2018/2019 學年教學設計獎勵計劃

任意角的三角函數

參選類型：教案(單元)

參選編號：C170

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高一

簡介

三角學的發展歷史表明, “比”的關係一直貫穿著整個三角學的發生發展史, 三 角函數的定義的本質應是“三角比”, 即與角有關的線段 (或有向線段) 之比。初中的銳角三角函數是採用“三角比”來定義的, 這正是初高中三角函數知識的銜接點。 高中討論的是任意角的三角函數的定義, 主要以平面直角坐標系中點的坐標為研究工具。 點的坐標並不是三角函數的定義中的最本質的東西, 最本質的是“比”的關係。 教師在教學中應開展基於三角學發展史的教學設計, 幫助學生理解任意角三角函數定義的本質

有見及此，本人就利用學校的數學軟件作輔助，學生通過軟件實踐，並鞏固鞏任意角的三角函數的定義和性質。

運用 DM_LAB 軟件作教學，教師運用軟件對單位圓和一個非單位圓內作同角的各三角函數展示，直接帶出用運用單位圓研究各三角函數的優點。

利用 DM_LAB 的動態演示，快速直接的讓學生體驗和理解各三角函數的誘導公式

學生運用 DM_LAB 對函數 y=Asin(wx+ψ)中各參數對圖像的影響，了解其函數性質的依據。

目 次

簡介..i
目次..ii
教學進度表..iii
壹、教學計劃內容簡介..1
　　一、教學目標..1
　　二、主要內容..1
　　三、設計創意和特色..1
　　四、教學重點..1
　　五、教學難點..2
　　六、教學用具..2
貳、教案..3
課題：任意角三角函數的定義 (第一節課)(40 分鐘) 3
課題：同角三角函數的關係 (第二節課)(40 分鐘) 6
課題：誘導公式 (第三，四節課)(80 分鐘) 7
課題：正弦函數，余弦函數圖像及性質 (第五節課)(40 分鐘) 10
課題：正切函數，余切函數圖像及性質 (第六節課)(40 分鐘) 13
課題：函數$\boldsymbol{y = Asin(\omega x + \varphi)}$ 的圖像和性質 (第七，八節課)(80 分鐘) 16
叁、試教評估與反思建議..23
肆、參考文獻..23

教學進度表

授課時間 （年-月-日）	節數	課節	課題名稱	課題內容	課時 (分鐘)
2019 年 1 月 11 日	1	第一課節	任意角三角函數	通過平面直角座標系，理解任意角的三角函數； 懂得分辨單位圓的正弦線、餘弦線及正切線；	40
2019 年 1 月 14 日	1	第二課節	同角三角函數關係式	鞏固同角三角函數的基本關係式；	40
2019 年 1 月 15 日	2	第三、四課節	誘導公式	掌握三角函數的誘導公式；	80
2019 年 1 月 16 日	1	第五課節	正弦函數，余弦函數圖像及性質	掌握正弦及餘弦函數的圖像與性質；(1 節)	40
2019 年 1 月 17 日	1	第六課節	正切函數，余切函數圖像及性質	掌握正切及餘切函數的圖像與性質；	40
2019 年 1 月 22 日	2	第七、八課節	函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的圖像和性質	會用“五點法”畫出三角函數圖象； 理解如何得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的圖象；	80

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

掌握任意角三角函數的定義，能借助單位圓中的有向線段加以表示；
掌握同角三角函數的基本關係式；
理解誘導公式，並能簡單應用；
掌握正弦函數的圖像及其基本性質；理解余弦、正切函數的圖像及性質；
掌握函數 $y=A\sin(wx+\psi)$的圖像和性質；

二、主要內容

任意角三角函數的定義；
同角三角函數的基本關係式；
誘導公式；
各三角函數的圖像及其基本性質；
函數 $y=A\sin(wx+\psi)$的圖像和性質；

運用軟件作教學，及學生運用軟件觀察三角函數的圖像性質。

三、設計創意和特色

透過美術和電腦深化學生數形結合的數學學習方法，提高學生對任意三角函數內容的體驗。

四、教學重點

學生能熟練地求任意角的三角函數，明白運用誘導公式去轉化為對應的銳角三角函數。
通過電腦軟件的輔助，加深對三角函數圖像和性質。

五、教學難點

學生求任意角三角函數的靈活處理。學生在誘導公式對任意角的處理會有兩派，教師授課不宜局限學生走哪一派。

六、教學用具

運用 DM_LAB 軟件作教學，教師運用軟件對單位圓和一個非單位圓內作同角的各三角函數展示，直接帶出用運用單位圓研究各三角函數的優點。

利用 DM_LAB 的動態演示，快速直接的讓學生體驗和理解各三角函數的誘導公式

學生運用 DM_LAB 對函數 $y=A\sin(wx+\psi)$中各參數對圖像的影響，了解其函數性質的依據。

貳、教案

課題：任意角三角函數的定義 (第一節課)(40 分鐘)

基本要求：B-5-3 掌握任意角三角函數的定義，能借助單位圓中的有向線段加以表示;

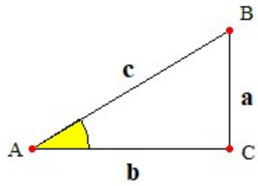
教學內容：

一、 銳角三角函數的定義

在初等三角中，我們已經學習過直角三角形中的銳角三角函數，它們是由直角三角形的兩邊之比來加以定義的。如右圖所示：

正弦：$\sin A = \frac{a}{c}$　餘弦：$\cos A = \frac{b}{c}$　正切：$\tan A = \frac{a}{b}$

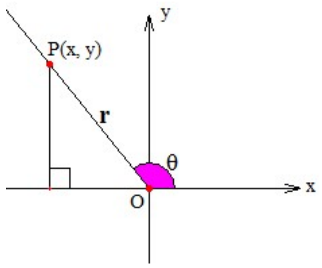
餘切：$\cot A = \frac{b}{a}$　正割：$\sec A = \frac{c}{b}$　餘割：$\csc A = \frac{c}{a}$



二、 直角坐標系中的三角函數的定義

我們用以下的方法將三角函數的定義推廣至任意角。

在直角坐標系上，角 θ 以 x 軸的正向為始邊，頂點與原點 O 重合。在角 θ 的終邊上任取一異於原點的點 P(x, y)，點 P 至原點的距離為 r，而$r = \sqrt{x^2 + y^2}$。



我們定義任意角θ的三角函數為：

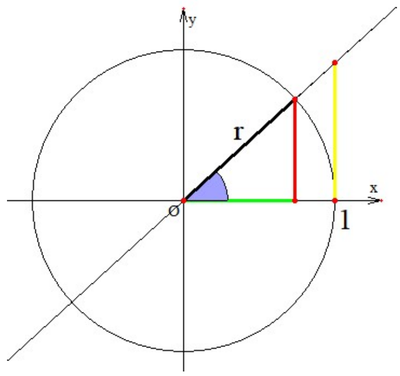
正弦函數：$\sin\theta = \frac{y}{r}$　餘弦函數：$\cos\theta = \frac{x}{r}$　正切函數：$\tan\theta = \frac{y}{x}$

餘切函數：$\cot\theta = \frac{x}{y}$　正割函數：$\sec\theta = \frac{r}{x}$　餘割函數：$\csc\theta = \frac{r}{y}$

注意：1. 當 x=0 時，tan θ 和 sec θ 不存在, 而當 y=0 時，cot θ 和 csc θ 不存在。

2. 三角函數的值是隨θ而變化的，但卻不受點 P 在終邊上的位置所影響。

3. 當 θ 是銳角時，以上定義的三角函數與直角三角形中銳角三角函數的定義是一致的。



在半徑為 1 的圓(單位圓)中，任意角θ的三角函數為：

正弦函數：$\sin\theta = y$　餘弦函數：$\cos\theta = x$　正切函數：$\tan\theta = \frac{y}{x}$

餘切函數：$\cot\theta = \frac{x}{y}$　正割函數：$\sec\theta = \frac{1}{x}$　餘割函數：$\csc\theta = \frac{1}{y}$

三、 任意角的三角函數值的符號

由於 r **是距離**，所以 r 總為**正數**，因此三角函數的值的符號就由點 P 的坐標(x,y)所決定。根據點 P 位於不同的象限，填寫下表中各三角函數值的符號：

點 **P** 所在象限	**I**	**II**	**III**	**IV**
sin θ，csc θ	+	+	-	-
cos θ，sec θ	+	-	-	+
tan θ，cot θ	+	-	+	-

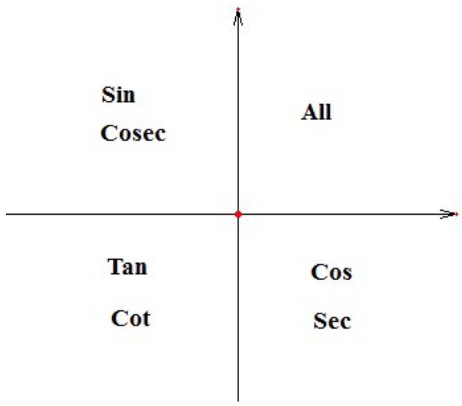


圖 4.3

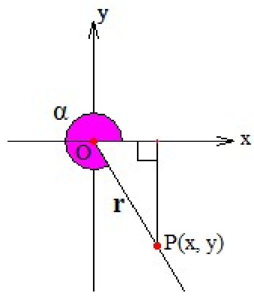
為了便於記憶起見，我們記住 ‘**CAST**’ 法則(如圖 4.3 所示)，它表示在第一象限全部三角函數值均為正數，在第二象限________________為正數，在第三象限________________為正數，在第四象限________________為正數。

四、 特殊角的三角函數值

角α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α 的弧度	0	$\frac{\pi}{6}$						
sin α	0	$\frac{1}{2}$						
cos α								
tan α								
cot α								

學生互相討論完成上表。

[例1] 已知 cosα =$\frac{1}{2}$且$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，求sinα 的值。



解：因為 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$且 α 在第四象限，

所以設 P(x,y)為第四象限的點，而 x = k 及 r = 2k .

為簡便起見，亦可設 x = 1, r = 2,

由 $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y < 0)$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} =$________

$\therefore \sin\alpha =$_____________ =_________

註：由於三角函數都是比的概念，最終 k 都會被化去，所以用簡便的設法。

練習：

1. 若 P($-\frac{1}{3}$,$-\sqrt{2}$)是∠α終邊上的一點，試求∠α的六個三角函數的值。

2. 若$tan\theta = -\sqrt{2}$且$270° < \theta < 360°$，求$\frac{sin\theta - cos}{sec\theta - csc\theta}$的值。

課題：同角三角函數的關係 (第二節課)(40 分鐘)

基本要求：B-5-4 掌握同角三角函數的基本關係式: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\tan x=\sin x/\cos x$

教學內容：

一、 同角三角函數的基本關係

由任意角三角函數的定義，很容易得到同角三角函數之間的關係式：

(可借助圖 4.2 幫助記憶)

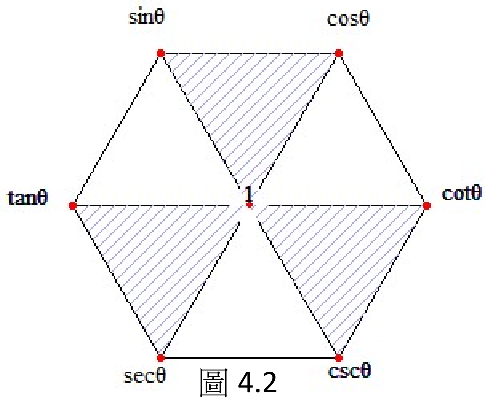


圖 4.2

1. 倒數關係：

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}，\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}，\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

2. 商數關係：

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}，\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

3. 平方關係：

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

以上關係式的証明很容易，下面我們証明平方關係：

$\because x^2+y^2=r^2$

$\therefore \left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$

依定義得：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

把上式的兩邊皆除以$\cos^2\theta$ 和皆除以 $\sin^2\theta$，可得：

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$和 $1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

於是就有：$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

[例1] 若$sin\theta=-\frac{4}{5}$，且 $180°<\theta<270°$，求 $\cos\theta$ 和 $\cot\theta$ 的值。

解：由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

得$\cos\theta=$________________$=$________________$=$____________

又$\because\theta$在第____象限，$\cos\theta$ __________

$\therefore\cos\theta=$_________

則$\cot\theta=$__________$=$________

課題：誘導公式 (第三，四節課)(80 分鐘)

基本要求：B-5-5 理解誘導公式，並能簡單應用;
教學內容：

一、 負角三角函數的誘導公式

我們比較圖 4.4 中 θ 和 − θ , 很容易看到：

$\sin\theta = \frac{y}{r}$而 $\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$。

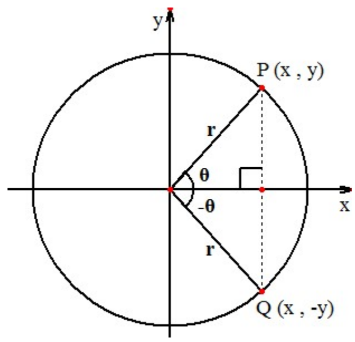


圖 4.4

同理，我們可以用正角 θ 的三角函數去表達負角 −θ 的其他三角函數，我們有：

$$\mathbf{\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta}$$
$$\mathbf{\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta}$$
$$\mathbf{\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta}$$

可以看出，−θ 的三角函數值等於 θ 的同名函數的值，加上原函數在第四象限內的符號。

二、 各個象限角的三角函數的誘導公式

1. 先考慮第二象限的角：

圖 4.5(a)中，OP 與 x 軸正方向成角 θ ，
而 OQ 與 x 軸的正方向成角 π − θ 。
容易證明，△OQM ≅ △OPN
若設點 P 的坐標為(x , y)，則點 Q 的坐標為(–x , y)。

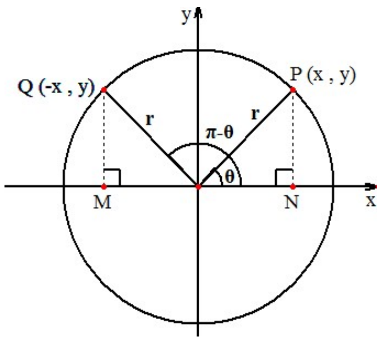


圖 4.5(a)

由此可得：
$$\sin(\pi-\theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta) = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$$

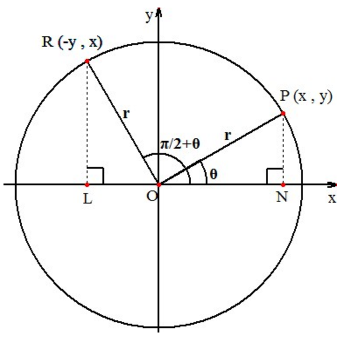


圖 4.5(b)

圖 4.5(b)中，OP 與 x 軸的正方向成角 θ ，

而 OR 與 x 軸的正方向成角$\frac{\pi}{2}$+θ 。

容易證明，△ORL≅△PON

若設點 P 的坐標為(x , y)，則點 R 的坐標為(–y , x)。

由此可得： $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{x}{r}=\cos\theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{-y}{r}=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{x}{-y}=-\cot\theta$$

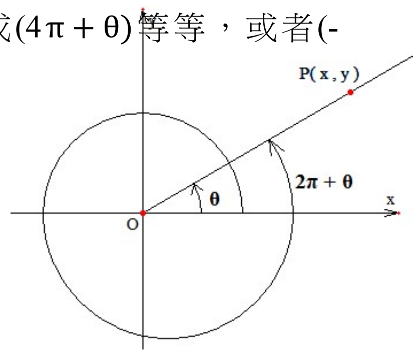
2. 對於第三及第四象限的角，我們可以同樣處理，不難得出下列兩表：

	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$2\pi-\theta$
sin	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$

	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$
sin	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$
cos	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
tan	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$

註：可以用同樣方法，得出 csc、sec、cot 的誘導公式。

3. 如右圖所示，角θ的終邊可旋轉角θ或(2π + θ)或(4π + θ)等等，或者(-2π + θ)或(-4π + θ)等等至位置 OP。



根據三角函數的定義，我們可得到：

$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$　　$\csc(2n\pi+\theta)=\csc\theta$

$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$　　$\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$

$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$　　$\cot(2n\pi+\theta)=\cot\theta$

這裏 n 為整數。

本節內容的誘導公式的形式較多，請不要死記，在應用時只要記住兩句口訣：

1. 奇變偶不變：

若遇到$\frac{\pi}{2}\pm\theta$，$\frac{3\pi}{2}\pm\theta$時(這裏$\frac{\pi}{2}$和$\frac{3\pi}{2}$是$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$的**奇數倍**)，那麼三角函數名要**正余互變**。若遇到$\pi\pm\theta$，$2\pi\pm\theta$時，(這裏π和2π是$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$的**偶數倍**)，那麼三角函數的名稱不變。

2. 符號看象限：

變化後的三角函數前面應否加上"$-$"號，就要看原來的角度屬於哪一個象限來確定。例如：$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)$中，$\frac{3\pi}{2}$為$\frac{\pi}{2}$的奇數倍，若$\theta$在第一象限時，則$\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$在第三象限，其餘弦為負，因此：$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$。

誘導公式的主要用途為兩個方面：

(1) 把一個含有三角函數的式子加以化簡**;**

(2) 把一個任意角三角函數化為銳角三角函數。

[例1] 化簡：$\sin(180°-A)\cos(180°+A)\cot(270°+A)+\sin(90°+A)\cos(360°-A)$

[例2] 化簡：$\frac{\tan(A-\pi)}{\csc(\frac{3\pi}{2}+A)}\times\frac{\tan(A-\frac{3\pi}{2})}{\cot(\frac{\pi}{2}-A)}\times\frac{\sin(A-2\pi)}{\cos(-A)}$

[例3] 求下列各式的值：

(1) $\cos 120°$　(2) $\sin(-240°)$　(3) $\tan 300°$

[例4] 求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{50\pi}{3}$　(2) $\cot(-\frac{49\pi}{4})$

練習

1. 化下列各三角函數為銳角三角函數：

(1) $\sin 490°$　(2) $\cos(-290°)$

(3) $\csc(-580°)$　(4) $\sec 500°$

(5) $\tan 866°$　(6) $\cot(-800°)$

課題：正弦函數，余弦函數圖像及性質 (第五節課)(40 分鐘)

基本要求：B-5-10 通課實例，掌握正弦函數的圖像及其基本性質;
B-5-11 理解余弦、正切函數的圖像及其基本性質;

教學內容：

一、 周期函數的概念及三角函數的周期

首先，我們介紹週期函數的概念：

對於所有的實數 x，若存在一個常數 T>0，使得：$f(x+T)=f(x)$，則稱函數 $f(x)$ 為週期函數。而其中最小的 T 就稱為 $f(x)$ 的週期。

由誘導公式，我們得知對於一切正整數 n，

$$\sin(2n\pi+x)=\sin(2\pi+x)=\sin x, \qquad \cos(2n\pi+x)=\cos(2\pi+x)=\cos x$$

而其他三角函數皆有同樣的等式成立，故所有的三角函數都是週期函數。而且，雖然 $\sin(\pi+x)\neq\sin x$ 及 $\cos(\pi+x)\neq\cos x$，但是對於一切的實數 x，

$\tan(\pi+x)=\tan x$ 及 $\cot(\pi+x)=\cot x$

$\therefore \sin x$，$\cos x$，$\csc x$ 和 $\sec x$ 的週期都是 2π，而 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的週期為 π。

二、 正弦函數 $y=\sin x$ 的圖像

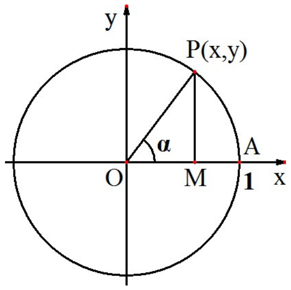


圖 4.6

設任意角 α 的終邊與單位圓交於點 P,過點 P 作 x 軸的垂綫，垂足為 M,我們稱綫段 MP 為角 α 的正弦綫(如圖 4.6).

為了用描點法畫出 $y=\sin x$ 的圖像，可以對 x 的任意一值，例如：$x=\dfrac{\pi}{3}$,在圖 4.7 中畫出它的正弦綫 MP,把角 $\dfrac{\pi}{3}$ 的正弦綫向右平移，使 M 點與 x 軸上表示數 $\dfrac{\pi}{3}$ 的點 M_1 重合，得到綫段 M_1P_1,顯然點 P 和點 P_1 的縱坐標相同，都等於 $\sin\dfrac{\pi}{3}$.因此，點 P_1 的坐標是 $\left(\dfrac{\pi}{3},\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, P_1 是 $y=\sin x$ 圖像上的一個點。類似地，當 x 取其它值時，畫出其正弦綫，再向右平移，可得到 $y=\sin x$ 圖像上相應的點。

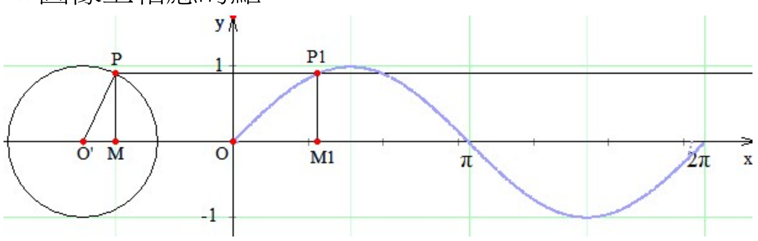


圖 4.7

如圖 4.8 所示，將單位圓 O’分成 12 等份，過各分點作 x 軸的垂綫，得到對應於角 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, ..., 2\pi$ 等的正弦線。我們可利用各正弦線的平移，找出 $y = \sin x$ 圖像上相應的點，再用光滑曲線連接起來。

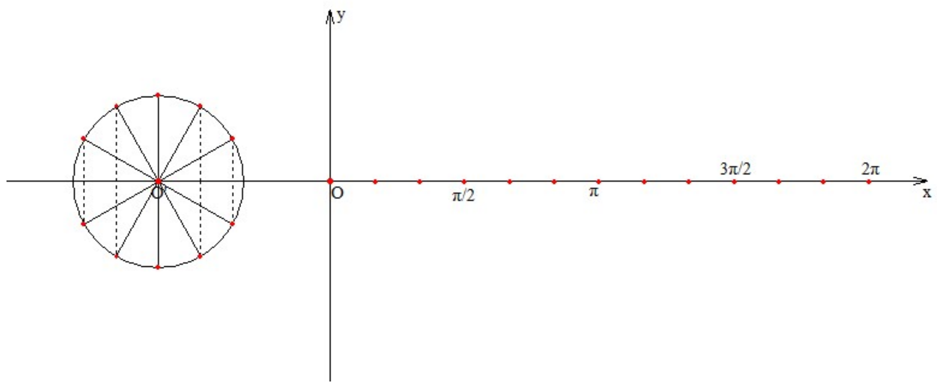


圖 4.8

[實驗]

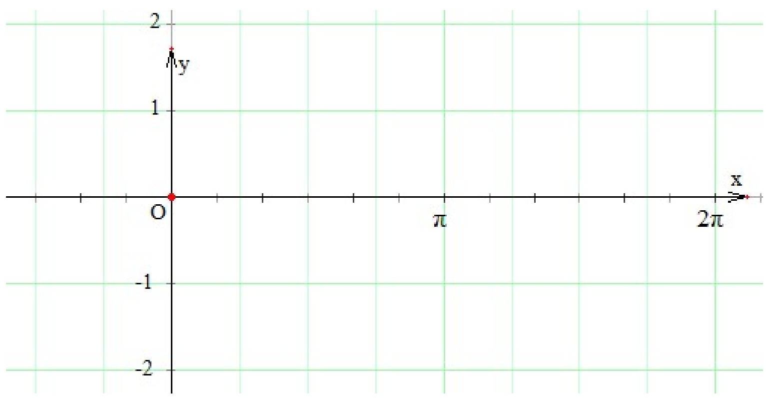
利用軟件做實驗作出 $y = \sin x$ 的圖像。

[例1] 用“五點法”作出 $y = \sin x$ ($0 \le x \le 2\pi$)的圖像。

解：由前面所作出的正弦曲線，不難看出，在圖像上起着關鍵作用的點有五個(表列如下)：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$					

在精確度要求不太高時，我們常常利用這五個關鍵點，作出這個函數的簡圖。



三、 余弦函數 $y=\cos x$ 的圖像

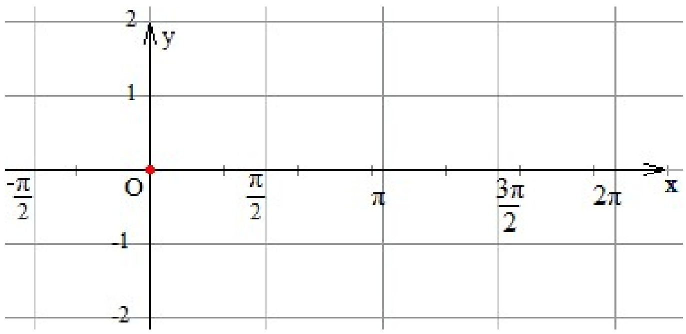
1. 由誘導公式有： $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

   由此可知， $y=\cos x$ 的圖像就是 $y=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ 的圖像。所以可利用“五點法”作出 $y=\cos x$ 在區間 $[0,2\pi]$ 上的簡圖。

   下面用“五點法”在同一坐標系中作出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的簡圖，以方便比較。

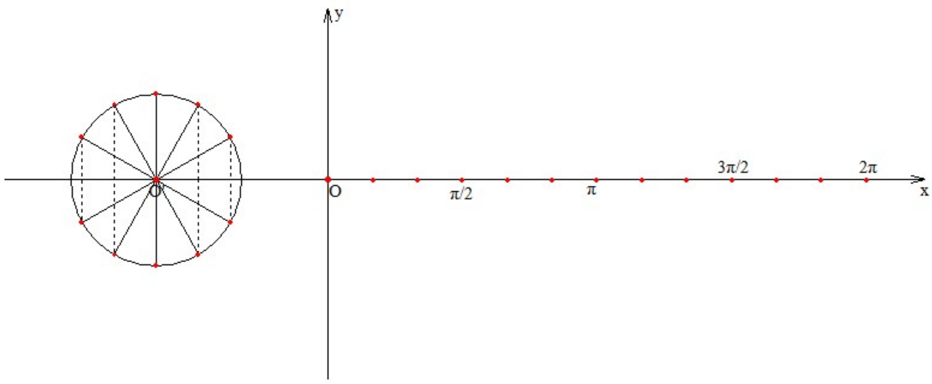
   (其中 $y=\sin x$ 的圖像用虛線)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$					
$y=\cos x$					



   從圖像我們不難看出， $y=\cos x$ 的圖像，可以通過將 $y=\sin x$ 的圖像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 個單位得到。

2. 利用正弦線作 $y=\cos x$ 的圖像。



3. 利用軟件作 $y=\cos x$ 的圖像。

課題：正切函數，余切函數圖像及性質 (第六節課)(40 分鐘)

基本要求：B-5-11 理解余弦、正切函數的圖像及其基本性質;
教學內容：

1. 首先，我們給出正切函數值的一種几何表示。

   如圖 4.9,在直角坐標系中，設單位圓與 x 軸正半軸交於 A(1,0),任意角α的終邊與單位圓交於點 P,過點 A 作 x 軸的垂線與角α的終邊或終邊的延長線交於點 T.從圖中容易看出：當α位於第一和第三象限時，T 點位於 x 軸上方；當α位於第二和第四象限時，T 點位於 x 軸下方。過點 P 作 PM⊥x 軸，垂足為 M,那麼，不論α的終邊在第幾象限，都有$\tan\angle AOT=\tan\angle MOP$.

   我們稱線段 AT 為角α的正切線。

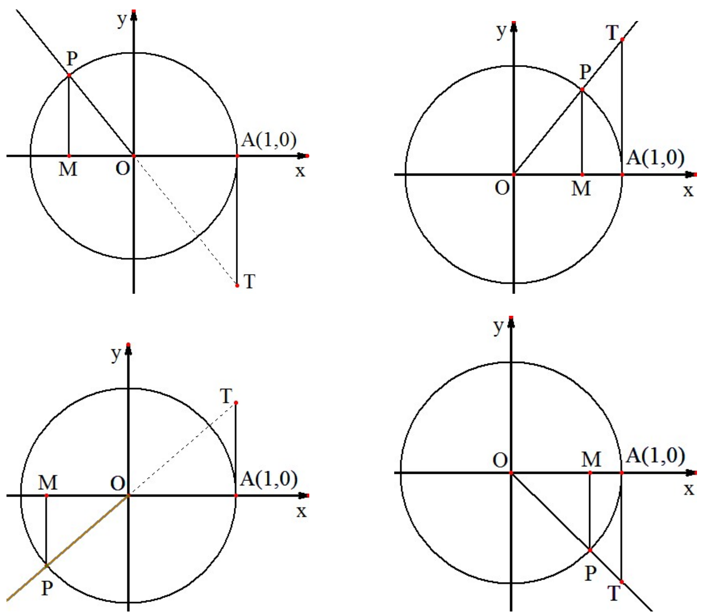
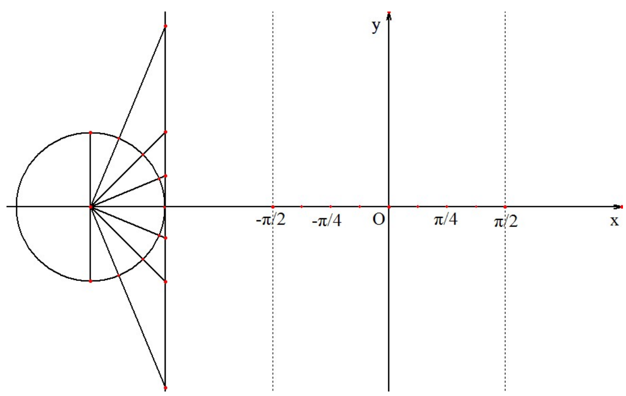


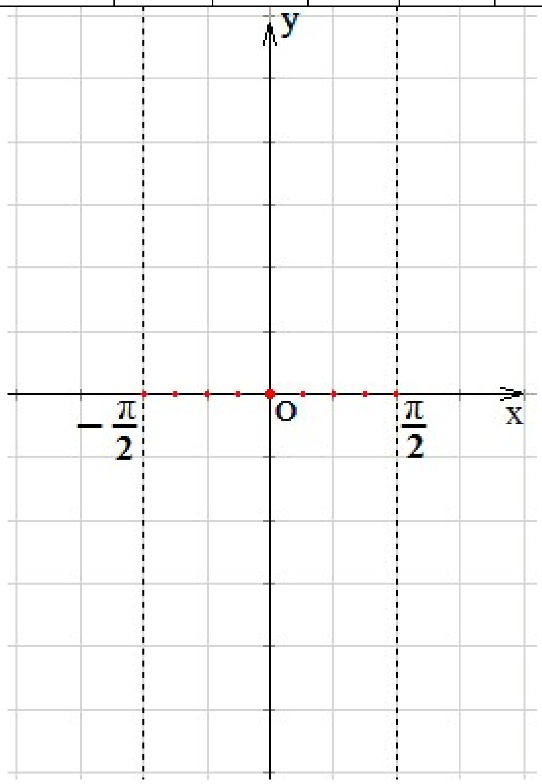
圖 4.9

2. 利用正切線作$y=\tan x$的圖像。(其中$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)



3.　利用“五點法”及漸近線作 $y = \tan x$ 的簡圖。

x	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$
$y = \tan x$					

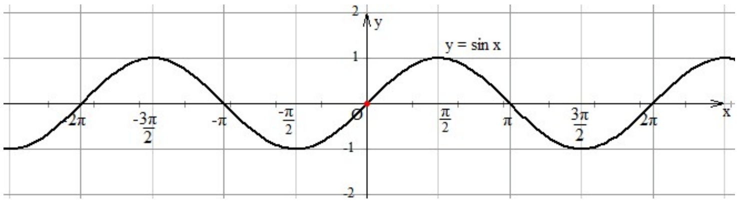


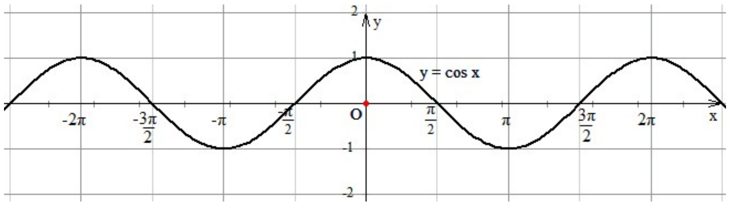
4.　利用軟件作 $y = \tan x$ 的圖像。

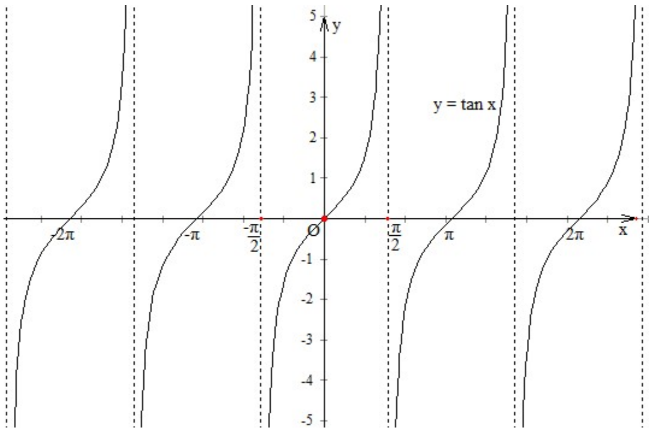
四、 三角函數的性質

因為 sin x，cos x 是週期為 2π 的週期函數，所以只要把 0 至 2π 範圍內的圖像向左和向右重複描繪，就可以得到任意範圍內這二個三角函數的圖像；而 tan x 是週期為 π 的週期函數，所以只要把 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$ 範圍內的圖像向左和向右重複描繪，就可以得到任意範圍內這個三角函數的圖像。

各三角函數的圖像如下面各圖所示。







觀察各三角函數的圖像，可得到它們的性質，列表如下：

函數	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定義域			
值域 最大值 最小值			
周期			
奇偶性			
單調性			

課題：函數$y = Asin(\omega x + \varphi)$的圖像和性質

(第七，八節課)(80 分鐘)

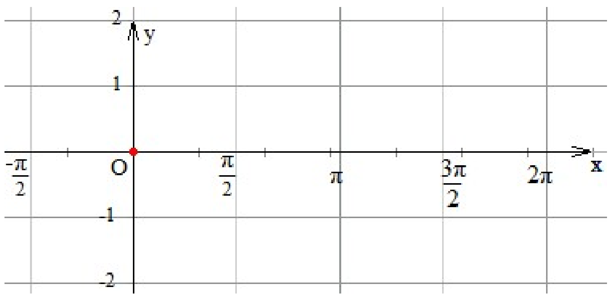
基本要求：B-5-12 結合具體實例，掌握函數 y=Asin(wx+ψ)的圖像和性質
教學內容：

在物理和工程技術的許多問題中，經常會遇到形如$y = \mathrm{A}\sin(\omega x + \varphi)$的函數(其中$\mathrm{A}, \omega, \varphi$是常數)。下面我們研究它的圖像及性質。

1. $y = \mathrm{A}\sin x\ (A > 0)$**的圖像及性質**

[例1] 用“五點法”在同一坐標系中作出$y = \sin x$及$y = 2\sin x$的簡圖($y = \sin x$用虛線)，說明它們的關係，並討論$y = 2\sin x$的性質。

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$					
$y = 2\sin x$					



從圖像可以看出，把$y = \sin x$圖像上每一點的縱坐標都乘以 2，而橫坐標不變，就得到$y = 2\sin x$的圖像。

$y = 2\sin x$的性質：

(1) 周期 T = ________；

(2) 定義域為__________ ；

(3) 值域是__________ ; 最大值是________ ; 最小值是________ ；

(4) 在區間$[0, 2\pi]$上，遞增區間是________________________;
遞減區間是________________________ .

一般地，把$y = \sin x$圖像上每一點的縱坐標____________，而橫坐標____________，就得到$y = \mathrm{A}\sin x\ (A > 0)$的圖像。

利用圖像就可以得到$y = \mathrm{A}\sin x$的性質。

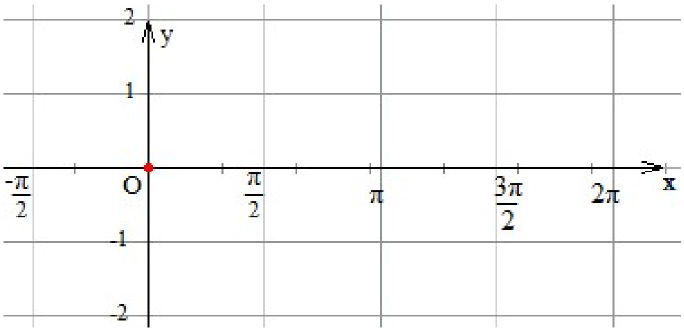
2. $y=\sin\omega x\ (\omega>0)$的圖像及性質

[例2] 用“五點法”在同一坐標系中作出 $y=\sin x$ 及 $y=\sin 2x$ 的簡圖($y=\sin x$ 用虛線)，說明它們的關係，並討論 $y=\sin 2x$ 的性質。

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$							
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π		
$y=\sin 2x$							

註：如果只作 $y=\sin 2x$ 的簡圖，則利用下表：

x					
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin 2x$					



從圖像可以看出，把 $y=\sin x$ 圖像上每一點的橫坐標____________，而縱坐標____________，就得到 $y=\sin 2x$ 的圖像。

$y=\sin 2x$ 的性質：

(1) 周期：由 $\sin 2(\pi+x)=\sin(2\pi+2x)=\sin 2x$

$\therefore\ y=\sin 2x$ 的周期 T =________ ;

(2) 定義域為__________ ;

(3) 值域是____________ ; 最大值是________ ; 最小值是________ .

(4) 在區間 $[0,\pi]$ 上，遞增區間是________________________ ;

遞減區間是________________________ .

一般地，把 $y=\sin x$ 圖像上每一點的橫坐標____________，而縱坐標____________，就得到 $y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的圖像。

利用圖像就可以得到 $y=\sin\omega x$ 的性質。

註：由 $\sin\omega(\frac{2\pi}{\omega}+x)=\sin(2\pi+\omega x)=\sin\omega x$,

$\therefore\ y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的周期 T = ________ .

3. $y=\sin(x+\varphi)$ 的圖像及性質

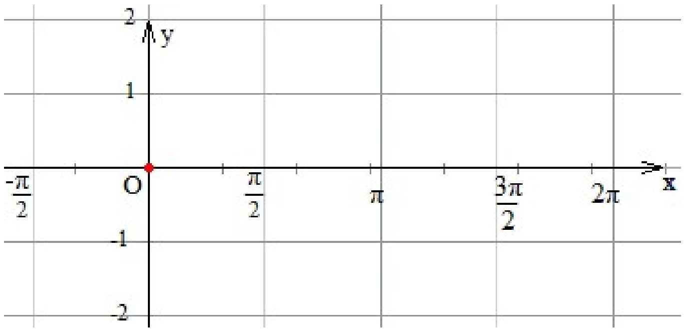
[例3] 用“五點法”在同一坐標系中作出 $y=\sin x$ 及 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的簡圖（$y=\sin x$ 用虛線)，說明它們的關係，並討論 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的性質。

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\sin x$		0		1		0		–1		0
$x+\frac{\pi}{4}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$	0		1		0		–1		0	

註：如果只作 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的簡圖，則利用下表：

x					
$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$					

先列出第二行 $x+\frac{\pi}{4}$ 的 5 個關鍵值：$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$. 再分別計算其對應的 x 值及 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的值。



從圖像可以看出，把 $y=\sin x$ 的圖像向_____平移_____個單位，就得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的圖像。

$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的性質：

周期 T、定義域、值域、最大值、最小值和 $y=\sin x$ 相同，

而在區間 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ 上，遞增區間是________________________；

遞減區間是________________________.

一般地，要得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的圖像，可按以下方法：

(1) 若 $\varphi>0$,將 $y=\sin x$ 的圖像向____平移____個單位，就得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的圖像。

(2) 若 $\varphi<0$，將 $y=\sin x$ 的圖像向____平移_____個單位，就得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的圖像。

利用圖像就可得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的性質。

(小息)

4. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的圖像及性質

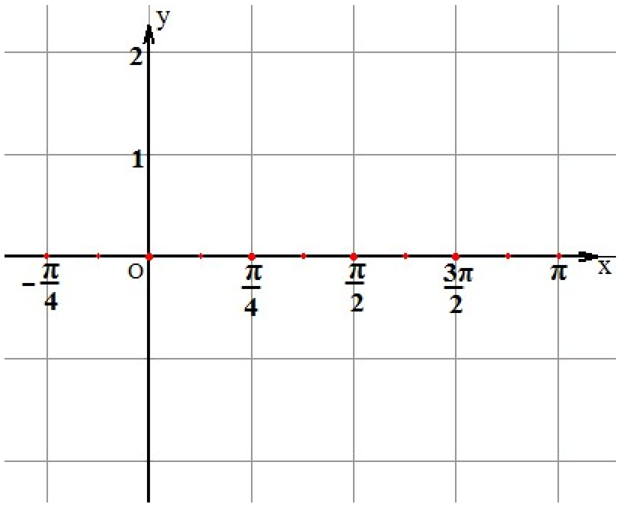
[例4] 用“五點法”作 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的圖像，並討論它的性質。

解：先定出 $2x+\frac{\pi}{4}$ 的 5 個關鍵值：$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$.

列表如下，分別計算出相應的 x 值、$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的值及 $2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的值

(熟練後第三行 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 可取消)。

x					
$2x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$					
$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$					



註：作 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的圖像，也可以按以下步驟作出：

(1) 先作 $y=\sin x$ 的圖像;

(2) 將縱坐標伸長為____________________；

(3) 將橫坐標縮短為____________________；

(4) 將圖形向_____平移______個單位.

這樣就得到 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的圖像。

以下討論 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的性質：

(1) 周期 T = ________；

(2) 定義域為________；

(3) 值域是________；最大值是________；最小值是________ .

(4) 在區間 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$ 上，遞增區間是________________________；

遞減區間是________________________ .

[例5] 用"五點法"作 $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的簡圖。

解：

x					
$\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$					

[例6] 求下列函數的最大值、最小值，以及達到最大值、最小值時 x 值的集合.

(1) $y=sinx-2$

解：當 $x=$____________________時，sin$x$取最大值______，

此時函數$y=sinx-2$取最大值______；

當 $x=$____________________時，sin$x$取最小值______，

此時函數$y=sinx-2$取最小值______ .

(2) $y=\frac{4}{3}sin\frac{1}{2}x$

解：設 $u=\frac{1}{2}x$.

當 u=____________________，即當 $x=$____________________時，

$\sin\frac{1}{2}x$取最大值______,此時函數 $y=\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}x$取最大值______；

當 u=________________________，即當 x =________________________時，

sin$\frac{1}{2}x$取最小值_______ ,此時函數 y =$\frac{4}{3}$sin$\frac{1}{2}x$取最小值.

(3)$y=\frac{1}{2}cos\ (3x+\frac{\pi}{4})$

解：設 $u=3x+\frac{\pi}{4}$.

當 u=________________________，即當 x =________________________時，

$cos\ (3x+\frac{\pi}{4})$取最大值_______ ,此時函數$y=\frac{1}{2}cos\ (3x+\frac{\pi}{4})$取最大值

_______ ;

當 u=________________________，即當 x =________________________時，

$cos\ (3x+\frac{\pi}{4})$取最小值_______ ,此時函數$y=\frac{1}{2}cos\ (3x+\frac{\pi}{4})$取最小值

_______ .

[例7] 求函數$y=2\ sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$的遞增區間.

解：設 $u=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}$.

因為函數 sin$u$ 的遞增區間是[2kπ $-\frac{\pi}{2}$，2kπ $+\frac{\pi}{2}$](k∈ Z), 由

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k\in Z)$$

得 ____

所以，函數$y=2\ sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$ 的遞增區間是

____

叁、試教評估與反思建議

在學習任意角三角函數的過程中，各三角函數旳定義是全單元的基石，在學生動手實驗中，亦能固鞏定義。對學習誘導公式後，誘導公式中的函數名及正負號很容易因記憶不牢而混亂，這些誘導公式可概括為$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in Z)$的各三角函數值，當 k 為偶數時，得α的同名函數，當 k 為奇數時，得α的余名函數值，並在前面加上一個把α看成銳角時原函數值的符號，還可編成口訣“奇余偶同，象限定號”。

肆、參考文獻

完全攻略 高中數學必備(2014)，胡堅。湖南少年兒童出版社。

數學 暨南大學華文學院預科部(2011)

教育暨青年局(2017)。《高中教育階段數學基本學力要求》

http://www.dsej.gov.mo/crdc/edu/requirements.html#senior (2018/5/18 瀏覽)