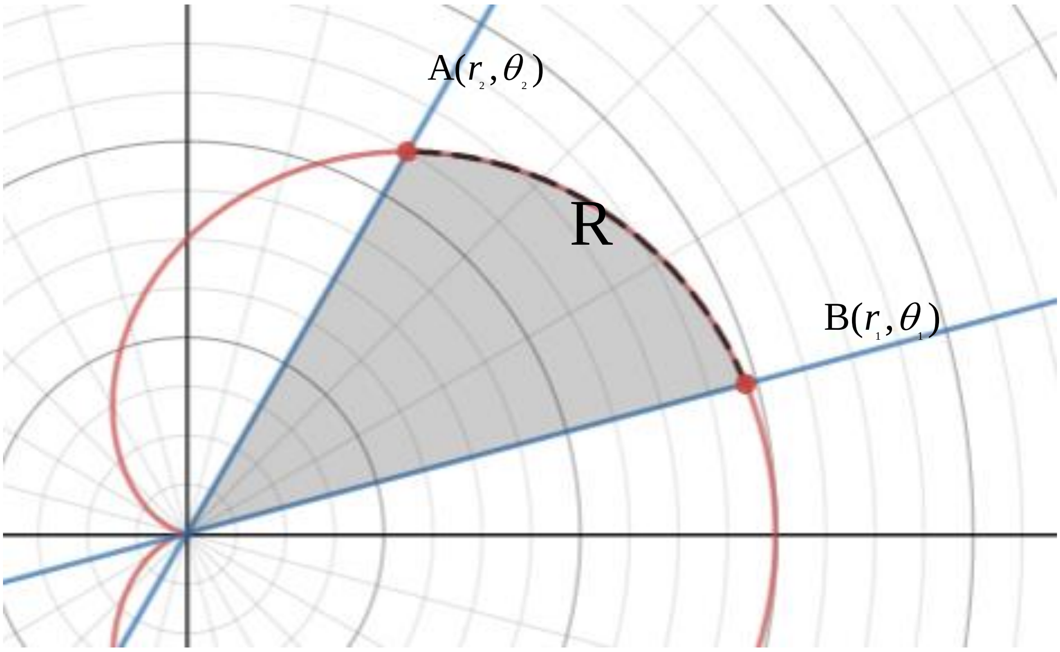
12. $r = e^{\sin\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^2\left(\frac{1}{24}(2\theta - \pi)\right)$



單元四：極座標方程曲線的扇形面積計算

教學日期:	2019/3/21-25
教學時間:	一節（40 分鐘）
教學對象:	F6 B/C/D
教學目標:	利用積分技巧求已知極座標方程曲線的扇形面積。
重點/難點:	重點：1）公式：$A=\frac{1}{2}r^2\theta$，θ 為弧度。 2）三角函數的特別角。 3）三角函數的積分。 難點：觀察出曲線扇形面積由曲線那部分線段所構成。

介紹學生以下概念：

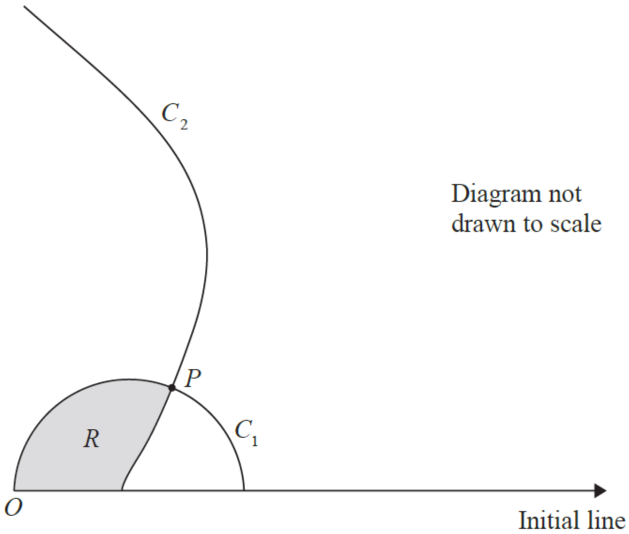


上圖中 A 和 B 為曲線上兩點，陰影部分面積 R 由 A、B 及極點所形成，

陰影部分面 $R=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$

展示學生如何解決以下題目：

1.（2016 IAL Jun FP2）



曲線 C_1： $r=\frac{3}{2}\cos\theta$ ， $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

曲線 C_2： $r=3\sqrt{3}-\frac{9}{2}\cos\theta$ ， $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

C_1和C_2相交於點 P

(a) 求點 P *極座標*

(b) 求由C_1和C_2所包圍形成的陰影面積 R.

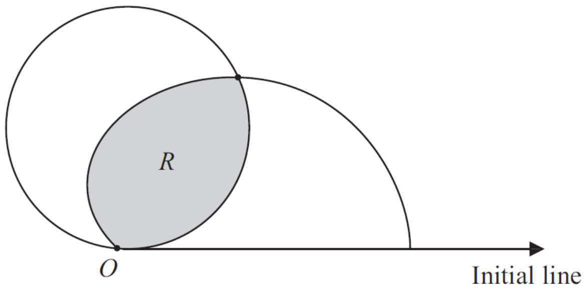
答案：

(a) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(b) $\frac{105}{32}\pi-\frac{45}{8}\sqrt{3}$

提問及引導學生解題：

2. 2015 IAL Jun



上圖中兩條曲線極座標方程如下:

$$r = \sqrt{3}\,sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$r = 1 + cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

(a)證明兩條曲線相交於極座標點 P$\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

(b)求由兩條曲線所包圍形成的陰影面積 R.

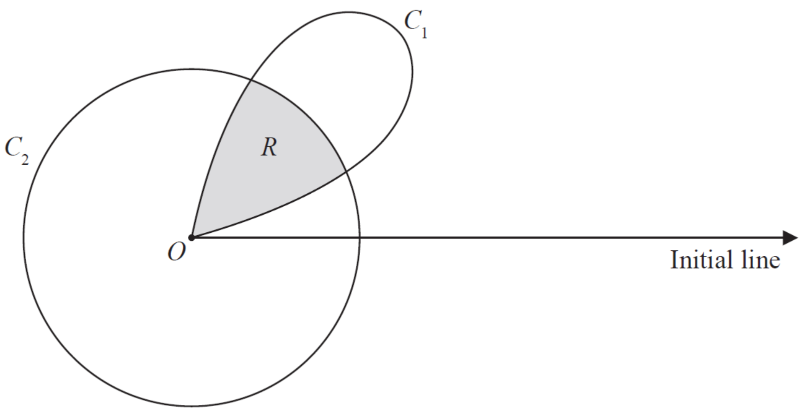
答案：

(a)PROOF

(b)$\frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

要求學生嘗試解題：

3. 2014 jun ial FP2



上圖中曲線極座標方程： $C_1: r = 2a\sin 2\theta$, $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$

上圖中圓極座標方程： $C_2: r = a$, $(0 \le \theta \le 2\pi, a > 0)$

(a)求曲線 C_1 與圓形 C_2 之間兩個交點。

(b)求圖中陰影面積 R，答案以 $\frac{1}{12}a^2\left(p\pi + q\sqrt{3}\right)$ 形式表示，其中 p 和 q 為整數。

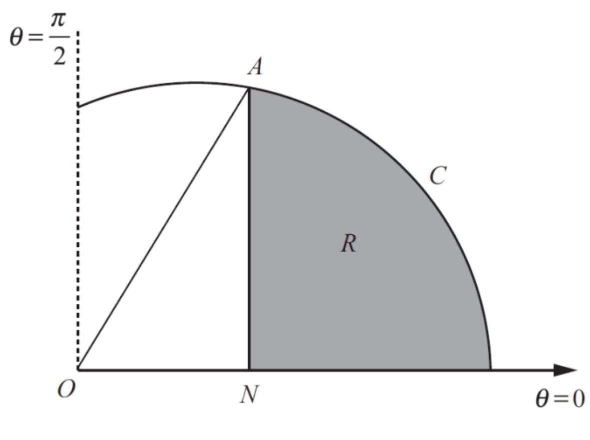
答案：

(a) $\left(a, \frac{\pi}{12}\right), \left(a, \frac{5\pi}{12}\right)$

(b) $\frac{1}{12}a^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

要求學生嘗試解題：

4. 2011 Jun FP2



圖中曲線極座標方程： $C: r = 2 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

曲線 C 上點 A 的 r 值為 $\frac{5}{2}$

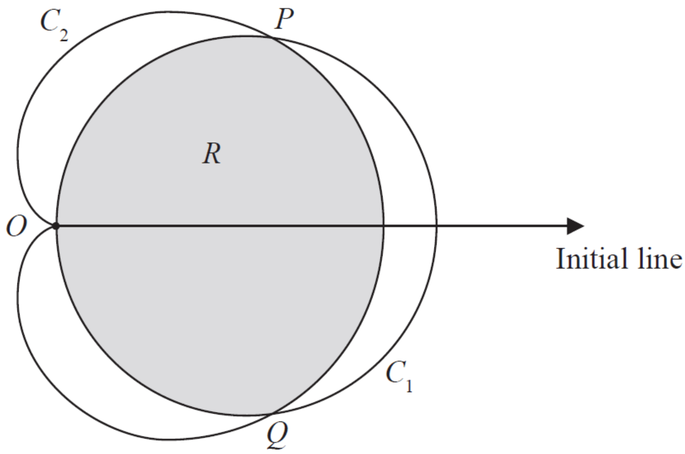
點 N 在極軸上，AN 與極軸互相垂直。

求圖中陰影部分面積 R。

答案：$\frac{3\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{32}$

課堂測試：

5. June 2016 FP2



曲線 C_1： $r=7\cos\theta$， $-\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$

曲線 C_2： $r=3(1+\cos\theta)$， $-\pi<\theta\leq\pi$

C_1 和 C_2 經過極點並相交於點 P 和點 Q.

(a)求點 P 和點 Q *的極座標*

(b)求由 C_1 和 C_2 所包圍形成的陰影面積 R.

答案：

(a) $P\left(\frac{21}{4},\arccos\frac{3}{4}\right)$， $Q\left(\frac{21}{4},-\arccos\frac{3}{4}\right)$

(b) $\frac{49\pi}{4}-11\arccos\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{4}$

單元五：極座標曲線方程上水平及垂直於極軸的切線方程

教學日期:	2019/3/26-27
教學時間:	一節（40 分鐘）
教學對象:	F6 B/C/D
教學目標:	求已知曲線極座標方程上與極軸平行或互相垂直的切點及切線方程的極座標。
重點/難點:	重點：1）求極座標曲線上水平及垂直於極軸的切點極座標位置 2）寫出極座標曲線上水平及垂直於極軸的切線方程。 難點：正確判別極座標曲線上水平及垂直於極軸的切點極座標位置。

介紹學生以下概念：

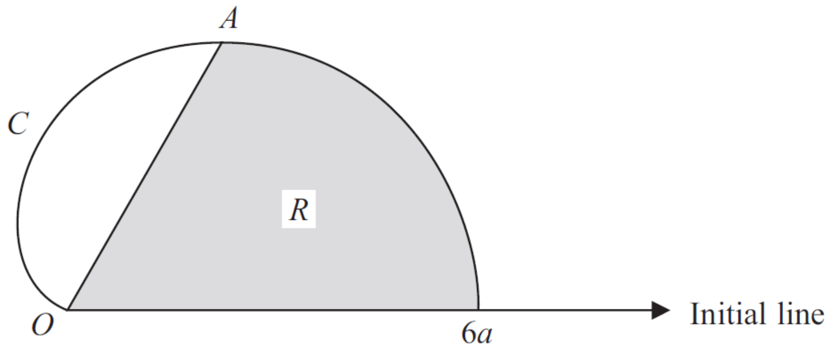
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

1. 求與極軸平行的切線方程，設 $\frac{dy}{d\theta}=0$

2. 求與極軸互相垂直的切線方程，設 $\frac{dx}{d\theta}=0$

展示學生如何解決以下題目：

1. 2015 Jun FP2



曲線 C_1: $r=3a(1+\cos\theta)$, $0\leq\theta<\pi$.

曲線 C 上點 A 的切線與極軸平行

(a)求點 A 極座標

(b)求陰影面積 R.

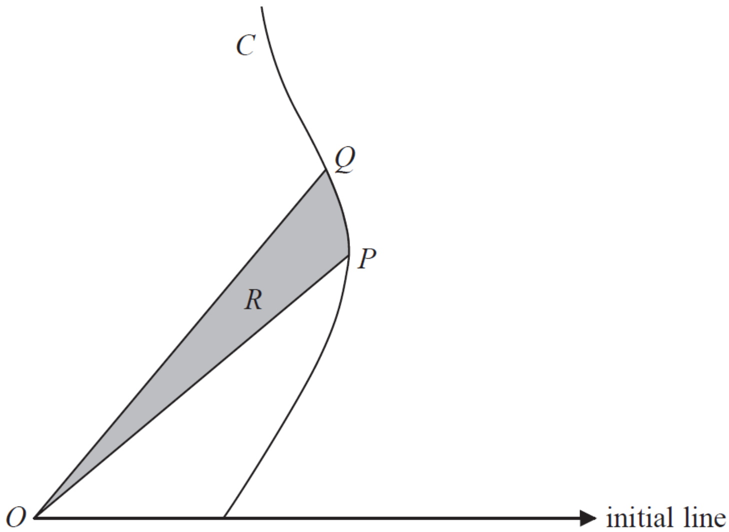
答案：

(a) $\left(\dfrac{9a}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$

(b) $\left(\dfrac{9\pi}{4}+\dfrac{81\sqrt{3}}{16}\right)a^2$

提問及引導學生解題：

2. 2014 Jun FP2



上圖中曲線極座標方程： $r=1+tan\theta,\quad 0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$

曲線 C 上點 P 的切線與極軸互相垂直。

(a)求點 P 極座標

(b)求陰影面積 R.

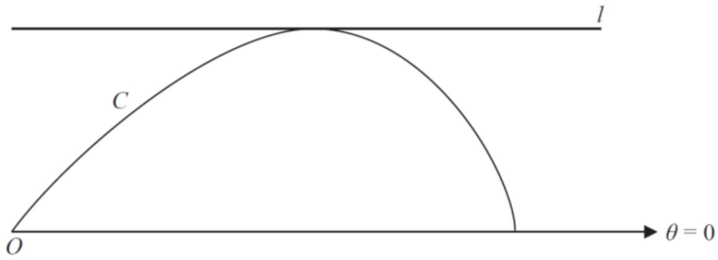
答案：

(a) $\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$

(b) $\dfrac{1}{2}\left(ln2+\sqrt{3}-1\right)$

要求學生嘗試解題：

3. 2014 Jun R FP2



上圖中曲線極座標方程: $r = 2cos2\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

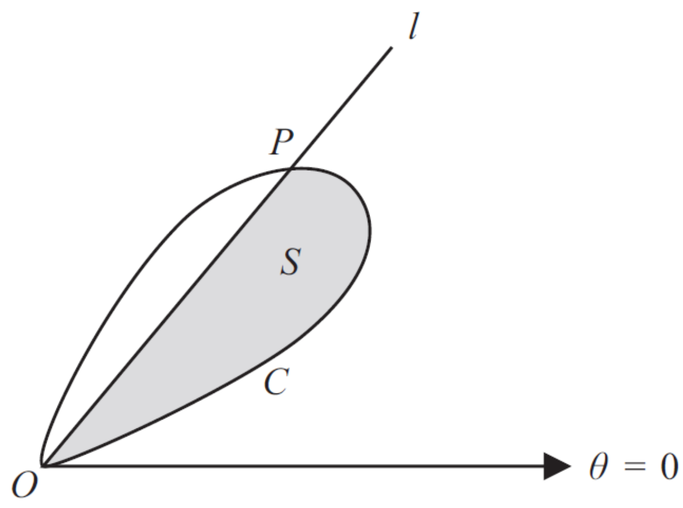
直線 l 平行於極軸並與曲線 C 相切。

求直線 l 方程，答案以 $r = f(\theta)$ 形式表示。

答案：$r = \frac{2\sqrt{6}}{9} csc\theta$

要求學生嘗試解題：

4. 2013 June FP2



上圖中曲線極座標方程: $C: r = a\sin 2\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

半線 l 與 C 相交於極點 O 和點 P，曲線 C 上點 P 切線平行極軸，點 P 極座標為 (R,ϕ)。

(a)証明 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(b)求 R 準確值

(c)求圖中陰影面積 S\

答案：

(a)PROOF

(b) $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

(c) $\frac{1}{36}a^2\left(9\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{2}\right)$

課堂測試：

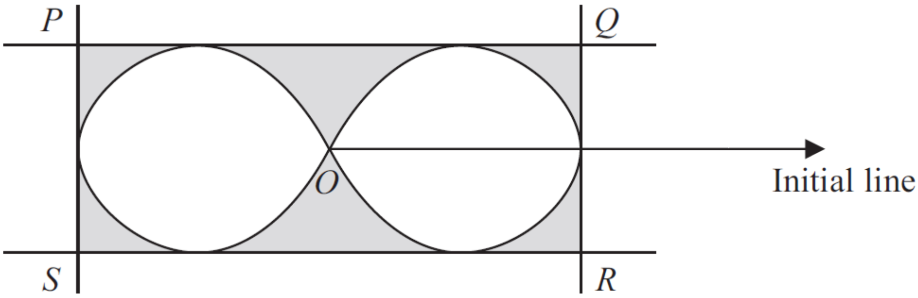
5. 2012 Jun FP2

曲線極座標方程: $C: r = 1 + 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

曲線 C 上點 P 切線平行於極軸，已知 O 為極點，求長度 OP 準確值。

答案：$\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

6. 2013 June R FP2



上圖中曲線極座標方程： $C: r = 3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}$， $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$

線段 PQ, SR, PS 和 QR 與曲線 C 相切，PQ 和 SR 與極軸平行，PS 和 QR 與極軸互相垂直，極點為 O。

(a)求長方形中白色部分面積

(b)求長方形中陰影部分面積

答案：

(a)9

(b)$9\sqrt{2}-9$

叄、試教評估與反思建議

單元一： 學生最感困惑的是在第二、三象限中某一點的角度計算，由平面直角座標轉變為極座標的形式。同學必須注意平面直角座標系統中 x 及 y 的正負符號。

單元二： 學生未能充分利用 $x = r\cos\theta$ 及 $y = r\sin\theta$ 這兩個等式，將極座標方程轉換為平面直角座標方程。以及 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$、$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ 等公式。

單元三： i）學生未能充分利用極座標方程的對稱性來減少繪畫曲線的步驟及計算過程。

ii）學生在繪畫心臟線（$r = a + b\cos\theta$）時，未能掌握 a, b 對於曲線的影響。

iii）學生經常忽略極座標方程對於 θ 的定義域。

單元四： i）學生未能正確掌握極座標方程如何掃出扇形面積，即曲線的起始點及結束點。

ii）因學生經常忽略極座標方程對於 θ 的定義域，所以未能正確掌握兩曲線相交交點的極座標。

iii）學生必須掌握對於 $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ 的積分。

單元五： 學生能掌握找出切點的極座標位置，但未能完全掌握水平切線與垂直切線的表達方程。

肆、參考文獻

1.Mark Rowland（2009）, Further Pure FP2 , Oxford .

2.笛卡爾的 13 封情書(故事) http://163.26.206.147/~registration/heart.pdf (2019/3/12 瀏覽)

3.Parametric equations and polar coordinates

https://www.youtube.com/watch?v=jexMSlSDubM (2019/3/19 瀏覽)

4.Graphing Polar Equations

https://www.youtube.com/watch?v=gHq4El7wJQ4 (2019/3/20 瀏覽)

伍、相關教材

一、課材課件

1. DESMOS 軟件
2. Greg Attwood, Lee Cope （2009）, Edexcel AS and A Level Modular Mathematics, edexcel.

二、課堂照片