2018/2019 學年教學設計獎勵計劃

等差數列

參選類型：教案
參選編號：C120
科目：數學
組別：高中教育
實施年級：高一

簡介

數列本身是一種特殊函數，在實際生活中也有著廣泛的應用。如禮堂的座位安排、鞋的尺碼大小、閱讀書本頁數、天文學的知識應用等。數列也是在整個中學數學教學內容的一個知識滙合點，很多知識都與數列有著密切聯繫，之前學過的代數、列式、方程、函數等知識都在這一章得到充分的應用。

而等差數列是數列的其中一個內容，也是高中數學課程中的一個必學課題，亦為日後學習等比數列奠定基礎，它起著承前啟後的作用。因此，我們要讓學生能深入地明白及運用等差數列的知識。但我們不能直接地告訴學生等差數列的定義和通項公式，而要創造一些數學情境，讓學生自主觀察數列的變化，引導學生去發現數列與等差數列的意義。我們在討論等差數列的概念時，要突出它與一次函數的關係，這樣就便於利用所學過的一次函數的知識來認識等差數列的性質。在這樣的學習過程中，能激發學生的思考能力、學習興趣，提升學生的數學素養。

本教學計劃主要講授的課題是等差數列的概念性知識、通項公式和等差數列前 n 項和公式。我們在課堂設計上進行了不同的探究式教學活動，讓學生能自行探索新知識。當學生能說出等差數列的意義時，老師的角色就是更清晰地作補充總結，等差數列的數之間的間隔相等;後一項減去前一項的差值是一個定值;公差記作 d 是取自 difference 的首字母 d 等概念性的知識。我們亦在課堂播放相關的教學視頻，加強學生對等差數列的定義及公式的認知，也便於總結課堂知識。

高一學生已經具有一定的理性分析能力和概括能力，對數學的公式的運用也具備一定的技能。因此，老師在說明等差數列的計算方式時，可透過一題多解的形式，提高學生解決問題的能力，讓學生能熟練等差數列的公式，也引導學生發現等差數列前 n 項和的公式，發展學生多方面能力。

目次

教學進度表

授課時間 （年-月-日）	節數	課節	課題名稱	課題內容	課時 (分鐘)
2019 年 1 月 28 日	1	第一課節	等差數列	理解等差數列的概念;能夠判斷數列是否等差數列	40
2019 年 1 月 29 日	1	第二課節	等差數列	掌握等差數列的通項公式和推導方法	40
2019 年 1 月 30 日	1	第三課節	等差數列	探索等差數列性質的過程;掌握等差數列的性質公式	40
2019 年 1 月 31 日	1	第四課節	等差數列的前 n 項和	掌握等差數列的前 n 項和公式及推導方法	40
2019 年 2 月 14 日	1	第五課節	等差數列的前 n 項和	解決與等差數列有關的綜合問題	40
2019 年 2 月 15 日	1	第六課節	等差數列的前 n 項和	建立等差數列模型解決實際問題。	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1.理解等差數列的概念。

2.掌握等差數列的通項公式和推導方法。

3.掌握等差數列的性質公式。

4.通過等差數列的圖像的應用，進一步滲透數形結合思想、函數思想；通過等差數列通項公式的運用，滲透方程思想。

5.掌握等差數列的求和公式和推導過程。

6.能熟練運用求和公式；

7.能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

8.通過等差數列和相關模型的學習，感受等差數列的內在規律特點從而體會數學美。

二、主要內容

在學生已有數列的概念知識的基礎下，教導等差數列的課題時，我們創造了一些數學情境，導入新課，讓學生自主觀察數列的變化，引導學生去發現數列與等差數列的意義，能激發學生的思考能力、學習興趣。

本教學主要分為六個課時。

第一課時主要探究等差數列的概念，運用圖像讓學生發現有規律的數列，從而引入等差數列的概念及通項公式，也引入等差數列在天文學的應用，讓學生經歷規律的分析，從而運用實際知識解決問題。

第二課時主要讓學生運用等差數列的通項公式及其推導方法，通過一題多解的練習，靈活運用等差數列的性質公式。

第三課時主要讓學生經歷探索等差數列性質的過程，將等差數列的通項公式轉換成關於 y 與 x 的函數關係式，讓學生能從函數角度理解等差數列。

第四課時主要探究等差數列的求和公式和推導過程，也將等差數列的求和公式看成是一個特殊的關於正整數 n 的二次函數，連接函數與數列的知識。

第五課時主要讓學生能解決與等差數列有關的綜合問題。

第六課時主要建立等差數列模型，運用等差數列的性質解決問題。

三、設計創意和特色

1)教學設計激發生思維:

- 教學過程由淺入深，透過生活例子，提高學生的學習興趣。
- 讓學生觀察一些特殊的數列，自行發現當中的規律是數之間的間隔相等，後一項減去前一項的差值是一個定值，從而激發學生的數學思維，加強學生的數感能力。
- 引入等差數列在天文學的應用、生活中的例子等，讓學生經歷規律的分析，從而運用實際知識解決問題。
- 等差數列可以理解為一次函數圖像上有相同間隔距離的點，我們將等差數列的通項公式轉換成關於 y 與 x 的函數關係式，讓學生能從函數角度理解等差數列，連繫已學習的知識。
- 運用具體例子來展開等差數列的求解題，並且設置相關練習，即時反饋學生的學習成效。
- 在課堂總結時，採用列重點或思路圖等方式幫助學生總結本堂學習的知識，讓學生一目了然，也方便日後複習時，找到重要的知識點。

2)運用多元化教學工具:

- 利用投影片的動態變化演示教與學過程，加深學生對等差數列概念的記憶。
- 運用圖像幫助學更生容易發現等差數列的性質及探究等差數列的通項公式
- 於課堂上加插相關的教學影片，影片內容包含推導公式、判斷是否等差數列、運算過程等，加強學生對等差數列的認知。
- 利用板書詳細地一步步演示運算步驟，滲透數形結合思想、函數思想。

3)探究學習:

- 安排學生以小組形式討論及探究問題，鼓勵學生能在互動過程中合作學習，帶出實踐性和思考性的數學學習過程。

- 在運用等差數列的通項公式、性質公式去做求解題時，我們在同一個問題上採用不同的解法，讓學生對公式的各種運用融會貫通，使學習更有效率。

4)加強學生對公式的記憶:

- 讓學生親自經歷通項公式的求解過程，使學生能理解當中來龍去脈和細節。
- 通等差數列的求和公式和推導過程記在正式引入課題前，先讓同學默寫等差數列的通項公式和求和公式，增強同學臨場記憶公式的能力，檢驗效果。通過相互批改，看到別人的書寫，也增強自己對公式的印象。
- 老師推導完等差數列的求和公式後，分析公式的結構，可見到當我們知道首項，末項，公差，求和結果的任三項，便可以根據這個等式求出第四項，頓悟公式內涵，增強學生用公式的能力。

四、教學重點

1. 等差數列的通項公式、性質公式；
2. 求和公式的推導過程。

五、教學難點

1. 靈活運用等差數列的性質公式；
2. 建立等差數列數列模型解決問題。

六、教學用具

PPT，工作紙，默寫公式小卡紙

貳、教案

作品名稱	等差數列	人數	24 人
實施年級	高一	總實施節數	6 節
實施日期	2019 年 1 月 28 日-2 月 15 日	每節課時	40 分鐘
科目	數學	科目每周節數	6 節

日期	節數	課題名稱	教材	教學目標		教學內容及活動	教學資源
				單元目標	基力要求編號		
2019年1月28日至2月15日	6	1. 等差數列 2. 等差數列的前 n 項和	高中人教版數學第一冊(上)	1.理解等差數列的概念； 2.掌握等差數列的通項公式和推導方法； 3.掌握等差數列的性質公式。 4.通過等差數列的圖像的應用，進一步滲透數形結合思想、函數思想；通過等差數列通項公式的運用，滲透方程思想。 5.掌握等差數列的求和公式和推導過程； 6.能熟練運用求和公式； 7.能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。 8.通過等差數列和相關模型的學習，感受等差數列的內在規律特點從而體會數學美。	A－6－1 A－6－2 A－6－3 A－6－4 A－6－5 A－6－6	1. 等差數列的概念; 2. 等差數列的通項公式及其推導方法； 3. 經歷探索等差數列性質的過程; 4. 等差數列的求和公式和推導過程； 5. 解決與等差數列有關的綜合問題; 6. 建立等差數列模型解決實際問題。	1.PPT 2.工作紙 3.默寫公式小卡紙

教學過程

3.2 等差數列-第一課時

【教學目標】

1.理解等差數列的概念；

2.掌握等差數列的通項公式和推導方法；

3.掌握等差數列的性質公式。

4.通過等差數列的圖像的應用，進一步滲透數形結合思想、函數思想；通過等差數列通項公式的運用，滲透方程思想。

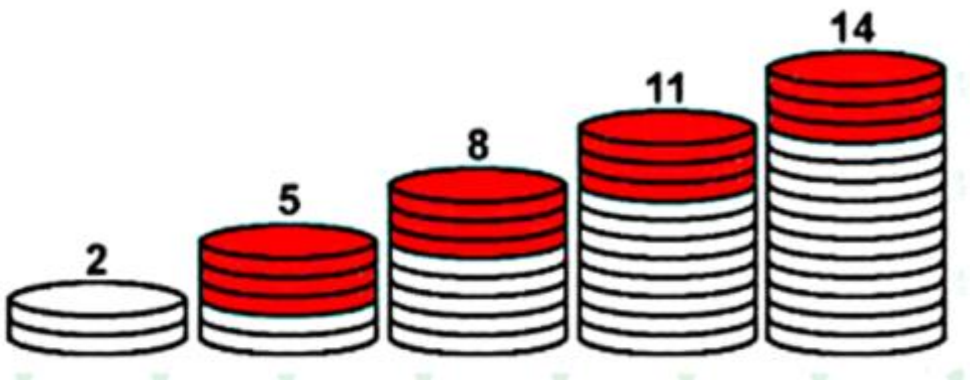
【教學重點】等差數列的通項公式、性質公式

【教學難點】靈活運用等差數列的性質公式

【基力要求】

A-6　數列	
A-6-3	**理解等差數列的概念，能夠判斷是否等差數列；**
A-6-4	**掌握等差數列的通項公式及其推導方法；經歷探索等差數列性質的過程。**

■　課堂引入



問題 1：上面圖片有什麼特點？

問題 2：觀察下列數列都有哪些特點？

(1) 1，3，5，7，9

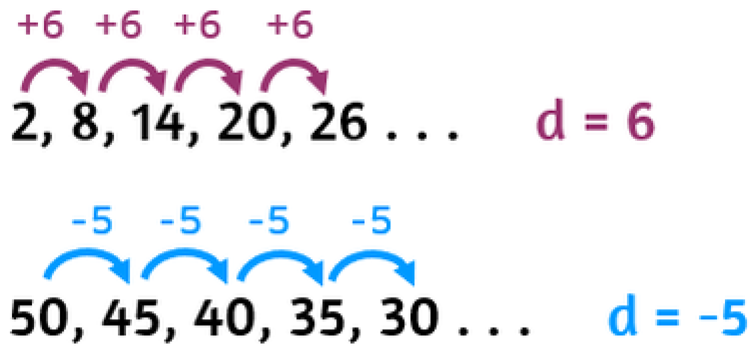
(2) 10，20，30，40，50

(3) 9，6，3，0，-3，-6

(4) 8，8，8，8，8，8

總結：數之間的間隔相等！後一項減去前一項的差值是一個定值。如果我們把這個定值記為 d ，數學語言表示： $a_n - a_{n-1} = d$ 。我們把這樣的數列叫做等差數列，通俗地說就是後一項與前一項的差相等，因此叫等差數列。

由於差總是恒定不變，我們把它叫做公差(common difference)，我們把這個定值公差記作 d，事實上是取自 difference 的首字母 d。



■ 即時練習：下列這些數列是不是等差數列：

1. 9，99，999，9999
2. 1，1，1，1，1

■ 探究新知

設數列$\{a_n\}$是等差數列，公差是d，則由數列定義有

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} = d \\ a_n - a_{n-1} = d \end{cases}$$

設計意圖：讓學生經歷通項公式的求解過程，讓學生理解當中的來龍去脈和細節，頓悟公式內涵。

上面一共有$n-1$個等式，這些等式全部相加可得：(左邊相加=右邊相加)

$$a_n - a_1 = (n-1)d$$

化簡得$a_n = a_1 + (n-1)d$

這是等差數列的通項公式。可以理解為：第一項加上(n-1)個間隔的距離等於第n項。

■ 例題講解

例 1(1)求等差數列 8，5，2，...的第 20 項；

(2)-401 是不是等差數列-5，-9，-13，...的項？如果是，是第幾項？

解：(1)由已知，$a_1 = 8, d = -3$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)\times(-3) = -3n + 11$

(2)由已知，$a_1 = -5, d = -4$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1)\times(-4) = -4n - 1$

令$-401 = -4n - 1$

可知$n = 100$，說明-401 是此等差數列的項，並且是第 100 項。

先求出通項公式，再把數代回通項公式求出 n，如果為正整數則是數列中的某一項，否則就不屬於這一項。

■ 即時練習

(1)求等差數列 3，7，11，...的第 4 項和第 10 項；

(2)求等差數列 10，8，6，...的第 20 項；

(3)100 是不是等差數列 2，9，16，...的項？如果是，是第幾項？

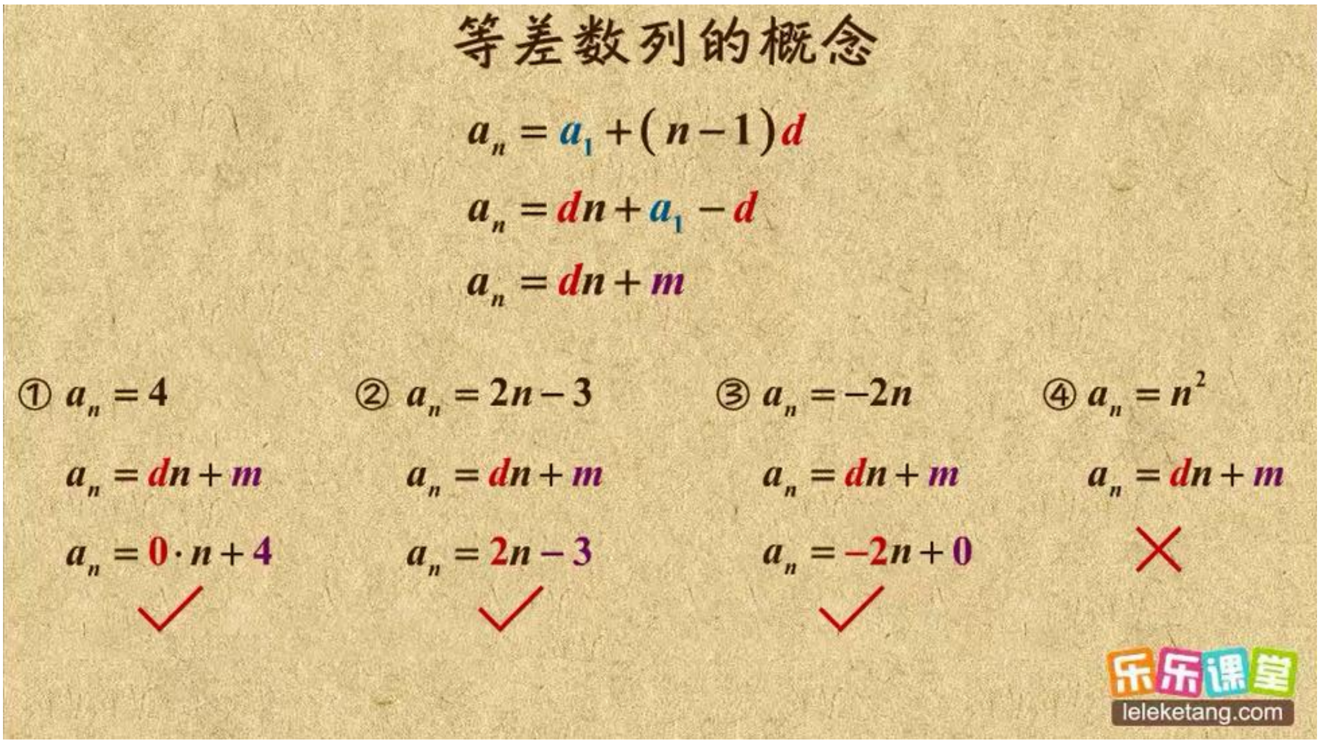
(4)哈雷彗星是人一生中唯一以裸眼最多能看見兩次的彗星。因英國物理學家哈雷首先測定其軌道資料並成功預言回歸時間而得名。最近幾次它出現的年份為 1760 年、1835 年、1910 年、1985 年，下一次哈雷彗星預計會在哪一年出現？請給出你的分析理由。

設計意圖：引入等差數列在天文學的應用，讓學生經歷規律的分析，從而運用實際知識解決問題。

■ 課堂小結

本節課你學習了什麼知識？

觀看等差數列視頻 https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 課後功課

工作紙

3.2 等差數列-第二課時

【教學目標】

1.理解等差數列的概念；

2.掌握等差數列的通項公式和推導方法；

3.掌握等差數列的性質公式。

4.通過等差數列的圖像的應用，進一步滲透數形結合思想、函數思想；通過等差數列通項公式的運用，滲透方程思想。

【教學重點】等差數列的通項公式、性質公式

【教學難點】靈活運用等差數列的性質公式

【基力要求】

A-6　數列
A-6-3　理解等差數列的概念，能夠判斷是否等差數列；
A-6-4　掌握等差數列的通項公式及其推導方法；經歷探索等差數列性質的過程。

■　課堂引入

前面我們知道，等差數列的通項公式為 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

怎麼理解呢？

我們知道數列的第一項 a_1 到第 n 項有 $n-1$ 個公差，這樣第一項加上這 $n-1$ 個公差就得到第 n 項 a_n 。

按這個道理，第二項到第 n 項有 $n-2$ 個公差，因此有 $a_n = a_2 + (n-2)d$ 。一般來說，第 m 項到第 n 項有 $n-m$ 個公差，因此有 $a_n = a_m + (n-m)d$ 。這個公式可以擺脫了一定要從首項才求得通項。

事實上，從直覺也可以感知，如果知道等差數列的中間某一項和公差，那麼往前推或往後推都可以得到這個數列的其它項。

■　例題講解

例 1　在等差數列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5 = 10$ ， $a_{12} = 31$ ，求首項 a_1 與公差 d 。

解法 1

解： $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 10 \\ a_{12} = a_1 + 11d = 31 \end{cases}$ ，

求得$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}$。

點評：這種方法比較直觀，聯立方程組就能求解。

解法 2

設計意圖：深挖題目，在同一個問題上採用不同的辦法，讓學生對公式的各種運用融會貫通，這樣學習更有效率。

$a_{12} = a_5 + 7d \Rightarrow 31 = 10 + 7d$

$\therefore d = 3$
$\because a_1 + 4d = 10$
即 $a_1 + 12 = 10$
$\therefore a_1 = -2$

點評：第二種更加洞察兩個條件的聯繫，可以直接表示出公差。運算上第二種解法更簡捷。

■ 即時練習

(1)等差數列$\{a_n\}$，已知$a_4 = 10$，$a_7 = 19$，求首項a_1與公差d；

(2)等差數列$\{a_n\}$，已知$a_3 = 9$，$a_9 = 3$，求a_{12}。

■ 例題講解

例 2 梯子的最高一級寬 33，最低一級寬 110，中間還有 10 級，各級的寬度構成等差數列，計算各級的寬度。

解：依題意得，$a_1 = 33$，$a_{12} = 110$，$n = 12$，
$\because a_{12} = a_1 + 11d$
$110 = 33 + 11d$
$\therefore d = 7$
$\therefore a_2 = 33 + 7 = 40$，

$a_3 = 47$，

$a_4 = 47 + 7 = 54$，

$a_5 = 54 + 7 = 61 \ldots$

如果a, b, c成等差數列，那麼b叫做a與c的等差中項。比如等差數列 1，5，9 中，5 是 1 與 9 的等差中項。

容易知道$b = \dfrac{a+c}{2}$。

設計意圖：運用具體例子來展開，並且設置相關練習，即時反饋學生的學習成效。

■ 即時練習

(1)100 與 180 的等差中項是________；

(2)-2 與 6 的等差中項是________；

(3)2 與____的等差中項是 48。

■ 課堂小結

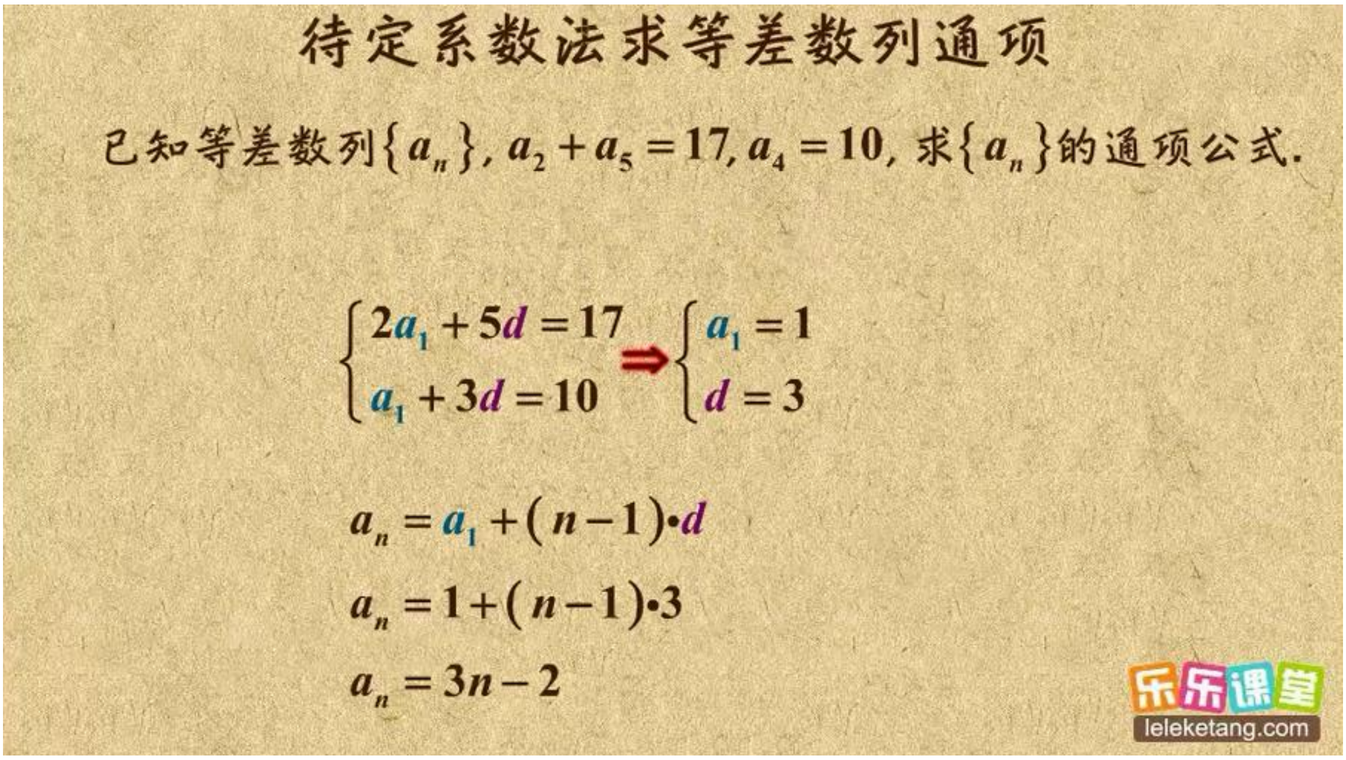
你掌握了如何求等差數列的通項公式嗎？

通項公式

從第一項開始 $a_n = a_1 + (n-1)d$

從任一項開始 $a_n = a_m + (n-m)d$

觀看視頻 https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 課後功課

工作紙

3.2 等差數列-第三課時

【教學目標】

1.理解等差數列的概念；

2.掌握等差數列的通項公式和推導方法；

3.掌握等差數列的性質公式。

4.通過等差數列的圖像的應用，進一步滲透數形結合思想、函數思想；通過等差數列通項公式的運用，滲透方程思想。

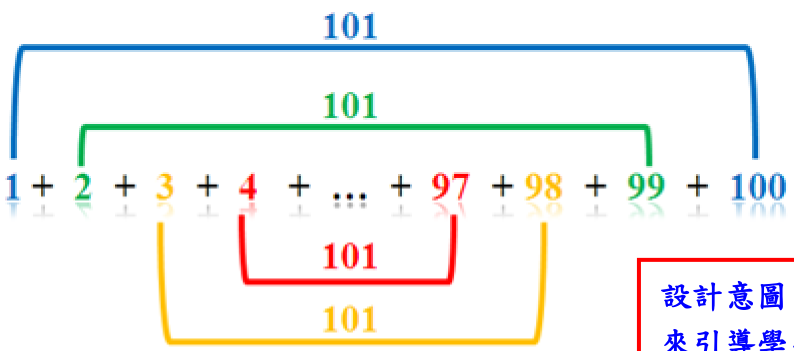
【教學重點】等差數列的通項公式、性質公式

【教學難點】靈活運用等差數列的性質公式

【基力要求】

A-6	數列
A-6-3	理解等差數列的概念，能夠判斷是否 等差數列；
A-6-4	掌握等差數列的通項公式及其推導方法；經歷探索等差數列性質的過程。

■ 課堂引入



設計意圖：運用具體例子來引導學生發現規律。

觀察上圖，在等差數列中，你發現了什麼結論？

$$a_m + a_n = a_p + a_q \ (m+n=p+q)$$

特別地，有 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$，即 $2a_1 = a_1 + a_3$，$\dfrac{a_{10}+a_8}{2} = a_9$。

■ 例題講解

已知 $\{a_n\}$ 是等差數列，$a_1 + a_2 + a_3 = 6$，$a_{14} = 6$，求 a_8。

解：$\because a_1 + a_2 + a_3 = 6$，$\therefore 3a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 2$

$\because a_2 + a_{14} = 2a_8 = 2 + 6 = 8$

$\therefore a_8 = 4$

■ 即時練習

1.已知$\{a_n\}$是等差數列，$a_1+a_2+a_3=10$，$a_{10}=26$，求a_6。

2. 已知$\{a_n\}$是等差數列，$a_{11}+a_{12}+a_{13}=42$，求a_{12}的值。

3．已知$\{a_n\}$是等差數列，$a_{11}=2$，$a_{15}=10$，$a_{16}=12$，求a_{20}的值。

■ 講授新知

在函數觀點下的等差數列的通項公式

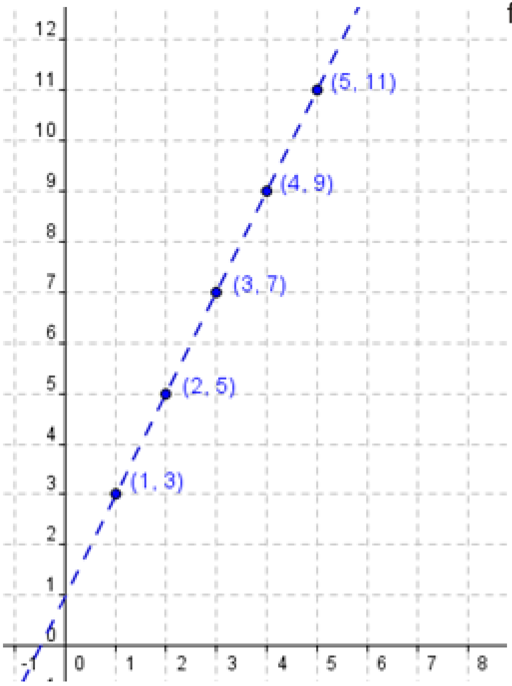
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

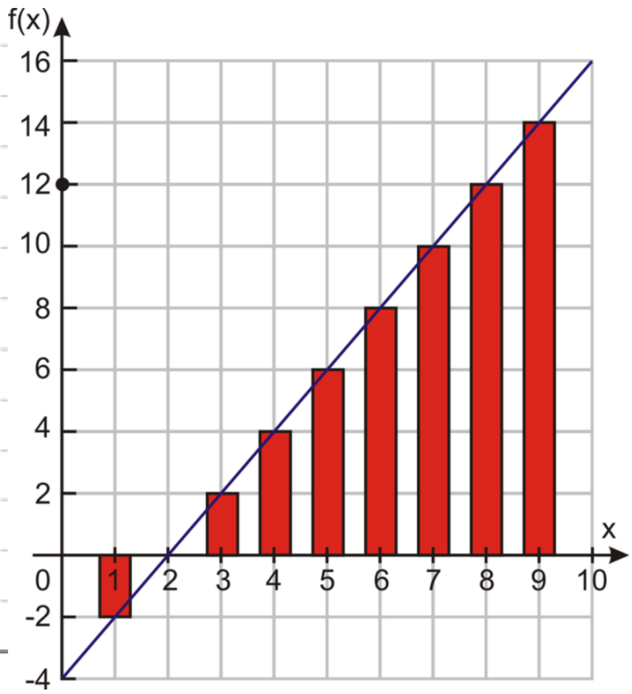
n^{th} term in the sequence | 1st term in the sequence | number of terms in the sequence | common difference

$$y = a_1 + (x-1)d$$

等差數列可以理解為一次函數圖像上有相同間隔距離的點。

設計意圖：讓學生從函數角度理解等差數列。





所以數列可以看作是特殊的函數。等差數列的通項公式對應於一次函數。

■ 課堂小結

本節課我們學了哪些內容？

■ 課後功課

工作紙

3.3 等差數列的前 n 項和-第一課時

【教學目標】

1.掌握等差數列的求和公式和推導過程；
2.能熟練運用求和公式；
3.能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

【教學重點】求和公式的推導過程
【教學難點】建立等差數列模型解決問題

【基力要求】

A-6 數列
A-6-5 掌握等差數列的前 n 項和公式及推導方法，能熟練運用通項公式及前 n 項和公式；
A-6-6 能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

■ 課堂引入

我們先來看看一個簡單數列的求和：

$$S=1+2+3+...+98+99+100 \ (1)$$

把這數倒過來寫，有

$$S=100+99+98+...+3+2+1 \ (2)$$

(1)+(2)，得

$$2S=101+101+...+101=101\times 100$$

$$\therefore \ S=\frac{101\times 100}{2}=5050$$

這樣給我們啟示，對於等差數列 $\{a_n\}$，把 S_n 記作前 n 項的和：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1$$

兩式相加得

$2S_n=(a_n+a_1)+(a_{n-1}+a_2)+\cdots+(a_1+a_n)$ ，$\because \ (a_n+a_1)=(a_{n-1}+a_2)=\cdots$

$\therefore\ S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$，可以簡記為(首項+末項)×項數÷2

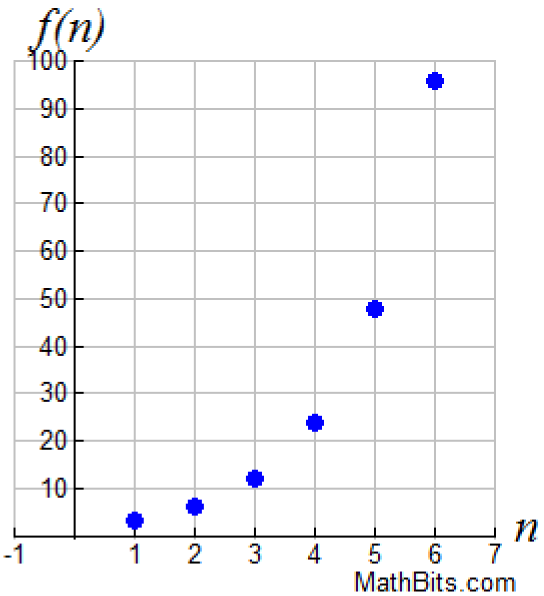
另外，如果我們把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入，可得

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=An^2+Bn$$

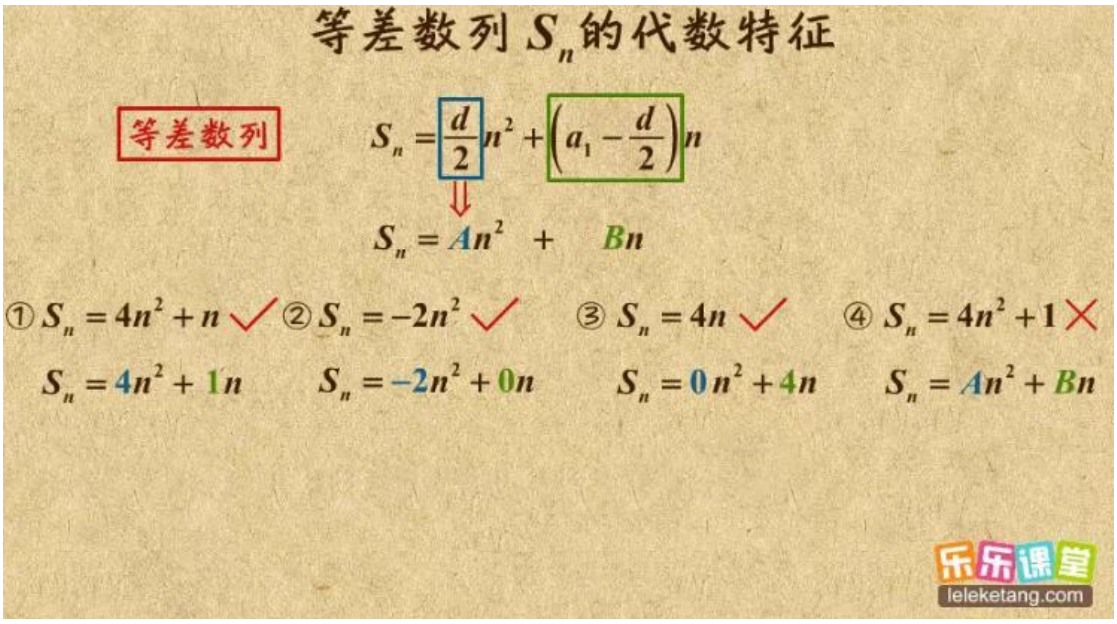
這個公式告訴我們，知道首項，末項，公差，求和結果的任三項，可以根據這個等式求出第四項。所以不要總想著這個公式只能用來求和。

另外 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=An^2+Bn$ 可以看成是一個特殊的關於正整數 n 的二次函數。

如果一個全是正數、公差也是正數的求和函數圖像(拋物線的一半)



觀看等差數列的相關視頻 https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 例題講解

例 1 等差數列-10，-6，-2，2，...前多少項的和是 54？

解：由已知，$a_1=-10$，$d=4, S_n=54$，$\therefore -10n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4=54$

整理，得 $n^2-6n-27=0$

$\therefore n=9$(負值舍去)

例 2 求集合 $M=\{m\,|\,m=7n, n\in N^*, m<100\}$ 中元素的個數，並求這些元素的和。

解：$7n<100$，$n<14.**$，最大值只能取 14，也就是說有 14 項，首項是 7，公差也是 7，由公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=14\times 7+\frac{14\times 13\times 7}{2}=735$$

法 2 容易知道 $a_1=7$，$d=7$,末項為 $a_{14}=14\times 7=98$，

$$\therefore S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735$$

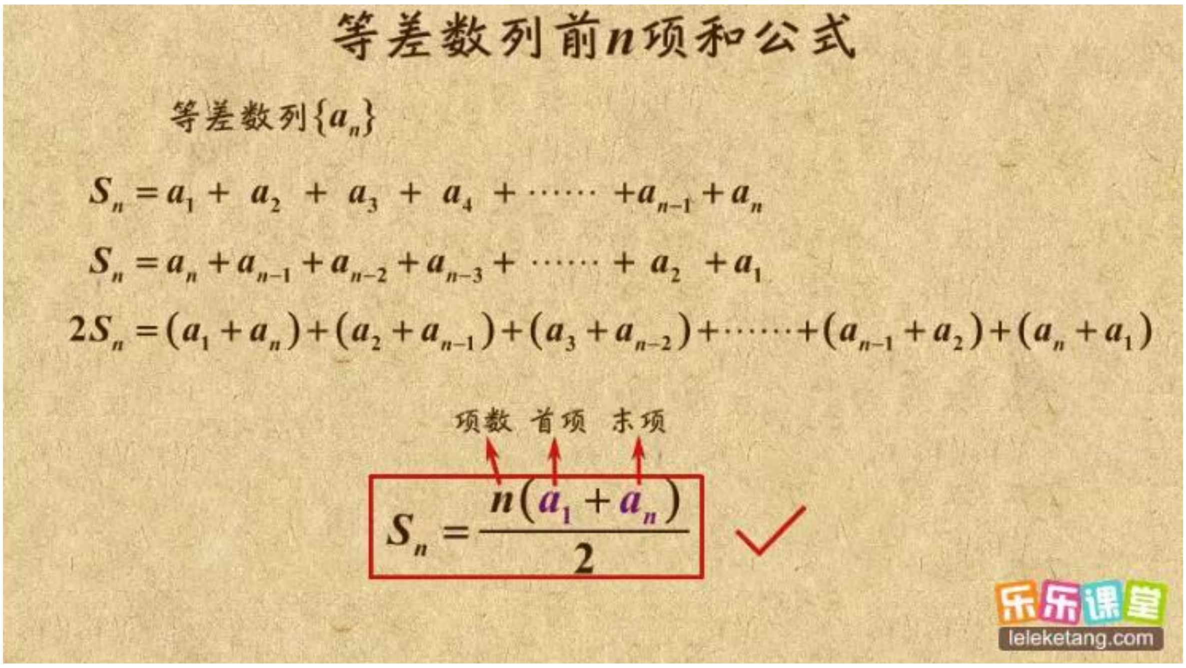
■ 即時練習

求集合 $M=\{m\,|\,m=2n-1, n\in N^*, m<60\}$ 中元素的個數，並求這些元素的和。

■ 課堂小結

本節課我們學習了什麼內容？(等差數列的求和公式，知三求一)

觀看等差數列求和公式視頻：https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 課後功課

工作紙

3.3 等差數列的前 n 項和-第二課時

【教學目標】

1.掌握等差數列的求和公式和推導過程；
2.能熟練運用求和公式；
3.能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

【教學重點】求和公式的推導過程
【教學難點】建立等差數列數列模型解決問題

【基力要求】

A-6	數列
A-6-5	掌握等差數列的前 n 項和公式及推導方法，能熟練運用通項公式及前 n 項和公式；
A-6-6	能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

■ 課堂引入

之前學習了等差數列的求和公式，本節課繼續深入學習。
在這之前，要先溫習之前的公式。
環節一：
派發小卡紙，當場默寫公式

$a_n =$

$a_n =$

$S_n =$

$S_n =$

$a_n =$

$a_n =$

$S_n =$

$S_n =$

環節二：交換批改

設計意圖：增強同學臨場記憶公式的能力，檢驗效果。通過相互批改，看到別人的書寫，增強自己對公式的印象。

■ 例題講解

例 1 已知一個等差數列的前 10 項是 310，前 20 項的和是 1220，求 S_n。

解：由已知：$\begin{cases} \dfrac{(a_1+a_{10})\times 10}{2}=310 \\ \dfrac{(a_1+a_{20})\times 20}{2}=1220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_{10}=62 \\ a_1+a_{20}=122 \end{cases} \Rightarrow 10d=60$

$\therefore d=6$

而由第一條方程，$a_1+a_1+9d=62$，$a_1=4$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=4+6(n-1)=6n-2$

$\therefore S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(4+6n-2)\times n}{2}=3n^2+n$

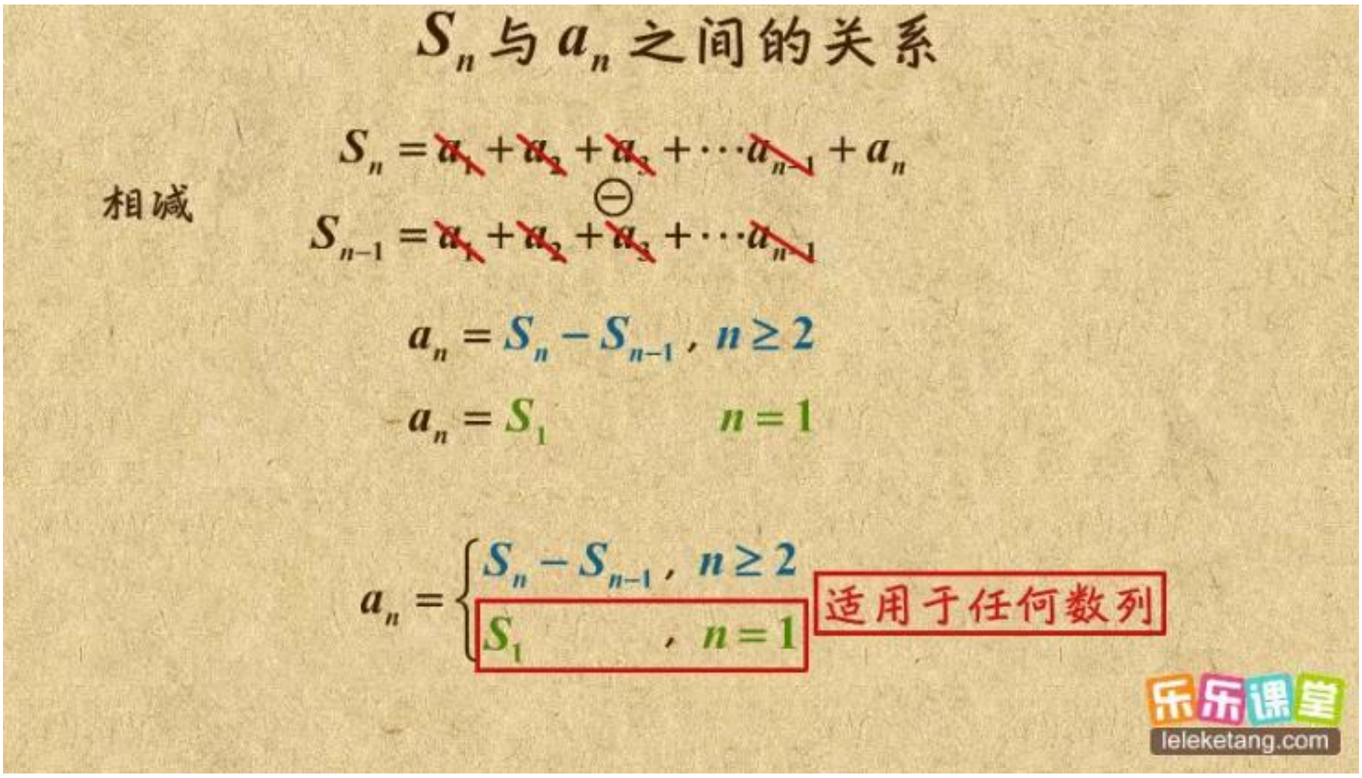
■ 即時練習

1.一個等差數列的第 6 項是 5，第 3 項與第 8 項的和也是 5，求這個數列的前 9 項之和。

公式補充：$a_n=\begin{cases} a_1(n=1) \\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2) \end{cases}$

注：$n=2, S_n-S_{n-1}$不一定等於a_1。此時需要驗證。

觀看視頻 https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 例題講解

例1 設等差數列的前 n 項和是 $S_n = 5n^2 + 3n + 3$，求此等差數列的通項公式。

解析：凡是給出求和公式求通項的，都運用上述公式。

解：$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n + 3 - [5(n-1)^2 + 3(n-1) + 3] = 10n - 2(n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 11$

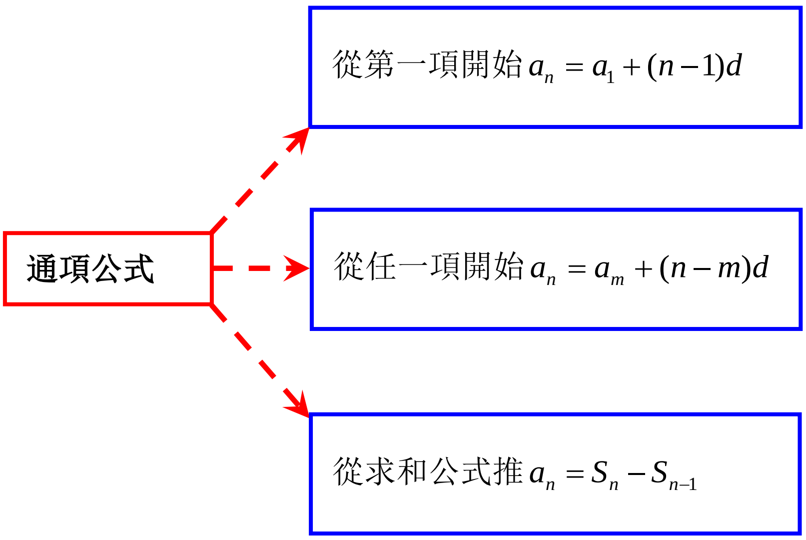
$\therefore a_n = \begin{cases} 10n - 2(n \geq 2) \\ 11(n = 1) \end{cases}$

■ 即時練習

設等差數列的前 n 項和是 $S_n = 3n^2 + 2n$，求此等差數列的通項公式。

■ 課堂小結

本節課我們學習了哪些內容？



■ 課後功課

工作紙

3.3 等差數列的前 n 項和-第三課時

【教學目標】

1.掌握等差數列的求和公式和推導過程；
2.能熟練運用求和公式；
3.能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。
4.通過等差數列和相關模型的學習，感受等差數列的內在規律特點從而體會數學美。

【教學重點】求和公式的推導過程

【教學難點】建立等差數列模型解決問題

【基力要求】

A-6	數列
A-6-5	掌握等差數列的前 n 項和公式及推導方法，能熟練運用通項公式及前 n 項和公式；
A-6-6	能夠解決與等差數列有關的綜合問題，能建立等差數列模型解決實際問題。

■ 課堂引入

本節課繼續深入學習等差數列的求和。在此之前，需要溫習相關內容，確保同學已能掌握基本的等比數列公式。

環節一：

派發小卡紙，當場默寫公式

$a_n =$	$a_n =$
$a_n =$	$a_n =$
$S_n =$	$S_n =$
$S_n =$	$S_n =$

環節二：交換批改

設計意圖：增強同學臨場記憶公式的能力，檢驗效果。通過相互批改，看到別人的書寫，增強自己對公式的印象。

■ 例題講解

例 1 已知數列$\{a_n\}$是等差數列，S_n是前 n 項的和。求證：S_6，$S_{12}-S_6$，$S_{18}-S_{12}$成等差數列。

分析：只需證明$2(S_{12}-S_6)=S_6+S_{18}-S_{12}$，換言之只需證明$3S_{12}=3S_6+S_{18}$

證：只需證明$2(S_{12}-S_6)=S_6+S_{18}-S_{12}$，即證明$3S_{12}=3S_6+S_{18}$

$$3S_{12}=3\times(a_1+a_{12})\times 12\div 2=18(a_1+a_{12})$$

$$3S_6+S_{18}=3\times(a_1+a_6)\times 6\div 2+(a_1+a_{18})\times 18\div 2=18a_1+9(a_6+a_{18})$$

而$a_6+a_{18}=2a_{12}$，回代上式得

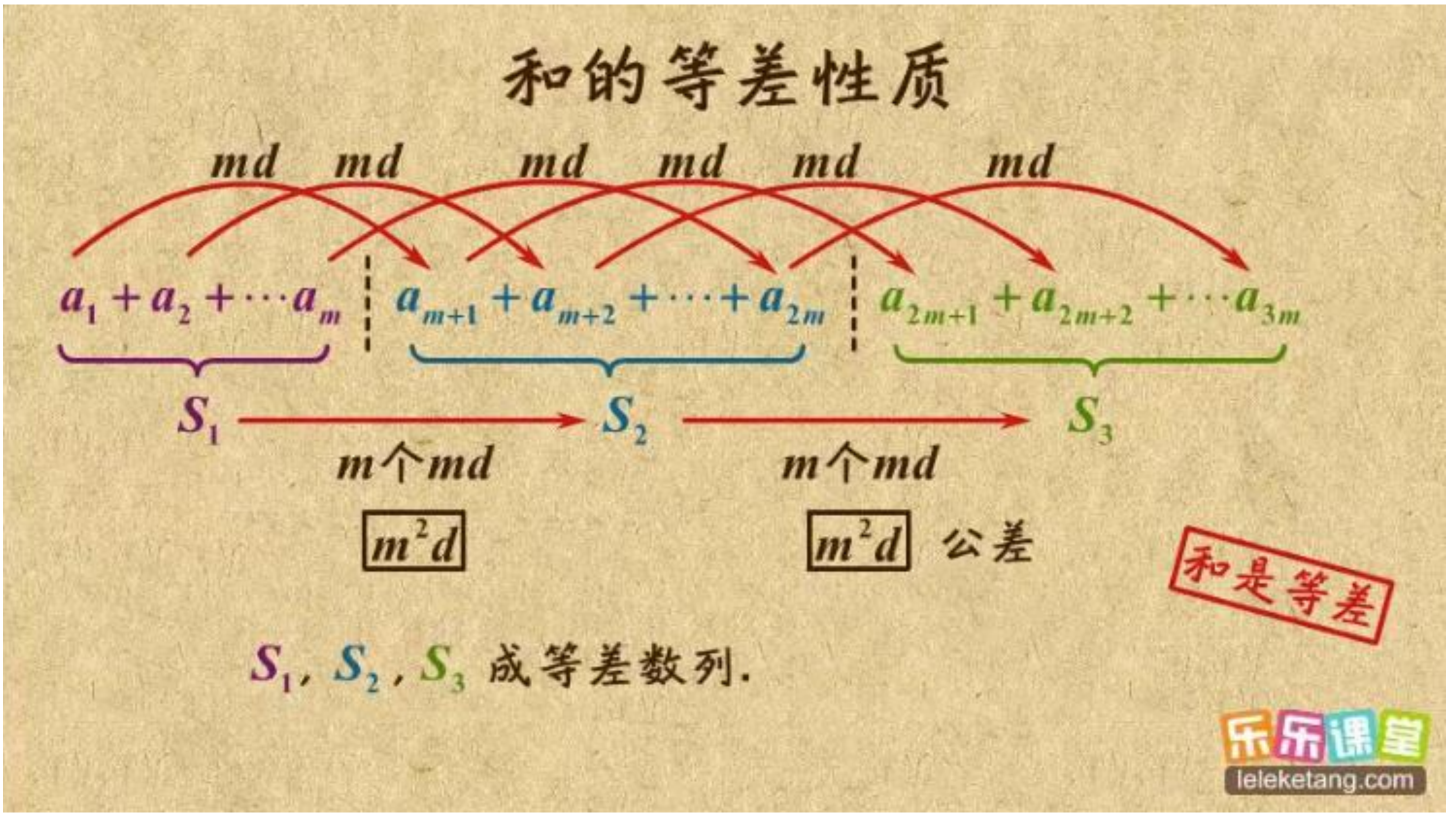
$$3S_6+S_{18}=18a_1+9\times 2a_{12}=18(a_1+a_{12})=3S_{12}$$

$\therefore\ 2(S_{12}-S_6)=S_6+S_{18}-S_{12}$，證畢。

結論：等差數列的和也具有等差性質。

設計意圖：讓學生瞭解到等差數列的和也有類似的等差性質，並且運用已知可以證明。

觀看視頻：https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



■ 即時練習

進一步探究：已知數列$\{a_n\}$是等差數列，S_n是前 n 項的和。

S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等差數列嗎？

分析：只需證明$2(S_{2k}-S_k)=S_k+S_{3k}-S_{2k}$

證：只需證明 $2(S_{2k}-S_k)=S_k+S_{3k}-S_{2k}$，即證明 $3S_{2k}=3S_k+S_{3k}$

$$3S_{2k}=3\times(a_1+a_{2k})\times 2k\div 2=3k(a_1+a_{2k})$$

$$3S_k+S_{3k}=3\times(a_1+a_k)\times k\div 2+(a_1+a_{3k})\times 3k\div 2=\frac{6k\times a_1+3k\times(a_1+a_{3k})}{2}$$

而 $a_1+a_{3k}=2a_{2k}$，回代上式得

$$3S_k+S_{3k}=3\times(a_1+a_k)\times k\div 2+(a_1+a_{3k})\times 3k\div 2=\frac{6k\times a_1+3k\times(a_1+a_{3k})}{2}=3k(a_1+a_{2k})$$

$\therefore 2(S_{2k}-S_k)=S_k+S_{3k}-S_{2k}$，證畢。

補充：等差數列的求和也可以=中項×項數。請證明之。

■ 課堂小結

本節課我們學習了哪些內容？

■ 課後功課

工作紙

叁、試教評估與反思建議

等差數列教學評估:

在等差數列的課題上，我們採用多元化的教學方法，令學生能對課題產生興趣，並投入學習等差數列的知識，得好不錯的成效:

1. 我們運用不同的教學工具、激發思考的問題，成功吸引學生像偵探般查找數列的規律，也見到學生對這課題的學習積極性很高，課堂回答率很高，而我們也立即給予肯定和表揚，讓學生對數學有成就感。

2. 老師讓學生從函數觀點上看等差數列的通項公式，與之前學習的函數作知識聯繫，讓學生體會方程的思想，學生也明白到數學的知識是一環扣一環，可互相應用。

3. 我們在課堂中加插通過即時練習，可讓老師在巡堂時知道學生吸收本課知識的程度，方便老師依學生的程度作教學進度的調整。

4. 我們在課堂完結前加加插相關的教學影片，影片內容包含推導公式、判斷是否等差數列、運算過程、該節課的知識點等，加強學生對等差數列的認知，也方便學生歸納總結重點。

5. 我們通過一個簡單例題啟發學生運用等差數列的前 n 項和公式時，知道首項，末項，公差，求和結果的任三項，就可以根據這個等式求出第四項。所以不要總想著這個公式只能用來求和，增強學生對公式運用的靈活性。

5. 在課堂上加插默寫公式環節，可增強同學臨場記憶公式的能力，檢驗效果，也通過相互批改，看到別人的書寫，增強自己對公式的印象。

然而，課堂也存在一些不盡人意的地方:

1.由於我們採用圖像引入等差數列的概念和性質，讓老師和同學一齊觀察、探究等差數列的性質和公式，因此大部分學生能掌握等差數列的概念和性質，但有個別學生未能熟練運用通項公式，以及不知道何時用哪一個公式比較好。

2. 學生在解題過程中，容易出現一些運算上的錯誤，例如:在解題過程中，容易出現之錯誤類型，有下列幾種：基本算式（整數、分數的四則運算及去括號、分配律）之計算錯誤、當公差為負時，前後項之計算，產生加減混淆的情況、不清楚分配律等定律。

3.找到公差時，學生容易誤入兩數差為大數減小數之觀念影響，從而忽略了數列公差的定義為後項減前項，產生誤判之情形。

4.當學生已熟練公式時，我們開始引入等差數列的證明題。學生對於判斷一組數列是否為等差數列感到自信，但對於做等差數列的證明題感到困惑。

等差數列教學反思建議:

為此，我們反思了一些改善不足的方法:

1.可讓學生在做題前先默公式，方便學生做題時判斷運用哪一條公式，減少公式錯誤的機會。

2.等差數列的第二課時是讓學生能運用等差數列的性質公式，老師在例題講解時能用一題多解的方法，點評不同解法的優缺點，讓學生能找出適合自己做題的解法，靈活運用等差數列的性質公式。

3.老師講數列從函數的觀點來看是當引數從小到大的依次取值時，所對應的一列函數值，所以我們以從前往後發展的眼光來看，提醒學生用“後一項與前一項的差為常數”更為妥當。

4.在設計教學安排上，我們可先安排一些習題是直接套用公式求解，然後當學生熟練公式後，我們再加大練習題的難度，激發學生思維能力。這種由簡單到難的過程，能讓增強學生對數學的成就感和自信心。

5. 在證明等差數列時，學生往往用有限的幾個連續兩項的差為常數就隨意得到此數列為等差數列的結論，其實這是一種不完全的歸納，這種方法是不嚴密，應該用等差數列的數學運算式來證明，也要強調證明格式，使學生在打好高中數學的基礎。。

6. 讓學生多做相關練習，鞏固基礎，希望通過熟能生巧，期望培養學生做一步看三步的能力。

肆、參考文獻

- 教育暨青年局 (2017)。《高中教育基本學力要求》
- https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/89/115838888.pdf 等差數列教師手冊
- 從變化量與對稱性探索等差數列與等差級數(2013)。陳梅仙。科學教育月刊。國立臺灣師範大學科學教育中心

伍、相關教材

- 學生的功課 (運用等差數列的性質公式、前 n 項和公式)

補充 P.111 (1-14) 1/2

1) 已知正整數 m, n, p 和 q 滿足 $m+n=p+q$，則在等差數列中，$a_m + a_n =$ ＿.

Sol: ∵ $m+n=p+q$，m, n, p, q 是等差數列.

$a_m + a_n = a_p + a_q$.

2) 等差數列求和公式 $S_n = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}{}$ (已知 a_1, n, d)

3) 已知一個等差數列的首項 3，公差=7，求 a_8.

Sol: ∵ $a_1 = 3$，$d = 7$.

$a_8 = a_1 + (8-1) \times 7$

$a_8 = 52$.

4) 已知 $\{a_n\}$ 是一個等差數列，$a_3 + a_4 + a_5 = 12$.

求：a_4，$a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.

Sol: ∵ $a_3 + a_4 + a_5 = 12$

$3a_4 = 12$

$a_4 = 4$.

$a_3 + a_5 = 8$.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_7$

$a_1 + a_7 = a_2 + a_6$.

$2(a_1 + a_7) + 12$. 2-2a4

$= 16 + 12 = 28$.

5) If $5m-7, m, 3m+19$ is an arithmetic program (A.P), then $m =$

Sol: $\dfrac{5m-7+3m+19}{2} = m$

$5m+3m+12 = 2m$

$m = -2$.

6) 如果 $\{T_n\}$ 是一個等差數列，$T_4 = 7$，$T_8 = 17$，求 T_6.

Sol: $\dfrac{T_4 + T_8}{2} = T_6$

$\dfrac{7+17}{2} = T_6$

$T_6 = 12$.

7). 在等差數列 1, 4, 7, … 中，5995 是它的第 ? 項

Sol: $d = a_2 - a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

$a_n = 1 + (n-1)d$

$5995 = 1 + 3n - 3$

$n = 1999$　　　∴ 5995 是它第 1999 項.

8) 在等 項數列 $\{a_n\}$ 中，$a_3 = 2$. 則該數列的前5項和

Sol: $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$　$a_2 + a_4 = 4$.

∴ $a_1 + a_4 = a_2 + a_4$.

$S_n = 5 \cdot a_3 = 10$.

9. 等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 + a_4 + a_7 = 39$，$a_3 + a_6 + a_9 = 27$，
求則數列 $\{a_n\}$ 前9項和 S_9。

Sol: $3a_4 = 39$　　$3a_6 = 27$　　$a_1 = a_5 - 4 \times (-2)$

$a_4 = 13$　　$a_6 = 9$.　　$a_1 = 19$.

$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{13+9}{2} = 11$

$\therefore d = a_5 - a_4 = -2$.

$\therefore \{a_n\} = \{19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3\}$.

$S_9 = 99$.

10) 在1和37兩數之間插入8個數，使它組成等差數列，
求數列的d.

Sol: $a_{10} = a_1 + (10-1)d$.

$37 = 1 + 9d$

$d = 4$

11) If $\{a_n\}$ is an (A.P.), $a_4 = 2$, $S_4 = 64$.
The value of a_1 is.

Sol: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$64 = \frac{4(a_1 + 2)}{2}$

$128 = 4a_1 + 8$

$4a_1 = 120$

$a_1 = 30$.

12). Let $\{T_n\}$ is (A.P) If $T_4 = 4$, $T_8 = 10$, then $S_{11} = ?$

Sol: $\therefore T_6 = \frac{T_4 + T_8}{2} = 7.$

$T_5 = \frac{T_4 + T_6}{2} = 5.5$

$\therefore d = T_6 - T_5 = 7 - 5.5 = 1.5$

$\therefore T_1 = 5.5 - (1.5 \times 4) = -\frac{1}{2}$ $\quad T_{11} = -0.5 + (11-1) \times 1.5 = 14.5.$

$\therefore S_{11} = \frac{11 \times (-0.5 + 14.5)}{2} = 77.$

$T_4 + T_8 = T_1 + T_{11} = 14.$

$S_n = \frac{n(T_1 + T_{11})}{2}$

$S_{11} = \frac{11 \times 14}{2} = 77.$

13) 求由1至100這些數中能夠被7整除的所有整數的和.

Sol.

$a_n = 7 + (n-1)7$

$91 = 7n - 7$ $\quad n = 14$ AP $\{7, 14, \cdots, 98\}$

$n = 14$ $\quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{14(7+98)}{2}$

$S_n = 735$

14) 已知等差數列$\{a_n\}$的前n項和為S_n，若$\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$，求$\frac{S_9}{S_5}$的值

Sol: $\because a_5 = a_1 + (5-1)d.$ $\quad a_3 = a_1 + (3-1)d.$

$\frac{a_1 + (5-1)d}{a_1 + (3-1)d} = \frac{5}{9}$ $\quad a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = 7.$

$\therefore d = a_4 - a_3 = -2.$

$S_5 = 5a_3$, $\quad S_9 = 9a_5.$

$= 45.$ $\quad = 45$ $\quad \therefore \frac{S_9}{S_5} = \frac{45}{45} = 1$

A

Bravo :)

14 FEB 2019

29/1

書P.127 1

1.(1) 已知 $a_1=2$, $d=3$, $n=10$, 求 a_n.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = 2 + (10-1)3$

$a_n = 29$.

2) 已知 $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$21 = 3 + (n-1)2$

$n = 10$.

3). 已知: $a_1 = 12$, $a_6 = 27$, 求 d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$27 = 12 + (6-1)d$

$d = 3$.

4) 已知 $d = -\frac{1}{3}$, $a_7 = 8$ 求 a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$8 = a_1 + 6 \times (-\frac{1}{3})$

$a_1 = 10$

A Excellent :)

30 JAN 2019

書P. 127 2、7 $^{30}/_{1}$

2、1) 已知 $a_5=-1$，$a_8=2$．求 a_1 與 d．

解：$a_5 = a_1 + (5-1)d$．　　$a_8 = a_1 + (8-1)d$．

$-1 = a_1 + 4d$ ①．　　$2 = a_1 + 7d$ ②

① - ②：$-3 = -3d$

$d = 1$

∴ $a_1 = -5$．

2) 已知 $a_1 + a_6 = 12$．$a_4 = 7$．求 a_9．

解：$a_6 = a_1 + (6-1)d$．　　$a_4 = a_1 + (4-1)d$．

$a_6 + a_1 = 12$．　　$7 = a_1 + 3d$．②

$a_6 = 2a_1 + 5d$

$2a_1 + 5d = 12$．①　　$a_9 = 2\times 8 + 1 = 17$．

②×2 - ①：$d = 2$

∴ $a_1 = 1$

7．求等差中項．

1) $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$ 和 $\frac{12+\sqrt{2}}{2}$．

Sol: $\dfrac{\frac{8-\sqrt{2}}{2} + \frac{12+\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{(8-\sqrt{2}+12+\sqrt{2})\times\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

2) $(a+b)^2$ 和 $(a-b)^2$

Sol: $\dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \dfrac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2} = \dfrac{2(a^2+b^2)}{2} = a^2+b^2$

A

Well Done ♥

31 JAN 2019

補習.

1) $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 42$.

Find a_{12}.

Sol: $\frac{a_{11} + a_{13}}{2} = a_{12}$

$3a_{12} = 42$.

$a_{12} = 14$.

2). $a_{11} = 2$. $a_{15} = 10$, $a_{16} = 12$. Find a_{20}.

Sol: $a_{11} = a_1 + 10d$. $a_{15} = a_1 + 14d$

$2 = a_1 + 10d$ ① $10 = a_1 + 14d$ ②.

①-②: $-8 = -4d$.

$d = 2$. $a_1 = -18$. $a_{20} = -18 + 19\times 2$.

$a_{20} = 20$.

3). 書 p.128 9.

9. 三個數成等差數列, 它們的和等於18, 它們的平方和=116.

求這三個數.

Sol: $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. $\therefore a_1 + a_3 = 12$. → $a_1 = 12 - a_3$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 116$. $a_1^2 + a_3^2 = 80$

$\therefore \frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$ $\therefore (12 - a_3)^2 + a_3^2 = 80$.

$144 - 24a_3 + a_3^2 + a_3^2 = 80$

$a_2 = 6$. $2a_3^2 - 24a_3 + 64 = 0$

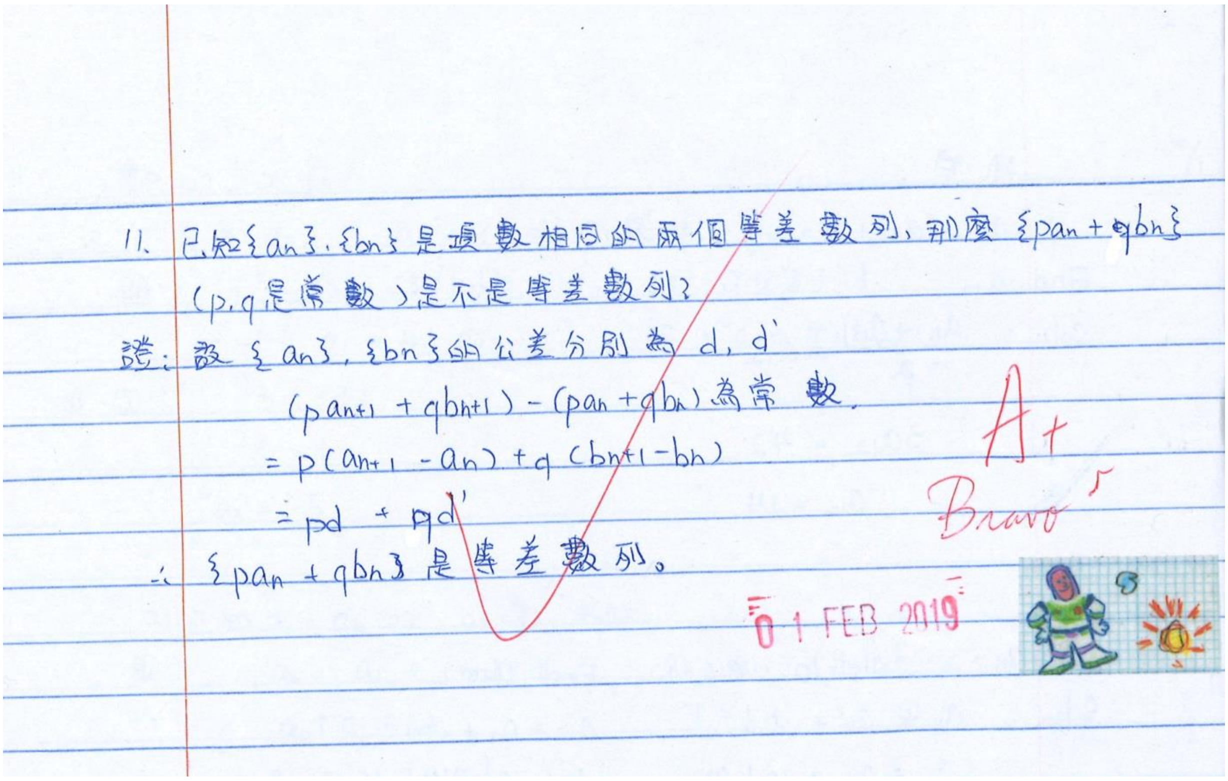
$a_3 = 4$. $a_3 = 8$

$\therefore$ 三個數成等差數列.

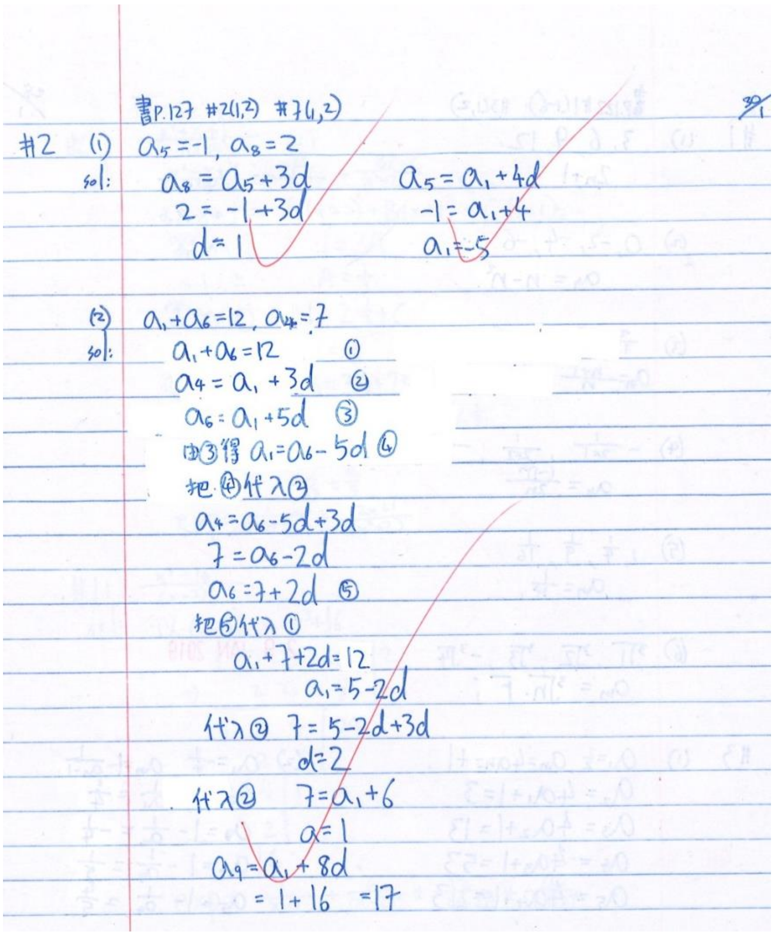
$\therefore$ 是 4. 6 . 8. $\therefore a_1 + 8 = 12$. $a_1 + 4 = 12$

$a_1 = 4$. $a_1 = 8$.

- **學生的功課（等差數列的證明題）**



- **學生的堂課（運用等差數列的性質公式、前 n 項和公式）**



#7 (1) $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{12+\sqrt{2}}{2}$

sol: exp $= \left(\frac{8-\sqrt{2}}{2} + \frac{12+\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{20^{10\,5}}{2_1} \times \frac{1}{2_1}$

$= 5$

(2) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$

sol: exp $= [(a+b)^2 + (a-b)^2] \times \frac{1}{2}$

$= (a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2) \times \frac{1}{2}$

$= (2a^2+2b^2) \times \frac{1}{2}$

$= a^2+b^2$

A

Excellent :-

3 1 JAN 2019

HW, 書P.128 #11

① $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 42$, Find a_{12}

sol: $a_{12} = \frac{a_{11}+a_{13}}{2}$

$2a_{12} = a_{11} + a_{13}$

$3a_{12} = 42$

$a_{12} = 14$

② $a_{11} = 2, a_{15} = 10, a_{16} = 12$, Find a_{20}

sol: $a_{13} = \frac{a_{11}+a_{15}}{2}$

$a_{13} = \frac{2+10}{2}$

$a_{13} = 6$

$a_{16} - a_{13} = 3d$

$12 - 6 = 3d$

$d = 2$

$a_{20} = a_{16} + 4d$

$a_{20} = 12 + 8$

$a_{20} = 20$

書P.128 #9 ③ $a_1 + a_2 + a_3 = 18$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 116$. Find $a_1\ a_2\ a_3$

sol: $(a-d) + a + (a+d) = 18$, $(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 116$

$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$

$2a_2 = a_1 + a_3$

$3a_2 = 18$

$a_2 = 6$

$\therefore a = 6$

$a^2 - 2ad + d^2 + a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 116$

$3a^2 + 2d^2 = 116$

$108 + 2d^2 = 116$

$d = 2$

$\therefore a_1 = 4$

$a_2 = 6$

$a_3 = 8$

輔助教學資料(校本補充教材)

一、等差數列性質及求和公式

已知正整數 m,n,p 和 q 滿足 $m+n=p+q$，則在等差數列中，a_m+a_n= a_p+a_q，

等差數列求和公式 S_n = $\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$ (已知 a_1,n,d)

已知一個等差數列的首項是3，公差是7，那麼此數列的第八項是 52 。

已知 $\{a_n\}$ 是一個等差數列，$a_3+a_4+a_5=12$，那麼 a_4 = 4，$a_1+a_2+\cdots+a_7$ = 28 。

$a_1+a_2+12+a_6+a_7 = 2(a_1+a_7)+12 = 2(2a_4)+12 = 28$

$\frac{a_3+a_5}{2}=a_4$

$2a_4+a_4=12$

$3a_4=12$

If $5m-7$， m， $3m+19$ is an arithmetic program(A.P)， then m = -2 .

如果 $\{T_n\}$ 是一個等差數列，$T_4=7$，$T_8=17$，那麼 T_6= 12 。

在等差數列1，4，7，…中，5995是它的第 1999 項。

在等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=2$，則該數列的前5項和為 10 ； $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5}{2}\cdot 2a_3=10$

$3a_4=39$　$a_4=13$　$3a_6=27$　$a_6=9$　$a_1=19$，$d=-2$

等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_4+a_7=39$，$a_3+a_6+a_9=27$，則數列 $\{a_n\}$ 前9項和 S_9 等於 99 ；

$a_5=\frac{a_4+a_6}{2}=\frac{13+9}{2}=\frac{22}{2}=11$

$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=9\cdot 11=99$

$a_1+a_3+a_4+a_6+a_7+a_9 = 2a_2+2a_5+2a_8$

$39+27=66$

$a_2+a_5+a_8=33$

$S_9=39+33+27=99$

在1和37兩數之間插入8個數，使它們組成等差數列，則該數列的公差是 4

(a_1　a_{10})

If $\{a_n\}$ is an arithmetic progression(A.P.), $a_4=2$， $S_4=64$， the value of a_1 is 30.

Let $\{T_n\}$ is an arithmetic sequence(A.P). If $T_4=4$，$T_8=10$，then S_{11}= 77.

$S_{11}=\frac{11}{2}[2T_1+10d] = 11\cdot(T_1+5d) = 11\cdot(-\frac{1}{2}+\frac{15}{2}) = 11\cdot\frac{14}{2} = 77$

$T_4=4=T_1+3d$ —①

$T_8=10=T_1+7d$ —②

②−①　$6=4d$

$d=\frac{3}{2}$　$\therefore T_1=-\frac{1}{2}$

$S_{11}=\frac{11\cdot(T_1+T_{11})}{2} = \frac{11(2T_6)}{2} = 11\cdot T_6 = 11\cdot 7 = 77$

$T_6=\frac{T_4+T_8}{2}=\frac{4+10}{2}=7$

求由1至100這些數中能被7整除的所有整數的和。

$7, 14, \ldots, 98$

$a_n=98=7+(n-1)\cdot 7$

$98=7+7n-7$

$n=14$

$S_{14}=\frac{14}{2}(2\cdot 7+13\cdot 7) = 735$

已知等差數列 $\{a_n\}$ 的前n項和為 S_n，若 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}$，求 $\frac{S_9}{S_5}$ 的值；

$\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}=\frac{a_1+4d}{a_1+2d}$

$\frac{S_9}{S_5}=\frac{9}{5}\cdot\frac{(2a_1+8d)}{(2a_1+4d)}=\frac{9}{5}\cdot\frac{(a_1+4d)}{(a_1+2d)}=\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{9}=1$

二、等比數列性質及求和公式

已知正整數 m,n,p 和 q 滿足 $m+n=p+q$，等比數列中，$a_m\cdot a_n$= $a_p\cdot a_q$；

等比數列求和公式 S_n = $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq 1)$；等比數列無限求和公式 S_∞ = $\frac{a_1}{1-r}$（公比$|r|<1$）。

三、數列綜合題目

Calculate: $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{99\times100}=$ $\frac{99}{100}$.

$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}\times\frac{1}{100}$,

$=\frac{1}{1}(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(1-\frac{2}{3})+\frac{1}{3}(1-\frac{3}{4})+\cdots+\frac{1}{99}\times(1-\frac{99}{100})$

$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}$

$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

某等比數列的首 2 項之和是 4，首項是 6，則該數列的無限項之和是__________

若 $\sum_{n=1}^{\infty}(3-c)^{-n}=\frac{1}{3-c}+\frac{1}{(3-c)^2}+\cdots=4$，則常數 c 的值是__________。

設 S_n 為數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和，且 $S_n=n^2$，則數列 $\{a_n\}$ 的通項公式為 $2n-1$。 $S_n-S_{n-1}=a_n$

$n^2-(n-1)^2=-(-2n+1)=2n-1$

已知等差數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_4=6$，$a_6=10$。(1)求數列的通項公式； (2)設等比數列 $\{b_n\}$ 的各項均為正數，其前 n 項為 S_n，若 $b_3=a_3$，$S_2=3$，求 S_n。

等差數列 $a-d$，a，$a+d$，這三個數的和等於 15，且這三個數分別加上 1，3，9 後成等比數列，求這三個數。

已知三個正數成等差數，它們的和為 15，若將這三個數分別加上 1, 4, 19 後，得到的三個數成等比數列，求這三個正數。

$n-d$ $\quad n \quad n+d \qquad n-d+1 \quad n+4 \quad n+d+19$

教材課件

等差數列課本照片

$1-\frac{1}{-\frac{1}{4}}=1+4$

写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项：

(1) $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=4a_{n-1}+1$ $(n\geqslant 2)$；$\frac{1}{2}$, 3, 13, 53, 213

(2) $a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$. $-\frac{1}{4}$, 5, $\frac{4}{5}$, $-\frac{1}{4}$, 5 $1-\frac{1}{-\frac{1}{4}}=1+4$

(1) 已知数列$\{a_n\}$的第 1 项是 1，第 2 项是 2，以后各项由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$给出，写出这个数列的前 5 项；1, 2, 3, 5, 8

(2) 用上面的数列$\{a_n\}$，通过公式 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$构造一个新的数列$\{b_n\}$，写出数列$\{b_n\}$的前 5 项. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$

$$a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2 \end{cases} \qquad S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

3.2 等差数列 Arithmetic Series

看下面的数列.

全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是 cm）分别是：

21，$21\frac{1}{2}$，22，$22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，$24\frac{1}{2}$，25. ①

某剧场前 10 排的座位数分别是：

38，40，42，44，46，48，50，52，54，56. ②

某长跑运动员 7 天里每天的训练量（单位：m）是：

7 500，8 000，8 500，9 000，9 500，10 000，10 500. ③

这些数列有什么共同特点？

我们看到：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于$\frac{1}{2}$；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 2；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 500.

这就是说，这些数列具有这样的共同特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一常数.

想一想：上面的数列①，②，③是等差数列吗？如果是，公差是多少？

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差

数列，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示．

如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d，那么根据等差数列的定义得到

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\ \cdots$$

所以 $a_2=a_1+d$，

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$，

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$，

……

$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$

变化

由此得到

$a_m=a_n+(m-n)d$

$a_1=a_n-(n-1)d$

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$

(n, a_n)所在直线的斜率

当 $n=1$ 时，上面等式两边均为 a_1，即等式也是成立的，这表明当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时上面公式都成立，因而它就是等差数列$\{a_n\}$的通项公式．

如果一个等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1 是 1，公差 d 是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到这个数列的通项公式

$$a_n=1+(n-1)\times 2,$$

即

$$a_n=2n-1.$$

例 1 (1) 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项．

(2) -401 是不是等差数列 -5，-9，-13，…的项？如果是，是第几项？

解：(1) 由 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，$n=20$，得

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$$

(2) 由 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，得到这个数列的通项公式为

$$a_n=-5-4(n-1).$$

由题意知，本题是要回答是否存在正整数 n，使得

$$-401=-5-4(n-1)$$

成立．解这个关于 n 的方程，得 $n=100$，即 -401 是这个数列的第 100 项．

例 2 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_5=10$，$a_{12}=31$，求首项 a_1 与公差 d.

解：由题意可知

$$a_1+4d=10, \quad ①$$

$$a_1+11d=31. \quad ②$$

$a_{12}=a_5+7d$

$31=10+7d$

$d=3$

$a_5=10$

$\because a_1+4d=10$

$a_1+12=10$

$a_1=-2$

这是一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组．解这个方程组，得

$$a_1=-2,$$
$$d=3.$$

即这个等差数列的首项是-2，公差是 3.

例 3 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列．计算中间各级的宽度．

解： 用$\{a_n\}$表示梯子自上而下各级宽度所成的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=33,\ a_{12}=110,\ n=12.$$

由通项公式，得

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此，$a_2=33+7=40$，$a_3=40+7=47$，$a_4=54$，$a_5=61$，$a_6=68$，$a_7=75$，$a_8=82$，$a_9=89$，$a_{10}=96$，$a_{11}=103$.

答：梯子中间各级的宽度从上到下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列，那么 A 应满足什么条件?

由 a，A，b 成等差数列，得

$$A-a=b-A,$$

所以

$$\boxed{A=\frac{a+b}{2}}.$$

已知 A.P.$\{a_n\}$，$a_3=4$，$a_5=14$，求 a_1，d

$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}$　$a_1=-6$

$4=\frac{a_1+14}{2}$　$a_3=a_1+2d$

$4=-6+2d$

$d=5$

反过来，如果 $A=\frac{a+b}{2}$，那么 $2A=a+b$，$A-a=b-A$，即a，A，b成等差数列．

如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做a 与 b 的**等差中项**．

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项．

想一想：$A=\frac{a+b}{2}$是 a，A，b 成等差数列的充要条件吗？

ex. 已知 $a_2=12$，$a_6=-8$ 求 a_4，d

$a_4=\frac{a_2+a_6}{2}=\frac{12-8}{2}=2$

$a_4-a_2=2-12 \Rightarrow a_1+3d-a_1-d=-10$
$d=-5$

例 4 已知数列的通项公式为 $a_n=pn+q$，其中 p，q 是常数，且 $p\neq0$，那么这个数列是否一定是等差数列？如果是，其首项与公差是什么？

分析：由等差数列的定义，要判定$\{a_n\}$是不是等差数列，只要看 a_n-a_{n-1} $(n\geqslant2)$是不是一个与 n 无关的常数就行了．

解： 取数列$\{a_n\}$中的任意相邻两项 a_{n-1} 与 a_n $(n\geqslant2)$，

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=(pn+q)-[p(n-1)+q]\\&=pn+q-(pn-p+q)\\&=p,\end{aligned}$$

∴ $a_n-a_{n-1}=d=p$
∴ $\{a_n\}$ is A.P.

它是一个与 n 无关的常数，所以$\{a_n\}$是等差数列，且公差是 p.

在通项公式中令 $n=1$，得

$$a_1=p+q,$$

所以这个等差数列的首项是 $p+q$，公差是 p.

我们看到，等差数列的通项公式可以表示为

$$a_n=pn+q,$$

其中 p，q 是常数．当 $p\neq0$ 时，它是关于 n 的一次式，因此从图象上看，表示这个数列的各点均在一次函数 $y=px+q$的图象上．例如，首项是 1，公差是 2 的无穷等差数列的通项公式为

$$a_n=2n-1,$$

相应的图象是直线 $y=2x-1$ 上的均匀排开的无穷多个孤立点，如图 3-3 所示．

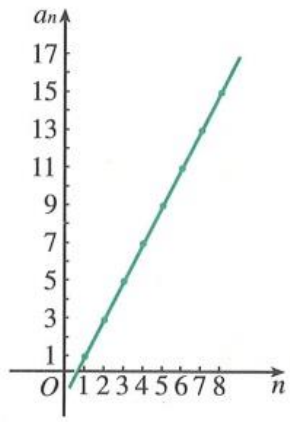


图 3-3

练 习

1. (1) 求等差数列 3，7，11，…的第 4 项与第 10 项． $a_4=15$ $a_{10}=39$

(2) 求等差数列 10，8，6，…的第 20 项． $a_{20}=-28$

(3) 100 是不是等差数列 2，9，16，…的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由． $n=15$

(4) -20 是不是等差数列 0，$-3\frac{1}{2}$，-7，…的项？如果是，是第几项？如果不是，说明理由． $n=\frac{47}{7}$ 不是