2019 / 2020 學年教學設計獎勵計畫

條件概率與瑪麗蓮問題的爭論

參選編號：C017

科目：數學

適合年級：高二

簡介

瑪麗蓮問題又稱為三門問題，是上世紀 80 年代末流行於美國的一檔綜藝節目，其介紹如下：

台上有三扇關閉了的門，其中一個後面有汽車，其餘兩個是山羊，主持人瑪麗蓮讓挑戰者任意選擇其一，然後她打開其餘兩扇門的其中之一.但由於她知道那扇門後有汽車，所以她打開的總是山羊.這時候她讓挑戰者重選，就是說挑戰者可以選換另一個剩下的門.那麼換還是不換？

自該問題被發現後，就一直風靡全球數十載，時至今日仍有人糾結於“換與不換”的漩渦之中，久思不得其解.

在此背景下，本單元教案通過簡單的實例闡明了概率論兩大核心概念——條件概率與 n 次獨立事件概率，並大量地聯繫生活實例由淺入深地闡明了條件概率公式、貝葉斯定理等知識，讓學生從身邊實例開始構建起相關的知識體系並通過建構起來的知識體系來徹底明晰上述的三門爭論.

此外，本單元教案運用了數學建模的思想，剖析了當下熱點的新冠病核酸檢查假陽性的概率問題以及與新冠病毒醫保相關的數學問題等.

在經歷過本單元學習後，學生普遍都會覺得數學與生活息息相關，生活中使用了數學工具之後會讓學生發現數學思想無處不在且驚喜不斷.

最後，在本單元教案的第三次課中設計了一程序以模擬三門爭論的真實情況. 該程序使用 VBA 編寫並需要結合 Excel 使用. 學生通過使用該程序後便知道複雜且抽象的數學問題原來也可以形象化，而表面雜亂無章的數字背後蘊藏哲理.

目次

教學進度表

<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="5">條件概率與瑪麗蓮問題的爭論</td></tr>
<tr><td>實施年級</td><td colspan="3">高二</td><td>總實施節數</td><td>4 節</td></tr>
<tr><td>實施日期</td><td colspan="3">2020 年 6 月 22 日-
6 月 26 日</td><td>每節課時</td><td>45 分鐘</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>科目每周節數</td><td>5 節</td></tr>
<tr><th>預計授課日期
（年-月-日）</th><th>節數</th><th>課節</th><th>課題名稱</th><th>課題內容</th><th>課時(分鐘)</th></tr>
<tr><td>2020 年 6 月 22 日</td><td>2</td><td>第一、二課節</td><td>條件概率與事件的獨立性及條件概率的應用舉例</td><td>條件概率與事件的獨立性及條件概率的應用舉例</td><td>45+45</td></tr>
<tr><td>2020 年 6 月 24 日</td><td>1</td><td>第三課節</td><td>獨立重複試驗與二項分佈及其簡單應用</td><td>獨立重複試驗與二項分佈及其簡單應用</td><td>45</td></tr>
<tr><td>2020 年 6 月 26 日</td><td>1</td><td>第四課節</td><td>條件概率與瑪麗蓮問題的爭論</td><td>條件概率、獨立事件概率的綜合應用</td><td>45</td></tr>
</table>

已圈選授課日期的校曆表

2019-2020 上學期

月份	上課日	周次	日	一	二	三	四	五	六
8							1	2	3
			4	5	6	7	8	9	10
			11	12	13	14	15	16	17
			18	19	20	21	22	23	24
			25	26	27	28	29	30	31
9	中:19	1	1	2	3	4	5	6	7
		2	8	9	10	11	12	13	14
	小:19	3	15	16	17	18	19	20	21
		4	22	23	24	25	26	27	28
	幼:19	5	29	30					
10	中:22	5			1	2	3	4	5
		6	6	7	8	9	10	11	12
	小:22	7	13	14	15	16	17	18	19
		8	20	21	22	23	24	25	26
	幼:22	9	27	28	29	30	31		
11	中:23	9						1	2
		10	3	4	5	6	7	8	9
	小:21	11	10	11	12	13	14	15	16
		12	17	18	19	20	21	22	23
	幼:22	13	24	25	26	27	28	29	30
12	中:14	14	1	2	3	4	5	6	7
		15	8	9	10	11	12	13	14
	小:14	16	15	16	17	18	19	20	21
			22	23	24	25	26	27	28
	幼:14		29	30	31				
1	中:13	16				1	2	3	4
		17	5	6	7	8	9	10	11
	小:14	18	12	13	14	15	16	17	18
		19	19	20	21	22	23	24	25
	幼:13		26	27	28	29	30	31	

11	表示放假		表示中學考試	10	表示中學活動、比賽
			表示小幼考試	10	表示小幼活動、比賽
			表示中小幼考試	10	表示中小幼活動、比賽

2019-2020 下學期

月份	上課日	周次	日	一	二	三	四	五	六
4	中:0	27				1	2	3	4
		28	5	6	7	8	9	10	11
	小:0	29	12	13	14	15	16	17	18
		30	19	20	21	22	23	24	25
	幼:0	31	26	27	28	29	30		
5	中:20	31						1	2
		32	3	4	5	6	7	8	9
	小:0	33	10	11	12	13	14	15	16
		34	17	18	19	20	21	22	23
	幼:0	35	24	25	26	27	28	29	30
		36	31						
6	中:21	36		1	2	3	4	5	6
		37	7	8	9	10	11	12	13
	小:0	38	14	15	16	17	18	19	20
		39	21	22	23	24	25	26	27
	幼:0	40	28	29	30				
7	中:15	40				1	2	3	4
		41	5	6	7	8	9	10	11
	小:0	42	12	13	14	15	16	17	18
		43	19	20	21	22	23	24	25
	幼:0	44	26	27	28	29	30	31	

11	表示放假		表示中學考試	10	表示中學活動、比賽
			表示小幼考試	10	表示小幼活動、比賽
			表示中小幼考試	10	表示中小幼活動、比賽

壹、教學計畫內容簡介

一、教學目標

本主題對應的教材是《人教版高中數學選修(B 版)2-3》P48~72 的內容，其教學目標如下：

1. 掌握條件概率、獨立重複試驗概率以及二項分佈的概念以及二項分佈的數學期望；
2. 掌握條件概率公式、貝葉斯定理、全概率公式；
3. 培養學生能使用數學工具解決實際問題的能力，並養成用數學建模思想思考問題的習慣.

二、基本學力要求

C－1－1　瞭解基本事件空間的意義，理解事件加法和乘法的意義；

C－1－2　會用已學的排列組合知識計算一些隨機事件所含的基本事件數；

C－1－3　通過實例，理解古典概型及其概率計算公式；

C－1－4　通過實例，瞭解兩個互斥事件的概率加法公式；

C－1－5　在具體情境中，瞭解條件概率和兩個事件相互獨立的概念.

C－2－4　用樣本的數字特徵估計總體的數字特徵；

C－3－10 理解二項式的通項公式，並能用通項公式求指定項或者指定項係數;

E－1－1　積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗證等數學活動，能表達、交流自己的思維過程;

E－1－2　面對實際情境，能發現數學問題，並用數學的方式進行分析和解決問題;

E－1－3　能對所學知識進行分類與總結，建立數學知識之間的聯繫;

E－1－4　通過建立數學模型解決問題，體會數學在生活中的應用，提高數學學習的興趣;

E－1－5　能在探究活動中，傾聽和與人合作，並尊重他人的觀點;

E－1－6　能克服數學解決問題中所遇到的困難，增強數學學習的自信心，養成慎密思考的習慣和實事求是的態度.

三、主要內容

本單元教案在學生實際生活的基礎上建構條件概率及其相關的知識體系.學生在建構本單元知識體系的過程中，教師不斷透過數學建模的實例讓學生體會學以致用的道理.如：核酸檢測假陽性問題、與新冠病毒醫療保險相關的數學問題等.

在本單元教案的最後，還設計了用所學知識解決三門問題爭論，讓學生明白數學源之生活，用於生活的道理.

四、設計創意和特色

（1）讓學生學會用數學工具解決實際問題，在解決問題中深刻體會數學建模的奧秘，讓學生養成數學建模的思維習慣. 例如：用條件概率解答骰子點數問題、新冠病毒檢測假陽性概率問題、三門爭論問題；用二項分佈解決新冠病毒醫保問題、高爾頓釘板問題等.

（2）用 VBA 編程結合 Excel 進行數學實驗. 在講解三門爭論時，本單元教案使用了 VBA 模擬了 40 萬次挑戰者參與挑戰的情況，通過統計這些數據，得出“換門”與“不換門”的獲獎比例，在不列式求解的情況下，讓學生直觀感受數學實驗的樂趣.

五、教學重點

條件概率、獨立重複事件的概念；條件概率公式、全概率公式、貝葉斯定理、二項分佈.

六、教學難點

運用本單元教案的知識體系解決實際生活中的數學問題

七、教學課時

4 課時

貳、教案

一、條件概率與事件的獨立性

教學目標：

1、掌握條件概率的概念及條件概率公式；

2、掌握貝葉斯定以及全概率公式；

3、能用上述兩項解決實際的問題.

重難點：

運用全概率公式解決骰子問題；

運用條件概率解決新冠病毒檢查假陽性的問題.

基力要求：

C—1—1　瞭解基本事件空間的意義，理解事件加法和乘法的意義；

C—1—2　會用已學的排列組合知識計算一些隨機事件所含的基本事件數；

C—1—3　通過實例，理解古典概型及其概率計算公式；

C—1—4　通過實例，瞭解兩個互斥事件的概率加法公式；

C—1—5　在具體情境中，瞭解條件概率和兩個事件相互獨立的概念.

E－1－1　積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗證等數學活動，能表達、交流自己的思維過程；

E－1－2　面對實際情境，能發現數學問題，並用數學的方式進行分析和解決問題；

E－1－3　能對所學知識進行分類與總結，建立數學知識之間的聯繫；

E－1－4　通過建立數學模型解決問題，體會數學在生活中的應用，提高數學學習的興趣；

E－1－5　能在探究活動中，傾聽和與人合作，並尊重他人的觀點；

E－1－6　能克服數學解決問題中所遇到的困難，增強數學學習的自信心，養成慎密思考的習慣和實事求是的態度.

教學過程：

1. 條件概率（時間：5 分鐘）

1.1 問題導入

你背對一個人，讓你猜這個人是女孩的概率是多少？如果直接猜測，那麼這概率必然是 50%. 但如果告訴你，背對的這個人留有長頭髮，那麼這個人是女孩的概率就馬上增加了. 也就是說，當給定的條件發生改變時，事件發生的概率可能會隨之而改變，這就是條件概率的基本意義，接下來我們用一個例子說明什麼是條件概率.

現假設高二某文科班的 30 位同學中，有一半的同學擅長中文，有$\frac{1}{3}$的同學擅長歷史，如果隨機挑選一位同學，這位同學既擅長歷史，又擅長中文的概率是多少？

雖說“文史不分家”但有時候“文史也可以分家”，擅長歷史的同學不一定不擅長中文，因此光憑上述數據仍不足夠求出答案，於是語文科代表連同歷史科代表對此進行了一項問卷調查，其結果如下表所示：

表 1 高二某班擅長中文、歷史的人數調查表

	擅長中文	不擅長中文	總數（比例）
擅長歷史	7	3	10（占$\frac{1}{3}$）
不擅長歷史	8	12	20（占$\frac{2}{3}$）
總數（比例）	15（占$\frac{1}{2}$）	15（占$\frac{1}{2}$）	30（占 100%）

班上 30 位同學，同時擅長文史的學生共 7 人，所以隨機挑選一位，該事件發生的概率為$\frac{7}{30}\approx 23.3\%$.

1.2 條件概率

除此，還能從表中得到，在擅長歷史的 10 位同學中，有 7 位也擅長中文，那麼從擅長歷史的 10 同學中，隨機挑選一位，事件“擅長中文”發生的概率為$\frac{7}{10}=70\%$.

雖然上述問題都包含了“擅長中文”這一事件發生的概率，但“擅長中文”在“擅長歷史”這個附加條件下發生的概率與沒有這個附加條件下發生的概率是不同的. 從計算結果來看，是否擅長歷史最終會影響擅長中文的概率.

定義：在已知事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的概率稱為條件概率，記“P(B|A)”

令事件 A=“擅長中文”，B=“擅長歷史”，則 $P(A|B)=\frac{7}{10}=70\%$

同理，P(B|A)意味著： 在擅長中文同學中，隨機挑選一位，其擅長歷史的概率. 易得 $P(B|A)=\frac{7}{15}\approx 46.7\%$.

2. 條件概率與貝葉斯定理（時間：10 至 15 分鐘）

2.1 條件概率公式

定義：事件 A 和事件 B 同時發生記為 A∩B.

在表 1 數據中 $P(A\cap B)=\frac{7}{30}$，$P(A)=\frac{1}{2}$，而

$$P(B|A)=\frac{\text{既擅長中文又擅長歷史的人數（7 人）}}{\text{擅長中文的人數（15 人）}}=\frac{\frac{\text{既擅長中文又擅長歷史的人數（7 人）}}{\text{班上所有學生人數（30 人）}}}{\frac{\text{擅長中文的人數（15 人）}}{\text{班上所有學生人數（30 人）}}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

由此得條件概率公式：

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

2.2 貝葉斯定理

條件概率 P(B|A)與 P(A|B)看起來十分相似，但含義完全不同：前者代表在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的概率；後者反之. 那麼這兩者有沒有內在的聯繫？結合表 1 數據繼續考察

$$P(A)P(B|A)=\frac{15}{30}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{30}=P(A\cap B)$$

$$P(B)P(A|B)=\frac{10}{30}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{30}=P(A\cap B)$$

那麼 P(A)P(B|A)= P(B)P(A|B)是否偶然的巧合？

$$P(A)P(B|A)=\frac{\text{擅長中文的人數(15 人)}}{\text{班上所有學生人數(30 人)}}\times\frac{\text{既擅長中文又擅長歷史的人數(7 人)}}{\text{擅長中文的人數(15 人)}}$$

$$=\frac{\text{既擅長中文又擅長歷史的人數(7 人)}}{\text{班上所有學生人數(30 人)}}=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$=\frac{\text{擅長歷史的人數(10 人)}}{\text{班上所有學生人數(30 人)}}\times\frac{\text{既擅長中文又擅長歷史的人數(7 人)}}{\text{擅長歷史的人數(10 人)}}=\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

上述結論稱為貝葉斯定理，即：

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

3. 條件概率的應用舉例（時間：60 至 65 分鐘）

3.1 家有女孩問題

例（1）已知某夫妻有兩個孩子，打電話到他家，接電話的是他家的女孩，問沒接電話的另一個小孩是男孩的概率是多少？

分析：在一個有兩小孩的家庭中，有四種情況，分別是：（男，男），（男，女），（女，男），（女，女）. 由於生男生女的概率都是 50%，於是這四種情況出現的可能性均相等，各為 25%. 已知接電話的是女孩，則（男，男）的情況不成立，因此在餘下的 3 種情況中，沒接電話的那個孩子有兩種情況都是男孩. 由此可知，其概率為$\frac{2}{3}$.

其實也可用條件概率的方法進行分析：令“二孩家庭中，有一個是女孩”為事件 A；“二孩家庭中，一孩性別未知，而另一孩是男孩”為事件 B；“二孩家庭中，有一男孩一女孩”為事件 A∩B，由條件概率公式得：

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

例（2）某夫妻已有一個孩子，打電話到他家，接電話的是他家的女孩，從電話裡得知，其母親現正懷孕，請思考：懷的是男孩（不考慮生雙胞胎或以上的情況）的概率是多少？是$\frac{2}{3}$還是$\frac{1}{2}$?

請先思考以下的變式問題：已知某夫妻有兩個孩子，打電話到他家，接電話的一個女孩，從電話裡知道，她是兩小孩中的老大，問沒接電話的另一個小孩是男孩的概率是多少？

分析：在一個有兩小孩的家庭中，有四種情況，分別是：A（老大：男，老二：男），B（老大：男，老二：女），C（老大：女，老二：男），D（老大：女，老二：女）. 由於生男生女的概率都是 50%，於是這四種情況出現的可能性均相等，各為 25%. 已知接電話的是老大，是個女孩，則情況 A，B 不成

立，所以在餘下的 2 種情況中，沒接電話的那個孩子有 1 種情況是男孩. 顯然其概率為$\frac{1}{2}$.

若用條件概率的方法進行分析：令“老大是女孩”的事件記為 A,“老二是男孩”的事件記為 B，“老大是女孩，老二是男孩”的事件記為 A∩B. 在事件 A 發生的情況下，事件 B 也發生的概率記為 P(B|A)，由條件概率公式得：

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

現回答預設的問題——懷男孩的概率是多少的問題：

分析：有四種情況，分別是：A（第一胎：男，第二胎：男），B（第一胎：男，第二胎：女），C（第一胎：女，第二胎：男），D（第一胎：女，第二胎：女）. 其情況與上題論述的情況一致. 因此第二胎生男的概率為$\frac{1}{2}$.

若用條件概率的方法進行分析：令“第一胎生的是女孩”記為事件 A，“第二胎生的是男孩”記為 B 事件,“第一胎是女孩，第二胎是男孩” 的事件記為 A∩B. 則：

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

在（1）、（2）兩個例子中，我們知道，有時候事件 A 是否發生，有時會對事件 B 發生的概率產生影響，但有時候又沒有.

定義：若事件 A，B 滿足：

$$P(B|A) = P(B)$$

則稱兩個事件 A，B 相互獨立，並把這兩個事件叫做相互獨立事件. 如例（2）：事件 A 的發生對事件 B 的發生沒有產生影響，P(B|A)=P(B)，事件 A、B 相互獨立.

在實際問題中，常常通過對事件本質進行分析就可知道它們是否相互獨立，而不需要進行類似上面的計算去驗證. 比如：我們知道在排除其他主觀因素干擾的情況下，生男生女只與父母雙方的染色體有關，概率各為 50%. 因此第一胎、第二胎生男生女是相互獨立的兩件事件，其中任一個事件的發生不受其他事件是否發生的影響.

在華人社會中，往往在“添丁發財、傳宗接代”的思想影響下有“喜歡生男孩”（俗稱“生仔”）的習慣. 回顧例（1），由於在二孩家庭中，已知其中一個是女孩，則另一個是男孩的概率為$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$，因此有可能帶來“錯覺”，誤認為第一胎“生女”繼續“博仔”的概率會超過 50%，但由上述例（2）可知，其想法實不可取，“第一、二胎”的本質為獨立事件，相互不受影響.

此外，由條件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$可知，當事件 A，B 相互獨立時有

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$，因此

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

也就是說，兩個獨立事件都發生的概率等於每個事件發生的概率.

在上例中，事件 “第一胎是女孩，第二胎是男孩” 的概率

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

課堂練習：

練習（1），某人先後 擲兩枚硬幣，求已知其中一枚硬幣是正面時另一枚硬幣是反面的概率是多少？

解：令“擲兩枚硬幣，其中有一枚是正面”的事件記為 A，“擲兩枚硬幣，其中有一枚是反面”的事件記為 B，“擲兩枚硬幣，一正一反”的事件記為 A∩B，則在事件 A 發生的情況下，事件 B 也發生的概率 P(B|A)為：

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

練習（2），某人先後擲兩枚硬幣，求已知第一次擲得正面時第二次擲得反面的概率是多少？

解：令“第一次擲得正面”的事件記為 A，“第二次擲得反面”的事件記為 B，A、B 互為獨立事件，則已知第一次擲得正面時，第二次擲得反面的概率為：

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$$

3.2 骰子問題

我們知道擲骰子時，雖然前一次的擲出了六，但不影響下一次擲出的點數. 它們之間是相互獨立的事件，每一次擲出某點數的概率均為$\frac{1}{6}$.

不過，如果在正常骰子裡混雜了特殊骰子，在分不清哪個是哪個的時候，前一次擲的點數會不會影響下一次的點數呢？

例（1），設正常的骰子與特殊骰子以 1：1 的比例混雜在一起，正常的骰子擲出六的概率為$\frac{1}{6}$，特殊骰子擲出六的概率為$\frac{1}{3}$.

令事件“取到正常骰子”記為 N，事件“取到特殊骰子”記為 S，事件“擲出點數為六”記為[6]，則：

$$P(N)=\frac{1}{2}，P(S)=\frac{1}{2}，$$

$$P([6]|N)=\frac{1}{6},\ P([6]|S)=\frac{1}{3},$$

求擲一粒骰子點數為六的概率.

分析：擲出點數為六分兩種情況分別為：取到正常的骰子或特殊的骰子.

解：令事件“取到正常骰子且擲得點數為六”記為 $N\cap[6]$,

事件“取到特殊骰子且擲得點數為六”記為 $S\cap[6]$，得

$$P([6]) = P(N\cap[6]) + P(S\cap[6])$$

由條件概率公式得：

$$P(N\cap[6])= P(N)\cdot P([6]|N);\ P(S\cap[6])= P(S)\cdot P([6]|S);$$

因此

$$\begin{aligned} P([6]) &= P(N\cap[6]) + P(S\cap[6]) \\ &=P(N)\cdot P([6]|N)+P(S)\cdot P([6]|S) \\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=25\% \end{aligned}$$

小結：

事件 B 的概率不易直接求得時，可用以下全概率公式進行求解：

$$\begin{aligned} P(B)&=P(B\cap A_1)+ P(B\cap A_2)+\ldots+ P(B\cap A_n) \\ &=P(B|A_1)+ P(B|A_2)+\ldots+ P(B|A_n) \end{aligned}$$

其中 B 為樣本空間 Ω 中的任一事件，$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega$ 且 $A_i\cap A_j=\emptyset$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\ldots,n$（即 A_i，A_j 互斥）.

例（2），假如擲同一粒上述情況的骰子兩次，其點數均為六，試求這件事件發生的概率.

由於正常與特殊的骰子最初是 1：1 混合在一起即 $P(N)=\frac{1}{2}$，$P(S)=\frac{1}{2}$，但由於第一次擲得點數為六，因此所選中的這粒骰子的 P(N)，P(S)的概率會隨之發生改變.

由貝葉斯定理得：

$$\text{由 } P([6])P(N|[6])=P(N)P([6]|N)$$

$$\text{解得：}P(N|[6])=\frac{P(N)P([6]|N)}{P([6])}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$\text{由 } P([6])P(S|[6])=P(S)P([6]|S)$$

$$\text{解得：}P(S|[6])=\frac{P(S)P([6]|S)}{P([6])}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

所以，第二次擲的時候，其

$$P(N)=P(N|[6])=\frac{1}{3},\ P(S)= P(S|[6])=\frac{2}{3}$$

再次運用全概率公式可得：

$$P([6]) = P(N)\cdot P([6]|N)+P(S)\cdot P([6]|S)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}\approx 27.78\%$$

小結：比較例（1）、（2）可知，兩次 P([6])均不相同，在第一次擲得六的情況下，第二次繼續擲得六的概率稍有提升，說明貝葉斯定理和全概率公式有“學習經驗”的能力.

3.3 新冠病毒核酸檢測問題

新冠病毒施虐全球至今仍未有退卻的跡象，而核酸檢測便成了日常的項目. 但常有新聞報道指出，核酸檢測偶有“假陽性”情況出現，即核酸檢測呈陽性，但實際並沒有感染新冠病毒. 下探討核酸檢測呈陽性後，感染上新冠病毒的概率.


中疾控：抗体和核酸检测都存在一定比率假阳性和假阴性

2020年05月06日 16:22 新京报

原标题：中疾控：抗体和核酸检测都存在一定比率假阳性和假阴性

中国疾控中心驻黄冈检测队队长、中国疾控中心病毒病预防控制所曾毅院士实验室副主任、研究员张晓光回答记者提问。

圖 1 假陽性

例（1），假如新冠病毒在普通人群中感染的概率為 0.1%，如果不幸感染上新冠病毒，設其核酸檢測結果為陽性的概率高達 99%. 令事件“感染新冠病毒”記為 C，令事件“沒有感染新冠病毒”記為$\bar{C}$，事件“核酸檢測陽性”記為 T，則有：

$$P(C) = 0.1\%$$

$$P(T|C) = 99\%$$

而由於目前的技術所限，並不存在完美的核酸檢測方法，因此偶爾會出現沒有感染新冠病毒但核酸檢測呈陽性的情況（即假陽性），設新冠病毒核酸檢測假陽性的概率為：

$$P(T|\bar{C}) = 0.5\%$$

而我們最想知道的是，若核酸檢測為陽性時，感染新冠病毒的概率是多少，即：

$$P(C|T)=?$$

由貝葉斯定理得：

$$P(T)P(C|T)=P(C)P(T|C)$$

則：

$$P(C|T)=\frac{P(C)P(T|C)}{P(T)} \quad \ldots\ldots①$$

而核酸檢測陽性則分為真陽性（感染新冠病毒且核酸檢測陽性）以及假陽性（沒有感染新冠病毒但核酸檢測陽性）兩種，因此由全概率公式可得核酸檢測陽性的概率

$$P(T)=P(C)\,P(T|C)+P(\bar{C})\,P(T|\bar{C}) \quad \ldots\ldots②$$

因此，

$$P(T)=P(C)\,P(T|C)+P(\bar{C})\,P(T|\bar{C})$$
$$=0.1\%\times99\%+99.9\%\times0.5\%=0.5985\%$$

所以

$$P(C|T)=\frac{P(C)P(T|C)}{P(T)}=\frac{0.1\%\times99\%}{0.5985\%}\approx16.54\%$$

由此可知，某人初次進行核酸檢測為陽性的概率有 16.54%，雖說仍有很大概率沒有感人病毒，但該情況已不能忽略——因為在普通人群中，隨機抽一人，其感染新冠病毒的概率 P(C)=0.1%. 所以某人初次進行檢測為陽性的情況下感染上病毒的概率已提升到 16.54%÷0.1%≈165 倍. 通常，我們會把這類人士稱為疑似感染者.

例（2），對於上述的疑似感染者，我們會對其作進一步的醫護處理，如適時進行第二次核酸檢測. 現設複檢和初檢的兩次檢測的準確率相同（即 $P(T|C)=99\%$，$P(T|\bar{C})=0.5\%$），如果複檢時核酸仍為陽性，那麼疑似感染者確診感染新冠病毒的概率會是多少？

這時候，我們仍可繼續使用①式及②式的方法進行求解.

由於某人初次核酸檢測為陽性，已被列入疑似感染者，令疑似感染者感染新冠病毒的概率為

$$P(C)=16.54\%$$

對於疑似感染者，核酸檢測陽性同樣可分為則分為真陽性及假陽性兩種，由全概率公式可得

$$P(T)=P(C)\,P(T|C)+P(\bar{C})\,P(T|\bar{C})$$
$$=16.54\%\times99\%+83.46\%\times0.5\%=16.7919\%$$

則第二次核酸檢測陽性時感染上新冠病毒的概率為

$$\mathrm{P(C|T)}=\frac{\mathrm{P(C)P(T|C)}}{\mathrm{P(T)}}=\frac{16.54\%\times 99\%}{16.7919\%}\approx 97.51\%$$

小結：比較例（1）、（2）可知，兩次計算$\mathrm{P(C|T)}$均不相同說明運用貝葉斯定理和全概率公式有類似於人類思維中的“自身積累經驗”的能力，其實這正是如今機械思考的核心算法所在.

4. 小結與功課（時間：5 分鐘）

4.1 小結

4.1.1 相關的概念及公式

1) 條件概率產生的背景
2) 條件概率的符號及公式
3) 貝葉斯定理
4) 獨立事件的定義
5) 全概率公式

4.1.2 關於本課節中三個實例的思考

當生活中遇到的問題與自己所積累的經驗相衝突時，結合數學方法才能剖析問題的本質所在.

4.2 功課

P50 練習 A 及練習 B 全部

二、獨立重複試驗與二項分佈

教學目標：

1、掌握 n 次獨立重複實驗的概念；

2、掌握二項分佈的概念及計算公式以及二項分佈的數學期望；

3、運用二項分佈解決實際問題.

重難點：

運用二項分佈解決高爾頓釘板問題.

基力要求：

C－1－1　瞭解基本事件空間的意義，理解事件加法和乘法的意義；

C－1－2　會用已學的排列組合知識計算一些隨機事件所含的基本事件數；

C－1－3　通過實例，理解古典概型及其概率計算公式；

C－1－4　通過實例，瞭解兩個互斥事件的概率加法公式；

C－1－5　在具體情境中，瞭解條件概率和兩個事件相互獨立的概念.

C－2－4　用樣本的數字特徵估計總體的數字特徵；

C－3－10 理解二項式的通項公式，並能用通項公式求指定項或者指定項係數；

E－1－1　積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗證等數學活動，能表達、交流自己的思維過程；

E－1－2　面對實際情境，能發現數學問題，並用數學的方式進行分析和解決問題；

E－1－3　能對所學知識進行分類與總結，建立數學知識之間的聯繫；

E－1－4　通過建立數學模型解決問題，體會數學在生活中的應用，提高數學學習的興趣；

E－1－5　能在探究活動中，傾聽和與人合作，並尊重他人的觀點；

E－1－6　能克服數學解決問題中所遇到的困難，增強數學學習的自信心，養成慎密思考的習慣和實事求是的態度.

教學過程：

1. 獨立重複試驗（時間： 10 分鐘）

1.1 問題導入

上一課節，我們在學習條件概率時，知道了獨立事件的定義：

若事件 A，B 滿足

$$P(B|A) = P(B)$$

則稱兩個事件 A，B 相互獨立.

也知道獨立事件的概率計算公式：

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

請用獨立事件的概率公式思考以下引例：

（1）假設擲一枚均勻硬幣得正反面的概率各為 50%，設擲得正面時甲獲勝. 求擲 4 次甲獲勝 k 次的分佈列.

（2）如果這是一枚特殊的硬幣，擲得正反面的概率分別為 48%和 52%，設擲得正面時甲獲勝，求擲 n 次甲獲勝 k 次的分佈列.

1.2 n 次獨立重複試驗

定義：若每次試驗只有兩個可能的結果A及$\bar{A}$，且每次事件A發生的概率相同. 在相同的條件下，重複地做n次這樣的試驗，各次試驗的結果相互獨立，則稱它們為n次獨立重複試驗.

顯然，引例（1）擲 n 次均勻硬幣為 **n 次獨立重複試驗**. 令事件"擲得正面"記為 A，事件"擲得反面"記為$\bar{A}$，則

擲 4 次恰有 0 次正面的樣本空間$\Omega_0=\{\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\}$

擲 4 次恰有 1 次正面的樣本空間$\Omega_1=\{A\bar{A}\bar{A}\bar{A}, \bar{A}A\bar{A}\bar{A}, \bar{A}\bar{A}A\bar{A}, \bar{A}\bar{A}\bar{A}A\}$

擲 4 次恰有 2 次正面的樣本空間$\Omega_2=\{\bar{A}\bar{A}AA,\bar{A}A\bar{A}A,\bar{A}AA\bar{A},A\bar{A}\bar{A}A,A\bar{A}A\bar{A},AA\bar{A}\bar{A}\}$

擲 4 次恰有 3 次正面的樣本空間$\Omega_3=\{AAA\bar{A}, AA\bar{A}A, A\bar{A}AA, \bar{A}AAA\}$

擲 4 次恰有 4 次正面的樣本空間$\Omega_4=\{AAAA\}$

對應的概率為：

$P(\Omega_0)=P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A})=C_4^0P^0(A) \times P^4(\bar{A})=6.25\,\%$

$P(\Omega_1)=P(A\bar{A}\bar{A}\bar{A}) +P(\bar{A}A\bar{A}\bar{A}) +P(\bar{A}\bar{A}A\bar{A}) +P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}A)$

$\quad=C_4^1P^1(A) \times P^3(\bar{A})=25\%$

$P(\Omega_2)=P(\bar{A}\bar{A}AA)+P(\bar{A}A\bar{A}A)+P(\bar{A}AA\bar{A})+P(A\bar{A}\bar{A}A)+P(A\bar{A}A\bar{A})+P(AA\bar{A}\bar{A})$

$=C_4^2\mathrm{P(A)}\times\mathrm{P(A)}\times\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})\times\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})$

$=C_4^2\mathrm{P}^2(\mathrm{A})\times\mathrm{P}^2(\bar{\mathrm{A}})$

$=6\times0.25\times0.25$

$=37.5\%$

$\mathrm{P}(\Omega_3)=\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{AAA})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{AA})+\mathrm{P}(\mathrm{AA}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{AAA}\bar{\mathrm{A}})$

$=C_4^3\mathrm{P}^3(\mathrm{A})\times\mathrm{P}^1(\bar{\mathrm{A}})=25\%$

$\mathrm{P}(\Omega_4)=\mathrm{P(AAAA)}=C_4^4\mathrm{P}^4(\mathrm{A})\times\mathrm{P}^0(\bar{\mathrm{A}})=6.25\,\%$

因此擲 4 次得 k 次正面的分佈列為:

表 1 擲 4 次得 k 次正面的分佈列

正面次數 X	0 次	1 次	2 次	3 次	4 次
對應概率 P(X)	6.25 %	25%	37.5%	25%	6.25 %

由於規定了擲得正面時甲獲勝，因此分佈列中第一行可看成甲獲勝次數，第二行對應的概率，把它們相乘後求和得到擲 4 次甲獲勝的平均次數為：

$$\sum_{i=1}^{4}\mathrm{X}_i\mathrm{P}(\mathrm{X}_i)=0\times6.25\%+1\times25\%+2\times37.5\%+3\times25\%+4\times6.25\%=2$$

這個平均獲勝次數又統稱為擲 4 次（試驗 4 次）時甲獲勝的**數學期望**，記為 E(x).

顯然，上述甲的數學期望等於試驗的次數乘以每次試驗時甲獲勝的概率

$$\mathrm{E(x)}=4\times50\%=2.$$

2. 二項分佈（時間： 25 至 30 分鐘）

2.1 二項展開式與二項分佈

現對引例（2）進行分析：如果一枚特殊硬幣每次擲得正面的概率為 p，擲得反面的概率為 q，q=1-p，令事件“擲得正面”發生的次數記為 X，由概率加法公式可得擲 n 次得 k 次正面的概率為

$$\mathrm{P(X=k)}=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}\qquad\cdots\cdots①$$

其中 k≤n, k∈N，於是得到 X 的分佈列

X	X=0	X=1	X=2	……	X=k	……	X=n
P(X)	$\mathrm{C}_n^0p^0q^n$	$\mathrm{C}_n^1p^1q^{n-1}$	$\mathrm{C}_n^2p^2q^{n-2}$	……	$\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}$	……	$\mathrm{C}_n^np^nq^0$

由於①式的等於號右邊與二項式$(q+p)^n$的展開式中的通項公式

$$\mathrm{T}_{k+1}=\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}$$

一致，因此稱這樣的離散型隨機變量 X 服從參數為 n，p 的二項分佈，記作

$$\mathrm{X}\sim\mathrm{B}(n,p).$$

若 n=4，p=48%，則對應的分佈列為：

表 2 $X\sim B(4,48\%)$的分佈列

X	0	1	2	3	4
P(X)	7.311616%	26.996736%	37.380096%	23.003136%	5.308416%

與表 1 對比後發現，當 p 從 50%稍微下降至 48%時，X=0,1 時所對應的概率增加了，X=2,3,4 時所對應的概率減少了，說明甲獲勝的難度增加了.

此外，數學期望 $E(x)=4\times0.48=1.92<2$ 也從另一方面說明甲只能平均獲勝 1.92 次，即甲獲勝的難度增加了.

2.2 二項分佈的應用舉例

2.2.1 醫保問題

在對抗新冠病毒的大環境下，各種醫療保險越來越受大眾關注. 而保險公司很重視投保人患某種疾病的概率. 假設有 3 個新冠病毒高危人士打算投保某保險公司的新冠病毒治療保險，而每個參保人感染病毒的概率為 0.4，設他們感染病毒均為獨立事件，求這 3 個投保人感染病毒的概率分佈列及數學期望.

分析：由於每位投保人感染病毒均為獨立事件，則滿足二項分佈，因此可用上述結論進行求解.

解：設事件 A=“某投保人感染病毒”，則$\bar{A}$=“某投保人沒有感染病毒”

$$P(A)=0.4,\ P(\bar{A})=1-0.4=0.6,$$

令事件“某一位投保人感染病毒”發生的次數記為 X，由①得：

$P(X=0)=C_3^0P^0(A)\cdot P^{3-0}(\bar{A})=21.6\%$

$P(X=1)=C_3^1P^1(A)\cdot P^{3-1}(\bar{A})=43.2\%$

$P(X=2)=C_3^2P^2(A)\cdot P^{3-2}(\bar{A})=28.8\%$

$P(X=3)=C_3^3P^3(A)\cdot P^{3-3}(\bar{A})=6.4\%$

則對應的分佈列為：

$X\sim B(3,0.4)$的分佈列

X	0	1	2	3
P(X)	21.6%	43.2%	28.8%	6.4%

數學期望 $E(x)=3\times0.4=1.2$，即在每 3 位這樣的高危人群中，平均有 1.2 人感染病毒.

2.2.2 高爾頓釘板問題

英國生物統計學家高爾頓曾設計如圖 1 所示的釘板，以研究隨機現象. 該釘板中，每一排釘子數目都比上一排的多一個，一排中各釘子恰好對準上一排兩

釘子的中央. 從入口處放進一個直徑略小於兩顆釘子之間的距離的小圓玻璃球，當小圓球向下降落過程中，碰到釘子後皆以 1/2 的概率向左或向右滾下，於是又碰到下一層釘子. 如此繼續下去，直到滾到底板的一個格子內為止. 把許許多多同樣大小的小球不斷從入口處放下（見本單元教案設計中的視頻附件），多次統計小球最後落入下方條格的個數發現，其滿足某種離散型隨機變量的概率分佈.

假設某四層高爾頓釘板如圖 2 所示，上方入口處有小球放下，計算小球落入各個格的概率的分佈列，若有 1000 個小球從上方入口處放下，求每個格的小球數目的數學期望值.

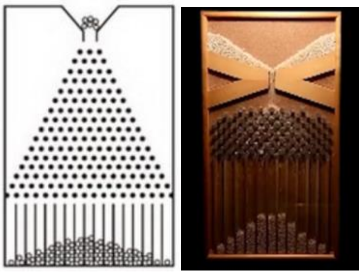


圖 1 高爾頓釘板及其示意圖

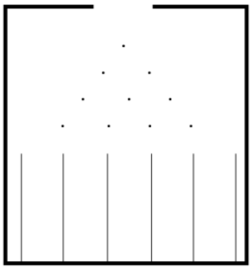


圖 2 四層高爾頓釘板

解：四層高爾頓釘板共 10 個釘子，令點 A、B、⋯、J 分別代表每個釘子，0、1、⋯、4 分別代表下方每一個條格如圖 3. 設事件“小球垂直下落碰觸釘子時，向左下落”為[X]，事件“小球垂直下落碰觸釘子時，向右下落”為$[\bar{X}]$，如：事件“小球在觸碰點 A 處向左下落”記為 [A]，事件“小球在觸碰點 A 處向左下落”記為 $[\bar{A}]$. 則

$$P([A])=P([\bar{A}])= P([B])=P([\bar{B}])=\cdots=50\%$$

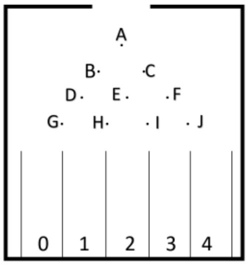


圖 3

令事件“小球最終落入第 0 號條格”發生的事件記為 X=0，則事件

$$“X=0” = “[A]\cap[B]\cap[D]\cap[G]”$$

即小球必須經過 A 的左邊、B 的左邊、D 的左邊、G 的左邊才能落入 0 號條格. 由於事件[A]、[B] 、[D] 、[G]相互獨立，則其對應的概率為

$$P(X=0)=P([A]\cap[B]\cap[D]\cap[G])$$
$$= P([A])\,P([B])\,P([D])\,P([G])=0.5^4=6.25\%$$

同理

$P(X=1)=P([A]\cap[\bar{B}]\cap[E]\cap[H])+P([A]\cap[B]\cap[\bar{D}]\cap[H])+P([A]\cap[B]\cap[D]\cap[\bar{G}])+P([\bar{A}]\cap[C]\cap[E]\cap[H])$

$=4\times 0.5^4=25\%$

$P(X=2)=P([A]\cap[B]\cap[\bar{D}]\cap[\bar{H}])+P([A]\cap[\bar{B}]\cap[E]\cap[\bar{H}])+P([\bar{A}]\cap[C]\cap[E]\cap[\bar{H}])+P([\bar{A}]\cap[C]\cap[\bar{E}]\cap[I])+P([A]\cap[\bar{B}]\cap[\bar{E}]\cap[I])+P([\bar{A}]\cap[\bar{C}]\cap[F]\cap[I])$

$=6\times 0.5^4=37.5\%$

$P(X=3)=\cdots=4\times 0.5^4=25\%$

$P(X=4)=\cdots=0.5^4=6.25\%$

因此分佈列為：

X	0	1	2	3	4
P(X)	6.25%	25%	37.5%	25%	6.25%

其分佈列與二項分佈 X~B(4,0.5)一致，因此可以猜想 n 層高爾頓釘板的分佈列恰為二項分佈 X~B(n,0.5).

若 1000 個小球從入口處放下，則每個格對應的小球數目的數學期望值如下表所示：

條格編號	0	1	2	3	4
對應的期望值	62.5	250	375	250	62.5

3. 小結與功課（時間：5 分鐘）

3.1 小結

3.1.1 相關的概念及公式

1) n 次獨立重複試驗
2) 二項分佈及二項分佈的數學期望

3.2 功課

P56 練習 A 全部，

求證：n 層高爾頓釘板的分佈列恰為二項分佈 X~B(n,0.5)

三、條件概率的應用舉例——瑪麗蓮問題的爭論

教學目標:

1、了解瑪麗蓮問題的核心矛盾;

2、運用古典概型、條件概率解決瑪麗蓮問題的爭論.

重難點:

運用古典概型、條件概率解決瑪麗蓮問題的爭論.

基力要求:

C—1—1　瞭解基本事件空間的意義，理解事件加法和乘法的意義;

C—1—2　會用已學的排列組合知識計算一些隨機事件所含的基本事件數;

C—1—3　通過實例，理解古典概型及其概率計算公式;

C—1—4　通過實例，瞭解兩個互斥事件的概率加法公式;

C—1—5　在具體情境中，瞭解條件概率和兩個事件相互獨立的概念.

E—1—1　積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗證等數學活動，能表達、交流自己的思維過程;

E—1—2　面對實際情境，能發現數學問題，並用數學的方式進行分析和解決問題;

E－1－3　能對所學知識進行分類與總結，建立數學知識之間的聯繫；

E－1－4　通過建立數學模型解決問題，體會數學在生活中的應用，提高數學學習的興趣；

E－1－5　能在探究活動中，傾聽和與人合作，並尊重他人的觀點；

E－1－6　能克服數學解決問題中所遇到的困難，增強數學學習的自信心，養成慎密思考的習慣和實事求是的態度.

教學過程:

1. 課前自學（課前自學時間： 20 分鐘）

1.1 自行閱讀瑪麗蓮問題的爭論閱讀材料

瑪麗蓮問題的爭論

20 世紀 80 年代，某電視臺設計了某綜藝節目風靡一時：挑戰者為贏得終極大獎名貴私家車而不斷歷奇闖關.

而挑戰者最後一關的挑戰是：有 3 個門，其中 2 個門後是山羊，一個門後是汽車. 作為挑戰者的你先挑選一扇門，接下來主持人瑪麗蓮會從剩下的兩個門中推開一扇藏有山羊的門. 然後問你，是否改變主意——重新選擇另一扇門.

上述就是著名的瑪麗蓮問題. 某校專門為此舉辦了一次辯論會[1]，下為該辯論會的節選：

大家都知道，對於瑪麗蓮問題，同學們出現了一些分歧，一些同學認為換，一些同學認為不換，那麼今天雙方就會針對這一爭論作一番辯解，正方的立場是應該“換”，反方的立場是“不換”.

主持人:下面正式開始比賽！首先，第一環節自由辯論，限時 3 分鐘，有請反方先開始你的辯論.

反方辯手:首先我方認為換與不換無所謂，主持人幫助參與者去掉一個帶有羊的門，那麼剩下的就是一個有羊的門，一個有汽車的門，所以換與不換猜中的概率各為 1/2，那麼還不如相信自己的第一感覺，不換.

正方辯手:我方認為瑪麗蓮小姐給出的答案才是正確的，因為換一扇門，就相當於選擇了二次機會，如:羊 1–汽車，羊 2---汽車，猜中的概率自然為 2/3，不換則為 1/3，應該堅持換.

反方辯手:請正方同學注意了，參與者是在主持人打開其中一扇有羊門的前提下進行是否換選另一扇門的活動的，這時候剩下的就是一個有羊的門，一個有汽車的門，所以無論參與者第一次選中的是哪個，對現在的結果都不會影響，自然等可能.

正方辯手:別忘了，第一次參與者選到車的概率為 1/3，而後主持人每次打開有羊的門，那麼說明主持人就永遠選不到車，自然中車的概率就相當於 0，另一扇門後有車的概率就是 2/3，應該換.

……

主持人:時間到，雙方停止辯論. 接下來，進入第二環節:總結陳述環節，有請正方 4 辯.

[1] 相關資料來自百度文庫：https://wenku. baidu. com/view/96a45d4f294ac850ad02de80d4d8d15abf230000. html

正方 4 辯總結環節：我方認為應該換. 首先，在節目錄製之前，主持人隨機的將轎車放在三扇門中的任一扇門後，其餘的兩扇門留給山羊，情況總共有三種：第一種：1（轎車） 2 （羊） 3（羊） 第二種：1（羊） 2（轎車） 3（羊） 第三種：1（羊） 2（羊） 3（轎車） 現在考慮你的第二次選擇：假設你選擇的是 1 號門，那麼你中車的可能情形只有第一種情況發生，主持人給你打開一扇門，此時他可能隨便開第 2 或 3 號門，當第二種情形時，他只能開第 3 扇門，當第 3 種情形時，他只能開 2 號門，你若堅持不換，中車的幾率顯然是 1/3，但你若改變策略，換，只有第一種情形發生時，你才不幸換錯，而第二、三情形出現時，你將大大提高將車開走的可能性，此時中車的情形時 2/3，同理，當你第一次選擇了 2 號門或者 3 號門，結果完全同上.

反方 4 辯總結環節：我方認為不換. 原因很簡單，當參與者作出選擇時，主持人又幫參與者去掉一扇羊的門，就相當於去掉了一個元素，就只剩下一扇羊和一扇汽車的門. 因此無論前面參與者選擇的是羊還是汽車，它中車的概率都是 1/2. 正如正方總結所說，主持人隨機將轎車放在三扇門中任一扇門後面，就只剩下兩扇為山羊的門，總共有三種情況. 但無論這三種情況中的哪一種，當主持人選擇一扇羊的門後，就只剩下一扇羊的門和汽車的門，如果換的話，就由羊換為汽車，汽車換為羊，所以換與不換無所謂. 因此，我們得出結論，要堅持自己的第一選擇，不換.

主持人：感謝雙方辯手，在這裡我們辯論賽部分就到此結束了，感謝大家!

2. 條件概率與瑪麗蓮問題的爭論（時間： 25 至 30 分鐘）

2.1 問題導入

根據課前的閱讀材料，我們知道“瑪麗蓮問題”帶來了正反兩方的激烈辯論. 其實，不光是正反雙方在校內的辯論會上交鋒，當時國防部情報中心主任美籍匈牙利數學家 Paul Erdos 也曾是反方立場的“忠實鐵粉”. 瑪麗蓮問題（Monty Hall Probability）又稱為三門問題，其問題如下：

台上有三扇關閉了的門，其中一個後面有汽車，其餘兩個是山羊，主持人讓挑戰者任意選擇其一，然後她打開其餘兩扇門的其中之一. 但由於她知道那扇門後有汽車，所以她打開的總是山羊. 這時候她讓挑戰者重選，就是說挑戰者可以選換另一個剩下的門. 那麼換還是不換？

2.2 問題的思考

我們知道，挑戰者第一次選擇時，獲獎的概率為$\frac{1}{3}$. 但當主持人推開山羊的門時，直覺就是在主持人的幫忙下排除了一個錯誤的選項，只剩二選一. 所以有人

就會認為，既然換與不換猜中的概率各為 50%，那麼倒不如相信自己的第一感覺，不換.

我們不妨把主持人的出場循序調整一下：

還是同一個舞台，三扇關閉著的門，這時候主持人先打開其中一個帶有山羊的門，讓挑戰者在剩下的門中二選一，那麼獲獎的概率是什麼？這時候挑戰者需要換門嗎？

顯然，在剩下的門中二選一是獨立事件，第一次選擇獲獎概率是 50%，第二次選擇獲獎的概率也是一樣.

2. 3 運用 Excel 及 VBA 編程做數學實驗

接下來，還原主持人的出場順序：

挑戰者對門進行三選一

↓

主持人先打開其中一個帶有山羊的門

↓

挑戰者作二選一的抉擇：“換”還是“不換”

現使用軟件對上述過程進行模擬並統計獲獎比例.

2. 3. 1 瑪麗蓮問題的算法設計

使用數字 1、2、3 對三扇門進行編號，並使用隨機函數生成汽車所在的門的編號，隨後再次使用隨機函數生成挑戰者的選擇，然後用分段函數及隨機函數求得主持人打開有山羊的門的編號，最後計算出挑戰者換門的編號，並由系統自行判斷換門後是否獲獎.

表 1 瑪麗蓮問題的算法設計

程序流程	例 1	例 2
第一步 用 1、2、3 對門進行編號;	1 號門=1 2 號門=2 3 號門=3	
第二步 用隨機函數生成汽車對應的門的編號 c	c=1	c=1
第三步 用隨機函數生成挑戰者的選擇 x	x=2	x=1

第四步 求出主持人的開門編號 y $y=\begin{cases}\text{用隨機函數生成另外兩個編號}, & c=x\\ 6-c-x, & c\neq x\end{cases}$	∵$c\neq x$ ∴y =6-c-x =3	∵$c=x$ ∴y 由隨機函數生成，不妨設 y=2
第五步 求出挑戰者換門的編號 z 並判斷是否獲獎 z=6−x − y	∵ z=6-x-y =6-2-3 =1 ∴z=c ∴挑戰成功	∵ z=6-x-y =6-1-2 =3 ∴z≠c ∴挑戰失敗

2.3.2 瑪麗蓮問題的算法實現

使用 VBA 結合 Excel 可實現上述算法，Excel 文件見本單元教案附件. 在進行了 40 萬次模擬的數學實驗後（打開文件後按 Ctrl+T 自動運行，大概半分鐘後便得到統計結果），統計結果如圖 1 所示：

每400局小結		若干次400局的統計結果平均值
不換門獲獎比例（%）	34	33.46
換門後獲獎比例（%）	66	66.54
按Ctrl+E，程序開始復位。		
按Ctrl+R，程序自動統計每400局的情況。		
也可以按Ctrl+T,程序自動統計1000次每400局情況,並把結果自動記錄在下表中。		

圖 1 四十萬次模擬的統計結果

統計結果表明，換門後獲獎比例大幅上升，約為 66.54%.

2.4 運用古典概型——依次抽籤模型進行思考

設三人依次打開上述三扇門，其中 A 為挑戰者，B 為主持人，C 為另一位挑戰者，如果 A、B、C 三位各不知情，即它們獲獎的事件相互獨立. 設符號[A]為 A 獲獎，則第一個開門獲獎的概率 P([A])= $\frac{1}{3}$.

為求得當 A 不獲獎但 B 獲獎的概率，用捆綁法把 A、B 捆綁在一起，然後從三扇門中先後選兩個進行排列A_3^2=6 並依次分配給 A、B 兩位，其中第二人獲獎的情況有$A_2^1A_1^1$=2 種（兩扇不獲獎的門分配給 A，獲獎的門分配給 B），即

P([B])= $\frac{A_2^1A_1^1}{A_3^2}$= $\frac{1}{3}$

同理，把 A、B、C 捆綁成一個整體，再將三扇門進行排列A_3^3=6 並依次分配給三位，其中第三位獲獎的情況有$A_2^2A_1^1$=2 種（兩扇不獲獎的門分配給 A、B 兩位，獲獎的門分配給 C），即 P([C])= $\frac{A_2^2A_1^1}{A_3^3}$= $\frac{1}{3}$

由上述可知，不管 A、B、C 三人開門的次序如何，每位獲獎的概率均為$\frac{1}{3}$. 如果在主持人不知情的情況下，挑戰者換門就相當於上述 A、B、C 三人依次開門的問題，這時候挑戰者換與不換其獲獎概率都是$\frac{1}{3}$.

此外，由上可知，若有 n 個人，從依次抽簽，且只有一簽能獲獎，則第 i(i=1,...,n)個人獲獎的概率為：

$$P(X=i)=\frac{A_{n-1}^{i-1}A_1^1}{A_n^i}$$

上述為主持人在不知情的情況下求出的結果，但如果主持人知情，她總選擇一個帶有山羊的門，因此 P([B])=0，所以第三位獲獎的概率為 P([C])=1－P([B])－P([C])=$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，即換門後獲獎的概率是$\frac{2}{3}$.

2.5 運用條件概率模型進行思考

現使用數字 1、2、3 對三扇門進行編號，令事件“汽車在 1、2、3 號門”分別記為[C1] 、[C2] 、[C3]，則汽車在 1、2、3 號門的概率為

$$P([C1])= P([C2])= P([C3])= \frac{1}{3}.$$

令事件“主持人打開 1、2、3 號門且是山羊” 分別記為[B1] 、[B2] 、[B3]. 因此原題可改為：

當挑戰者選擇了 1 號門，主持人打開了 3 號門時，求汽車在 1 號門的概率 P([C1]|[B3])（相當於挑戰者堅持選 1 號門的獲獎概率），以及汽車在 2 號門的概率 P([C2]|[B3]) （相當於挑戰者選擇 2 號門的獲獎概率）.

解：由貝葉斯定理可知

$P([C1]|[B3])=\frac{P([C1])P([B3]|[C1])}{P([B3])}$； $P([C2]|[B3])=\frac{P([C2])P([B3]|[C2])}{P([B3])}$

下用全概率公式求 P([B3])：

當挑戰者選擇 1 號門且汽車在 1 號門時，主持人打開 3 號門的概率是$\frac{1}{2}$

$$P([B3]|[C1])=\frac{1}{2};$$

當挑戰者選擇 1 號門且汽車在 2 號門時，主持人打開 3 號門的概率是1

$$P([B3]|[C2])=1;$$

當挑戰者選擇 1 號門且汽車在 3 號門時，主持人打開 3 號門的概率是0

$$P([B3]|[C3])=0;$$

所以：

$$P([B3])=P([C1])\cdot P([B3]|[C1])+P([C2])\cdot P([B3]|[C2])+P([C3])\cdot P([B3]|[C3])$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{2}$$

所以：

$$P([C1]|[B3])=\frac{P([C1])P([B3]|[C1])}{P([B3])}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$P([C2]|[B3])=\frac{P([C2])P([B3]|[C2])}{P([B3])}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

因此換門與不換門的概率是不同的，這時候應該根據概率計算的結果作出理智的抉擇.

3. 瑪麗蓮問題的拓展性思考（時間： 10 分鐘）

3. 1 百萬富翁問題

上世紀 90 年代末，一檔名為《百萬富翁》的綜藝節目曾風靡港澳地區. 挑戰者歷盡艱辛為挑戰一百萬的獎金，而在遊戲的過程中遇到困難時可以使用三個錦囊，分別是：“打電話問朋友”、“問現場觀眾”、“50、50”.

圖 2

其中的“50、50”就是挑戰者可以選擇向主持人求助，這時候主持人則在四個候選答案中幫助挑戰者排除其中的兩個.

如圖 3，現假設某挑戰者正在挑戰最後一關——一百萬獎金，卻遇到了一道自己完全不懂的題目.

這時候挑戰者打算憑自己運氣去懵一個答案“B”. 主持人提醒他，還剩一個錦囊“50、50”，是否需要使用？

挑戰者考慮到這是最後一關，不用白不用，於是使用了錦囊排除了“C、D”兩個錯誤答案.

現只剩 A、B 兩個候選答案，請問挑戰者應該堅持自己的第一感覺還是換另一個選項？

圖 3

解：P(換)=1－P(不換)=1－25%=75%> P(不換).

這時候，選項 A 的獲獎概率為 75%，遠大於選項 B 的 25%的獲獎概率。

3.2 再次挑戰百萬富翁

設某電視節目的“百萬富翁”把原來的“50、50”求助規則改為“33、33、33”，即向主持人求助時，主持人只會排除一個錯誤選項，而不是兩個.

假設你闖到了最後一關，遇到了一道完全不懂的題目，但還剩一個“33、33、33”錦囊.

這時候你向主持人透露，自己打算選 A，而主持人則幫你排除了 D 選項，目前還是 A、B、C 三項，請分別求這三個選項的獲獎概率.

解：令事件“百萬大獎在 A、B、C、D 選項”分別記為[mA]、[mB]、[mC]、[mD]，則對應的概率為

$$P([mA])=P([mB])=P([mC])=P([mD])=\frac{1}{4}.$$

令事件“主持人排除 A、B、C、D 選項” 分別記為[nA]、[nB]、[nC]、[nD].

由貝葉斯定理可知

$P([mA]|[nD])=\frac{P([mA])P([nD]|[mA])}{P([nD])}$；$P([mB]|[nD])=\frac{P([mB])P([nD]|[mB])}{P([nD])}$;

$P([mC]|[nD])=\frac{P([mC])P([nD]|[mC])}{P([nD])}$.

下用全概率公式求 P([nD])：

當挑戰者選擇 A 且大獎在 A 時，主持人排除 D 的概率是$\frac{1}{3}$

$$P([nD]|[mA])=\frac{1}{3};$$

當挑戰者選擇 A 且大獎在 B 時，主持人排除 D 的概率是$\frac{1}{2}$

$$P([nD]|[mB])=\frac{1}{2};$$

當挑戰者選擇 A 且大獎在 C 時，主持人排除 D 的概率是$\frac{1}{2}$

$$P([nD]|[mC])=\frac{1}{2};$$

當挑戰者選擇 A 且大獎在 D 時，主持人排除 D 的概率是0

$$P([nD]|[mD])=0;$$

所以：

$$P([nD])=P([mA])\cdot P([nD]|[mA])+P([mB])\cdot P([nD]|[mB])+P([mC])\cdot P([nD]|[mC])+P([mD])\cdot P([nD]|[mD])$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 0=\frac{1}{3}$$

所以：

$$P([mA]|[nD])=\frac{P([mA])P([nD]|[mA])}{P([nD])}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$P([mB]|[nD])=\frac{P([mB])P([nD]|[mB])}{P([nD])}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$$

$$P([mC]|[nD])=\frac{P([mC])P([nD]|[mC])}{P([nD])}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

因此換（如換為 B）的獲獎概率（37. 5%）比不換的（25%）要高.

4. 小結與功課（時間：5 分鐘）

4.1 小結

1. 瑪麗蓮問題的模擬實驗的算法設計思路；
2. 依次抽籤的概率計算公式；
3. 條件概率求瑪麗蓮問題的方法；
4. 瑪麗蓮問題的拓展性思考——百萬富翁問題.

4.2 功課

完成 P69 思考與交流 1~4，鞏固提高全部

叁、試教評估

本單元教案從條件概率的問題開始展開學習.在學習的過程中，涉及到多個學生首次學習的概念，如：二項分佈、高爾頓釘板等等.為此，本教案結合了大量學生所熟悉的日常生活背景作為引例，把抽象的數學概念形象化，幫助學生更好地建構自己的知識體系.

試教本單元教案時，學生普遍會產生一種感慨，原來生活之中充滿“埋伏”——如三門問題的爭論，如果不用數學工具分析，我們的大腦就很可能無法明辨其中的是非.其實不單三門問題是這樣，實現中還有很多類似的情況，這恰好說明了數學工具在決策中起到了舉足輕重的作用.

肆、反思與建議

數學建模是貫穿在本單元教案的主線，但在教學過程中，也不應過分強調學生數學建模的能力，教師應該把學生的建模能力看成是一個動態成長的過程，如果學生在日常思考問題的時候，不再是“想當然”，而是自覺地用建模方法去思考問題，那麼就足以說明本教案取得了成功.

此外，在本單元教案最後一個課節中涉及到計算機算法的設計及初步編程的思想，因本單元主要內容以概率論相關的知識為主，故課堂上不作展開，但可讓學有餘力的同學用餘霞時間繼續鑽研數學建模中的編程問題.

參考文獻

[1]奧蘇貝爾（David Paul Ausubel）. 教育心理學[M]. 1968

[2]姜啟源. 數學模型[M]. 高等教育出版社，1987

[3]Hirosi Ooguri. 用數學的語言看世界[M]. 人民郵電出版社，2017

附錄

教材

2.2 条件概率与事件的独立性

2.2.1 条件概率

在很多实际问题中，需要考虑一个事件在“某事件已发生”这个附加条件下的概率. 我们来看下面的问题.

抛掷红、蓝两颗骰子. 设

事件 A= “蓝色骰子的点数为 3 或 6”，

事件 B= “两颗骰子的点数之和大于 8”.

我们用 x 代表抛掷红骰子所得到的点数，用 y 代表抛掷蓝骰子所得到的点数，则这个试验的基本事件空间为 $S=\{(x, y) \mid x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}, 1\leqslant x\leqslant 6, 1\leqslant y\leqslant 6\}$. 作图 2-2，容易看出，基本事件空间的元素与图中的点一一对应. 所以抛掷红、蓝两颗骰子这一试验的基本事件总数为 36. 事件 B 所包含的基本事件对应图中三角实线所包围的点，个数为 10. 所以，事件 B 发生的概率 $P(B)=\frac{10}{36}$.

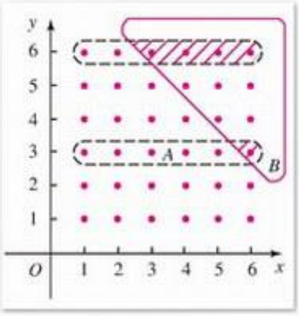


图 2-2

当已知蓝色骰子的点数为 3 或 6 时，事件 B 发生的概率是多少呢？也就是说，要求事件 B 在“事件 A 已发生”这个附加条件下的概率是多少. 事件 A 已发生的所有可能的结果对应图中长条虚线所包围的 12 个点，其中阴影部分的 5 个点的“点数之和大于 8”. 所以事件 B 在“事件 A 已发生”条件下的概率是 $\frac{5}{12}$.

从这个例子中看到，事件 B 在“事件 A 已发生”这个附加条件下的概率与没有这个附加条件的概率是不同的. 对于任何两个事件 A 和 B，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做**条件概率**，用符号“$P(B|A)$”来表示.

在图 2-2 中阴影部分的 5 个点对应的事件为“事件 A 发生并且事件 B 也发生”，我们把由事件 A 和 B 同时发生所构成的事件 D，称为事件 A 与 B 的**交**(或**积**)，记做 $D=A\cap B$ (或 $D=AB$).

容易得到上面的例子中 $P(A)=\frac{12}{36}$，$P(A\cap B)=\frac{5}{36}$，而

$$P(B|A)=\frac{5}{12}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{12}{36}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

一般地，我们有条件概率公式

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)>0. \qquad ②$$

例 1 一个家庭中有两个小孩. 假定生男、生女是等可能的，已知这个家庭有一个是女孩，问这时另一个小孩是男孩的概率是多少？

解：一个家庭的两个小孩子只有 4 种可能：{两个都是男孩}，{第一个是男孩，第二个是女孩}，{第一个是女孩，第二个是男孩}，{两个都是女孩}，由题目假定可知这 4 个基本事件发生是等可能的. 根据题意，设基本事件空间为 Ω，$A=$ "其中一个是女孩"，$B=$ "其中一个是男孩". 则

$\Omega=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$，

$A=\{$(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$，

$B=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)$\}$，

$A\cap B=\{$(男，女)，(女，男)$\}$.

问题是求在事件 A 发生的情况下，事件 B 发生的概率，即求 $P(B|A)$. 由上面分析可知 $P(A)=\frac{3}{4}$，$P(A\cap B)=\frac{2}{4}$.

由公式②可得

$$P(B|A)=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

因此所求条件概率为$\frac{2}{3}$.

例 2 设某种动物由出生算起活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，现有一个 20 岁的这种动物，问它能活到 25 岁的概率是多少？

解：设 $A=$ "能活到 20 岁"，$B=$ "能活到 25 岁"，则 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，而所求概率为 $P(B|A)$，由于$B\subseteq A$，故 $A\cap B=B$，于是

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

所以这个动物能活到 25 岁的概率是 0.5.

例 3 甲、乙两地都位于长江下游，根据一百多年的气象记录，知道甲、乙两地一年中雨天占的比例分别为 20% 和 18%，两地同时下雨的比例为 12%，问：

(1) 乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是多少？

(2) 甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是多少？

解：设 $A=$ "甲地为雨天"，$B=$ "乙地为雨天"，则根据题意有

$$P(A)=0.20,\ P(B)=0.18,\ P(A\cap B)=0.12,$$

所以

(1) 乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.18}=0.67.$$

（2）甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.20}=0.60.$$

练习A

1. 把一枚硬币任意抛掷两次，事件 $A=$ “第一次出现正面”，事件 $B=$ “第二次出现正面”，求 $P(B|A)$.
2. 抛掷红、蓝两个骰子，事件 $A=$ “红骰子出现4点”，事件 $B=$ “蓝骰子出现的点数是偶数”，求 $P(A|B)$.
3. 盒子中有25个外形相同的球，其中10个白的，5个黄的，10个黑的，从盒子中任意取出一球，已知它不是黑球，试求它是黄球的概率.
4. 设某种灯管使用了500 h还能继续使用的概率是0.94，使用到700 h后还能继续使用的概率是0.87，问已经使用了500 h的灯管还能继续使用到700 h的概率是多少？

练习B

1. 假定生男孩或生女孩是等可能的．在一个有3个孩子的家庭中，已知有一个男孩，求至少有一个女孩的概率.
2. 掷两枚均匀的骰子，已知点数不同，求至少有一个是6点的概率.

2.2.2 事件的独立性

我们知道，当事件 A 的发生对事件 B 的发生有影响时，条件概率 $P(B|A)$ 和概率 $P(B)$ 一般是不相等的，但有时事件 A 的发生看上去对事件 B 的发生没有影响，比如依次抛掷两枚硬币，抛掷第一枚硬币的结果(事件 A)应该对第二枚硬币的结果(事件 B)没有影响，这时 $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 相等吗？

让我们先来看一个例子.

例1 在大小均匀的5个鸡蛋中有3个红皮蛋，2个白皮蛋，每次取一个，有放回地

取两次，求在已知第一次取到红皮蛋的条件下，第二次取到红皮蛋的概率.

解：设 A= “第一次取到红皮蛋”，B= “第二次取到红皮蛋”，则 $P(A)=\frac{3}{5}$，由于是有放回的抽取，所以$P(B)=\frac{3}{5}$.

$A\cap B$= “两次都取到红皮蛋”，由于第一次取一个鸡蛋有 5 种取法，第二次取一个鸡蛋也有 5 种取法，于是两次共有 5×5 种取法，其中都取到红皮蛋的取法有 3×3 种，因此，两次都取到红皮蛋的概率为

$$P(A\cap B)=\frac{3\times3}{5\times5}=\frac{9}{25},$$

所以

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{5}.$$

在例 1 中，事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响，即

$$P(B|A)=P(B),$$

这时，我们称两个事件 A，B **相互独立**，并把这两个事件叫做**相互独立事件**.

在实际问题中，常常通过对事件本质进行分析就可知道它们是否相互独立，而不需要进行类似上面的计算去验证. 比如，依次抛掷两枚硬币，抛掷第一枚硬币的结果对第二枚硬币的结果没有影响. 又如，将一枚骰子连续抛掷 2 次，第一次抛得的点数对第二次抛得的点数也不会有影响，所以两次抛掷事件相互独立. 在例 1 中，我们还可通过计算得到

$$P(B|\overline{A})=P(B),$$

即第一次取到白皮蛋对第二次取到红皮蛋也没有影响.

一般地，当事件 A，B 相互独立时，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

由条件概率公式和相互独立事件 A，B 的定义，可以得到

$$P(B)=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

即

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B). \quad ③$$

这就是说，两个相互独立事件都发生的概率，等于每个事件发生的概率的积.

对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果其中任一个事件发生的概率不受其他事件是否发生的影响，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

探索与研究

我们用一个例子来介绍 3 个事件相互独立所要满足的条件. 把抛掷硬币 A、B、C 得到正面的事件分别记作 A，B，C，如果有

$$P(A)=P(A|B)=P(A|C)=P(A|BC),$$
$$P(B)=P(B|C)=P(B|A)=P(B|AC),$$
$$P(C)=P(C|A)=P(C|B)=P(C|AB)$$

成立，我们就说这 3 个事件 A，B，C 相互独立.

这里，$P(A|B)$ 的含义是在硬币 B 掷出正面的条件下硬币 A 掷出正面的概率，它应该是 $\frac{1}{2}$；$P(A|BC)$ 的含义是在硬币 B、C 掷出正面的条件下硬币 A 掷出正面的概率，它也应该是 $\frac{1}{2}$；$P(A)$ 自然是 $\frac{1}{2}$……所以这些等式都是成立的. 于是我们可以说，事件 A，B，C 相互独立.

在实际问题中，对于 n 个事件，通常是考察这些事件的含义，用日常生活或生产中得到的经验来分析它们之间有没有影响，如果没有影响，或者影响可以忽略不计，就可以判断这 n 个事件是相互独立的.

如果事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，那么这 n 个事件都发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times\cdots\times P(A_n), \qquad ③'$$

并且上式中任意多个事件 A_i 换成其对立事件后等式仍成立.

例 2 甲、乙两名篮球运动员分别进行一次投篮，如果两人投中的概率都是 0.6，计算：

(1) 两人都投中的概率；

(2) 其中恰有一人投中的概率；

(3) 至少有一人投中的概率.

分析 甲、乙两人各投篮一次，甲(或乙)是否投中，对乙(或甲)投中的概率是没有影响的，也就是说，“甲投篮一次，投中”与“乙投篮一次，投中”是相互独立事件. 因此，可以求出这两个事件同时发生的概率. 同理可以分别求出，甲投中与乙未投中，甲未投中与乙投中，甲未投中与乙未投中同时发生的概率，从而可以得到所求的各个事件的概率.

解：(1) 设 A= “甲投篮一次，投中”，B= “乙投篮一次，投中”，则 $A\cap B$= “两人各投篮一次，都投中”. 由题意知，事件 A 与 B 相互独立，根据公式③所求概率为

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\times 0.6=0.36.$$

(2) 事件“两人各投篮一次，恰好有一人投中”包括两种情况：一种是甲投中、乙未投中（事件 $A\cap\overline{B}$ 发生），另一种是甲未投中、乙投中（事件 $\overline{A}\cap B$ 发生）. 根据题意，这两种情况在各投篮一次时不可能同时发生，即事件 $A\cap\overline{B}$ 与 $\overline{A}\cap B$ 互斥，并且 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B 各自相互独立，因而所求概率为

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)&=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)\\&=0.6\times(1-0.6)+(1-0.6)\times 0.6\\&=0.48.\end{aligned}$$

(3) 事件“两人各投篮一次，至少有一人投中”的对立事件“两人各投篮一次，均未投中”的概率是

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-0.6)\times(1-0.6)=0.16.$$

因此，至少有一人投中的概率为

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0.16=0.84.$$

例 3 在一段线路中并联着三个独立自动控制的常开开关，只要其中有一个开关能够闭合，线路就能正常工作．假定在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7，计算在这段时间内线路正常工作的概率．

分析 根据题意，这段时间内线路正常工作的概率，就是三个开关中至少有一个能闭合的概率，也就是三个开关都不能闭合的对立事件的概率．由于这段时间内三个开关是否能闭合相互之间没有影响，三个开关都不能闭合的概率可根据公式求出，从而可得到所求的概率．

解：分别记这段时间内开关 S_1、S_2、S_3 能够闭合为事件 A，B，C（图 2-3）．根据题意，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 相互独立．所以这段时间内至少有一个开关能够闭合，从而使线路能正常工作的概率是

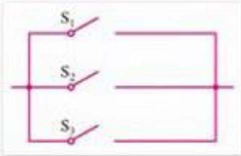


图 2-3

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\&=1-[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]\\&=1-(1-0.7)(1-0.7)(1-0.7)\\&=1-0.3\times0.3\times0.3\\&=0.973.\end{aligned}$$

练习 A

1. 对同一目标进行两次独立的射击，其命中的概率分别为 0.4 和 0.5，试求下列事件的概率：
   (1) 恰有一次命中；(2) 两次都命中．
2. 当开关 S_1 与 S_2 同时断开时电路断开．设 S_1，S_2 断开的概率分别为 0.5 和 0.7，且各开关相互独立．求电路为断开的概率．
3. 生产零件需要经过三道工序，在第一、二、三道工序中生产出废品的概率分别为 0.02，0.03，0.02，假设每道工序生产废品是独立事件．试求经过三道工序后得到的零件不是废品的概率．
4. 有一个问题，在半小时内，甲能解决它的概率是 $\frac{1}{2}$，乙能解决它的概率是 $\frac{1}{3}$，如果两人都试图独立地在半小时内解决它，计算：
   (1) 两人都未解决的概率；
   (2) 问题得到解决的概率．

练习B

1. 一个人的血型为O、A、B、AB型的概率分别为0.46，0.40，0.11，0.03，任意挑选5人，求下列事件的概率：
(1) 两人为O型，其他三人分别为另外三种血型；
(2) 三人为O型，两人为A型；
(3) 没有一人为AB型.
2. 一个工人看管三台自动机床，在一小时内第一、二、三台机床不需要照顾的概率分别为0.9，0.8，0.85，在一小时的过程中，试求：
(1) 没有一台机床需要照顾的概率；
(2) 恰有两台机床需要照顾的概率；
(3) 至少有一台机床需要照顾的概率；
(4) 至少有两台机床需要照顾的概率.

2.2.3 独立重复试验与二项分布

本小节涉及的每次试验，只考虑有两个可能的结果 A 及 $\overline{A}$，并且事件 A 发生的概率相同. 在相同的条件下，重复地做 n 次试验，各次试验的结果相互独立，那么一般就称它们为**n 次独立重复试验**.


雅各布·伯努利

例如，对一批产品进行抽样检验，每次取一件，有放回地抽取 n 次，就是一个 n 次独立重复试验. 又如，某位篮球运动员进行 n 次投篮，如果每次投篮时的条件都相同，而且每次投中的概率相同，那么这也是一个 n 次独立重复试验. 在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率问题叫做伯努利概型. 这是由于瑞士数学家雅各布·伯努利(1654—1705)对这方面的研究做了大量的工作.

本章章前语中提到，篮球运动员姚明在某一赛季罚篮命中率是80.9%. 我们把姚明在这一赛季罚篮的命中率当作他罚球得分的概率，则他每次罚球的得分服从 $p=0.809$ 的二点分布，即罚球一次得1分的可能性是0.809，得0分的可能性是0.191. 如果姚明在某场比赛中得到4次罚球机会，假设每次投篮都互不影响，那么他投中3次的可能性有多大呢？

如果用"⊙"代表投中，用"×"代表未投中，那么投球4次、投中3次有以下4种可能的情况(括号内为相应的概率)：

⊙⊙⊙×，(0.809×0.809×0.809×(1−0.809))
⊙⊙×⊙，(0.809×0.809×(1−0.809)×0.809)
⊙×⊙⊙，(0.809×(1−0.809)×0.809×0.809)
×⊙⊙⊙，((1−0.809)×0.809×0.809×0.809)

它们可以看成是从4个位置中任取3个填上“⊙”，最后的一个填上“×”，所有的取法为C_4^3种.

这就是说，在上面投篮4次、投中3次的4种情况中，每一种发生的概率都是

$$0.809^3\times(1-0.809)^{4-3}.$$

因为这4种情况彼此互斥，根据概率加法公式，投篮4次、恰好投中3次的概率为

$$\begin{aligned}&P(\text{“⊙⊙⊙×”})+P(\text{“⊙⊙×⊙”})+P(\text{“⊙×⊙⊙”})+P(\text{“×⊙⊙⊙”})\\&=C_4^3\times0.809^3\times(1-0.809)^{4-3}\\&=4\times0.809^3\times0.191=0.405.\end{aligned}$$

也就是说，姚明罚球4投3中的概率还不到0.5，这个结果与我们的感觉可能有些差距. 实际上，还有别的结果尚未计算概率. 类似地还可算出4投4中的概率为0.428，于是，可以看出姚明4次罚球投中3次以上的概率很大，为0.405+0.428，即0.833.

在上面的例子中，4次投篮是4次独立重复试验，也可以看成是进行4次独立的二点分布试验.

一般地，事件A在n次试验中发生k次，共有C_n^k种情形，由试验的独立性知A在k次试验中发生，而在其余$n-k$次试验中不发生的概率都是$p^k(1-p)^{n-k}$，所以由概率加法公式知，如果在一次试验中事件A发生的概率是p，那么在n次独立重复试验中，事件A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n).\qquad ④$$

例1 在人寿保险事业中，很重视某一年龄段的投保人的死亡率，假如每个投保人能活到65岁的概率为0.6，试问3个投保人中：

(1) 全部活到65岁的概率；
(2) 有2个活到65岁的概率；
(3) 有1个活到65岁的概率；
(4) 都活不到65岁的概率.

解：设$A=$“1个投保人能活到65岁”，则$\overline{A}=$“1个投保人活不到65岁”.

$P(A)=p=0.6$，
$P(\overline{A})=1-p=1-0.6=0.4$.

3个投保人活到65岁的人数相当于作3次独立重复试验中事件A发生的次数，由公式④有

(1) $P_3(3)=C_3^3\cdot0.6^3\cdot(1-0.6)^0=0.216$；
(2) $P_3(2)=C_3^2\cdot0.6^2\cdot(1-0.6)^1=0.432$；
(3) $P_3(1)=C_3^1\cdot0.6^1\cdot(1-0.6)^2=0.288$；
(4) $P_3(0)=C_3^0\cdot0.6^0\cdot(1-0.6)^3=0.064$.

在公式④中，若将事件 A 发生的次数设为 X，事件 A 不发生的概率为 $q=1-p$，那么在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率是

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n$. 于是得到 X 的分布列

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^n p^n q^0$

由于表中的第二行恰好是二项式展开式

$$(q+p)^n=C_n^0 p^0 q^n+C_n^1 p^1 q^{n-1}+\cdots+C_n^k p^k q^{n-k}+\cdots+C_n^n p^n q^0$$

各对应项的值，所以称这样的离散型随机变量 X 服从参数为 n，p 的**二项分布**，记作

$$X\sim B(n, p).$$

例 2 100 件产品中有 3 件不合格品，每次取一件，有放回地抽取三次，求取得不合格品件数 X 的分布列.

解：X 可能取的值为 0，1，2，3. 由于是有放回地每次取一件，连续取三次，所以这相当于作 3 次独立重复试验，一次抽取到不合格品的概率 $p=0.03$. 因此

$$P(X=0)=C_3^0\cdot 0.03^0\cdot(1-0.03)^3=0.912\ 673,$$
$$P(X=1)=C_3^1\cdot 0.03^1\cdot(1-0.03)^2=0.084\ 681,$$
$$P(X=2)=C_3^2\cdot 0.03^2\cdot(1-0.03)^1=0.002\ 619,$$
$$P(X=3)=C_3^3\cdot 0.03^3\cdot(1-0.03)^0=0.000\ 027.$$

分布列为

X	0	1	2	3
P	0.912 673	0.084 681	0.002 619	0.000 027

例 3 将一枚均匀硬币随机掷 100 次，求正好出现 50 次正面的概率.

解：掷一次硬币可以看作一次试验，每次有两个可能的结果：出现正面或不出现正面. 由于硬币是均匀的，所以出现正面的概率为 0.5，因此掷 100 次硬币可以看作 100 次独立重复试验. 如果用 X 表示出现正面的次数，则 X 服从 $n=100$，$p=0.5$ 的二项分布，那么所求概率为

$$P(X=50)=C_{100}^{50}p^{50}(1-p)^{100-50}=C_{100}^{50}\times 0.5^{50}\times 0.5^{50}\approx 0.08.$$

练习A

1. 某班有 50 个学生，假设每个学生早上到校时间相互没有影响，并且迟到的概率均为 0.05，试求这个班某天正好有 4 个学生迟到的概率.
2. 某学生在最近的 15 次数学测验中有 5 次不及格. 按照这个成绩，他在接下来的 10 次测验中(1) 全及格；(2) 全不及格；(3) 恰好 5 次及格的概率各是多少？

3. 一次测量中出现正误差和负误差的概率都是 0.5，在 3 次测量中，恰好出现 2 次正误差的概率是多少？恰好出现 2 次负误差的概率是多少？

4. 某射手射击 5 次，每次命中的概率为 0.6，求下列事件的概率：

(1) 5 次中有 3 次中靶；

(2) 5 次中至少有 3 次中靶.

5. 已知某种疗法的治愈率是 90%，在对 10 位病人采用这种疗法后，正好有 9 人被治愈的概率是多少？

练习B

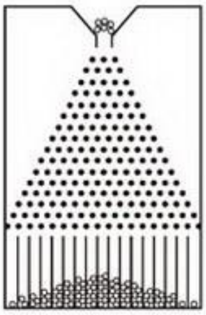
1. 假定人在一年 365 天中的任一天出生的概率是一样的，某班级有 50 名同学，其中有两个以上的同学生于元旦的概率是多少？

2. 设顾客需要 27 号鞋的概率为 0.2，求鞋店上午开门营业后，头 5 名顾客中：

(1) 有 1 人要买 27 号鞋的概率；

(2) 至少有 1 人要买 27 号鞋的概率.

探索与研究



高尔顿(钉)板是在一块竖起的木板上钉上一排排互相平行、水平间隔相等的铁钉(如右图所示)，并且每一排钉子数目都比上一排多一个，一排中各个钉子正好对准上面一排两个相邻铁钉的正中央. 从入口处放入一个直径略小于两颗钉子间隔的小球，当小球从两钉之间的间隙下落时，由于碰到下一排铁钉，它将以相等的可能性向左或向右落下，接着小球再通过两钉的间隙，又碰到下一排铁钉. 如此继续下去，小球最后落入下方条状的格子内.

有兴趣的同学可以通过以下的问题研究高尔顿板与二项分布的关系.

1. 通过高尔顿板实验课件，做 1 000 个小球的高尔顿板试验，看看小球在格子中的分布形状是怎样的？

2. 计算小球落入各个格子所有可能路线的数目. (提示：考虑它与杨辉三角的关系)

3. 计算小球落入各个格子的概率.

根据上面这些问题的结果你能得出什么结论？

习题 2-2 A

1. 若 10 件产品中包含 2 件废品，今在其中任取两件，求：

(1) 取出的两件中至少有一件是废品的概率；

(2) 已知取出的两件中有一件是废品的条件下，另一件也是废品的概率；

(3) 已知两件中有一件不是废品的条件下，另一件是废品的概率.

2. 设一个班级中有$\frac{1}{3}$的女生，$\frac{1}{5}$的三好学生，而三好学生中女生占$\frac{1}{3}$，若从此班级中任选一名代表参加夏令营活动，试问在已知没有选上女生的条件下，选的是一位三好学生的概率是多少？

3. 已知一批玉米种子的出苗率为 0.9，现每穴种两粒，问一粒出苗一粒不出苗的概率是多少？

4. 在某个学校里，所有学生都学习数学和英语，随机找出一个学生，他数学不及格的概率是 0.15，英语不及格的概率是 0.05，这两门都不及格的概率是 0.04，问：

(1) 数学不及格和英语不及格这两个事件是相互独立的吗？

(2) 已知一个学生英语不及格，他数学不及格的概率是多少？

(3) 已知一个学生数学不及格，他英语不及格的概率是多少？

5. 某棒球手一次击球得 1 分的概率平均为 0.2，在 5 次击球中他得 2 分的概率是多少？

6. 某气象站天气预报的准确率为 80%，计算(结果保留两个有效数字)：

(1) 5 次预报中恰有 4 次准确的概率；

(2) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率.

习题 2-2 B

1. 盒子里装有 16 个球，其中 6 个是玻璃球，10 个是木质球，玻璃球中有 2 个是红色的，4 个是蓝色的，木质球中有 3 个是红色的，7 个是蓝色的，现从中任取一个发现是蓝球，问该球是玻璃球的概率是多少？

2. 在某售楼中心，最近的 100 位顾客中有一位买了某房产商出售的住房．根据这一比例，试问在接下来的 50 位顾客中(1) 恰好一位；(2) 至少一位；(3) 多于一位顾客买这个房产商的房子的概率各是多少？

2.3 随机变量的数字特征

由超几何分布和二项分布等离散型随机变量的分布，我们知道离散型随机变量的分布列能够完全描述随机变量取值的概率规律. 但是，在许多实际问题中，还需要了解离散型随机变量的某种特征，例如离散型随机变量的平均取值大小和取值的集中程度. 我们把这种反映概率分布的某种特征的数值，叫做离散型随机变量的数字特征. 下面我们来介绍两个最基本的离散型随机变量的数字特征.

2.3.1 离散型随机变量的数学期望

某学校为了解交通拥堵对同学们上学迟到的影响情况，每天记录由于交通问题迟到的同学人数. 下表是在 100 天中每天由于交通原因迟到人数的情况：

人数	0	1	2	3
天数	30	30	20	20

那么这所学校每天平均有多少人由于交通原因迟到呢？通过计算可得 100 天中记录的迟到次数的总和是

$$0\times30+1\times30+2\times20+3\times20=130,$$

那么平均每天迟到人数为

$$\frac{0\times30+1\times30+2\times20+3\times20}{100}=\frac{130}{100}=1.3.$$

上式可改写成

$$\begin{aligned}&0\times\frac{30}{100}+1\times\frac{30}{100}+2\times\frac{20}{100}+3\times\frac{20}{100}\\&=0\times0.3+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.2\\&=1.3.\end{aligned}$$

这种方法是用迟到人数乘以各自的频率，然后求和得到的. 我们可把迟到人数和对应的频率列表为

迟到人数	0	1	2	3
频率	0.3	0.3	0.2	0.2

由频率与概率的关系可知，概率可以理解为频率的稳定值，所以如果这所学校在一天中由于交通原因迟到人数为 X，则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.3	0.3	0.2	0.2

那么平均每天迟到人数为

$$0\times0.3+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.2=1.3\text{（人）}.$$

一般地，设一个离散型随机变量 X 所有可能取的值是 x_1，x_2，…，x_n，这些值对应的概率是 p_1，p_2，…，p_n，则

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

叫做这个**离散型随机变量 X 的均值**或**数学期望**(简称**期望**).

离散型随机变量的数学期望刻画了这个离散型随机变量的平均取值水平.

思考：怎样理解“平均每天迟到人数为 1.3 人”这句话的意义.

由数学期望的定义可以知道，若随机变量 X 服从参数为 p 的二点分布，则

$$E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p,$$

这表明在一次二点分布试验中，离散型随机变量 X 的期望取值为 p.

例如，某篮球运动员罚篮命中率是 0.7，他平均说来一次罚篮期望得到的分数就是 0.7 分. 那么平均来看，他 10 次罚篮能够期望得到多少分呢？我们猜想他会得到 $10\times0.7=7$分，下面来证明这一猜想.

设离散型随机变量 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布，由 X 的分布列

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

和数学期望的定义式得到

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times C_n^0p^0q^n+1\times C_n^1p^1q^{n-1}+2\times C_n^2p^2q^{n-2}+\cdots+\\&\quad k\times C_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+n\times C_n^np^nq^0\\&=np(C_{n-1}^0p^0q^{n-1}+C_{n-1}^1p^1q^{n-2}+\cdots+\\&\quad C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}p^{n-1}q^0)❶\\&=np(p+q)^{n-1}=np.\end{aligned}$$

注 ❶ 这是由于 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，证明见本章附录.

所以，

$$\boxed{E(X)=np.}$$

由于上面提到的篮球运动员 10 次罚篮得到的分数 $X\sim B(10,\ 0.7)$，所以 10 次罚篮能够期望得到的分数 $E(X)=np=10\times0.7=7$（分）.

若离散型随机变量 X 服从参数为 N，M，n 的超几何分布，则

$$\boxed{E(X)=\frac{nM}{N}.}❷$$

注 ❷ 证明过程见本章附录.

例 1 根据历次比赛或训练记录，甲、乙两射手在同样的条件下进行射击，成绩的分布列如下：

射手	8 环	9 环	10 环
甲	0.3	0.1	0.6
乙	0.2	0.5	0.3

试比较甲、乙两射手射击水平的高低.

解：设甲、乙两射手射击一次所得的环数分别为 X_1，X_2，则

$$E(X_1)=8\times0.3+9\times0.1+10\times0.6=9.3,$$
$$E(X_2)=8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3=9.1.$$

这就是说射手甲射击所得环数的数学期望比射手乙射击所得环数的数学期望高，从而说明甲的平均射击水平比乙的稍高一点. 如果两人进行比赛，甲赢的可能性较大.

例 2 一个袋子里装有大小相同的 5 个白球和 5 个黑球，从中任取 4 个，求其中所含白球个数的期望.

解：根据题目知所含白球数 X 服从参数 $N=10$，$M=5$，$n=4$ 的超几何分布，则

$$E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{4\times5}{10}=2.$$

所以从中任取 4 个球平均来说会含有 2 个白球.

例 3 根据气象预报，某地区下个月有小洪水的概率为 0.25，有大洪水的概率为 0.01. 设工地上有一台大型设备，为保护设备有以下三种方案.

方案 1：运走设备，此时需花费 3 800 元.

方案 2：建一保护围墙，需花费 2 000 元. 但围墙无法防止大洪水，当大洪水来临，设备受损，损失费为60 000 元.

方案 3：不采取措施，希望不发生洪水. 此时大洪水来临损失60 000元，小洪水来临损失10 000元.

试比较哪一种方案好.

解：关键是看哪种方案的花费与期望损失和最小.

对于方案 1，花费为 3 800 元，损失为 0 元，花费与期望损失之和为 3 800 元；

对于方案 2，花费为 2 000 元，损失费的分布列为

损失费（元）	60 000	0
概率	0.01	0.99

期望损失为 $60\ 000\times0.01+0\times0.99=600$（元），所以花费与期望损失之和为 $2\ 000+600=2\ 600$（元）；

对于方案 3，花费为 0 元，损失费的分布列为

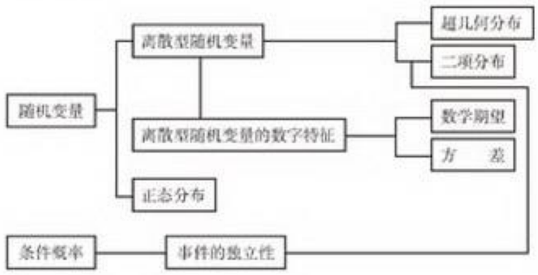
损失费（元）	60 000	10 000	0
概率	0.01	0.25	0.74

期望损失为 $60\ 000\times0.01+10\ 000\times0.25+0\times0.74=3\ 100$（元），所以花费与期望损失之和为 3 100 元.

比较三种方案，我们发现第二种方案的花费与期望损失之和最小，故方案 2 较好.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 什么叫随机变量？你能举一个生活中的离散型随机变量的例子吗？

2. 什么是条件概率？如何计算 $P(B|A)$.

3. 什么是相互独立的事件？两个相互独立事件同时发生的概率与每个事件概率之间有什么关系？

4. 设在一次试验中，某事件发生的概率是 p，如何计算在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率？

5. 随机变量的数学期望和方差的直观意义是什么？总结一下常见的几个分布的期望和方差的计算公式.

6. 什么是正态分布和正态分布的 3σ 原则？

Ⅲ 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：

(1) 对任意两个事件 A，B 都有 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$；

(2) 如果事件 A 发生，事件 B 一定发生，则 $P(A\cap B)=P(B)$；

(3) 已知在一次试验中 $P(A)=0.1$，那么在 3 次独立重复试验中 A 恰好发生 2 次的概率是 $C_3^2\cdot(0.1)^{3-2}\cdot(0.9)^2=3\times0.1\times0.81=0.243$；

(4) 抛掷一枚硬币 100 次，则正面向上出现的次数超过 40 次.

2. 填空：

(1) 抛掷 3 枚硬币，至少出现一个正面的概率等于______；

(2) 已知在一次试验中，$P(A)=0.6$，那么在 3 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生一次的概率是______；

(3) 甲、乙两人在相同的条件下进行投篮，甲投中的概率是 0.8，乙投中的概率是 0.9，两人各投篮一次，恰有一人投中的概率是______；

(4) 某篮球运动员投篮一次投中的概率是 0.8，他投篮 4 次恰好投中 3 次的概率等于______.

3. 盒中有 5 个白球和 4 个黑球，从中任意取出 3 个，设 X 表示其中黑球的个数，试求 X 的分布列.

4. 生产一种零件，甲车间的合格率是 96%，乙车间的合格率是 97%，从它们生产的零件中各抽取一件，都抽到合格品的概率是多少？

5. 有发芽率分别是 0.9 和 0.7 的两批种子，在两批种子中各取一粒，求下列事件发生的概率：

(1) 两粒种子都发芽；

(2) 恰有一粒种子发芽；

(3) 至少有一粒种子发芽.

6. 某篮球运动员进行 5 次定点投篮，已知每次投中的概率均为 0.4. 求 5 次投篮恰有 2 次投中的概率.

7. 某大型国有企业为 10 000 名员工定制工作服，设员工的身高（单位：cm）服从正态分布 $N(172, 5^2)$. 试估计适宜身高在 167～177 cm 范围内员工穿的服装大约要定制多少套？

IV 自测与评估

1. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\frac{m}{k}$ $(k=1, 2, 3, 4)$：

(1) 确定常数 m 的值；

(2) 写出 X 的分布列；

(3) 计算 $P(1<X<4)$.

2. 某种大炮击中目标的概率是 0.3，以多少门这样的大炮同时射击一次，就可使击中目标的概率超过 95%.

3. 甲、乙两运动员进行乒乓球单打比赛，根据以往比赛的胜负情况知道，每一局甲胜的

概率0.6，乙胜的概率为0.4．如果比赛可采用“三局两胜”或“五局三胜”两种制度，求在哪种比赛制度下，甲胜的概率较大？

4. 有10道判断对错的测验题，一个人随意猜答，他答对不少于6道题的概率是多少？

5. 甲、乙两人进行投篮比赛，每人投3次，投中的次数分别记作 X，Y．它们的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	0.1	0.6	0.2	0.1

Y	0	1	2	3
P	0.3	0.3	0.2	0.2

试比较甲、乙两人哪位投篮较稳定？

6. 一批白炽灯泡的光通量服从 $N(209,\ 6.5^2)$，如果有这样一批灯泡10 000个，试估计光通量在下列范围内的灯泡的个数：

(1) $209-2\times6.5\sim209+2\times6.5$；

(2) $209-3\times6.5\sim209+3\times6.5$．

数学文化 阅读与欣赏

关于“玛丽莲问题”的争论

“玛丽莲问题”是某电视台娱乐节目“决策”中提出的一系列问题．其中最著名的是“Behind Monty Hall's Doors”．问题如下：台上有三个关闭的门，一个后边有汽车，其余两个后边是山羊．主持人让参加者任意选择其中一个门，然后她打开其余两个门中的一个，参加者看到的是山羊．这时，她让参加者可以重选，也就是说参加者可以换选另一个剩下的门．那么，参加者应该换还是不换？玛丽莲的答案是应该换，但是很多读者不同意．玛丽莲在下一期专栏给出一个表格说明她的道理，但反对声更多更大了．在几千封读者来信中，反对者达九成．其中有全国健康机构的统计学家、国防情报中心的副主任，甚至著名的美籍匈牙利数学家保罗·埃尔德希(Paul Erdos)也是反对者之一．

那么到底应该换还是不换呢？我们先来考虑3个人通过抽签分一张演唱会票这一问题．3个人按排定的顺序从分别写有“有票”“无票”“无票”的3个纸团中各抽一个来决定谁能得到演唱会票，每个人得票的概率是多少呢？

对第一个人来说，从3个纸团中任取一个，得票的概率为$\frac{1}{3}$．为了求出第二个人得票的概率，我们来分析一下前两个人抽取纸团的情况．从3个纸团中先后抽出2个，可以看成从3个元素中取出2个进行排列，它的种数是A_3^2，而其中第二个人得票的情况有A_2^1种，因此第一个人未得票，而第二个人得票的概率为

$$\frac{A_2^1}{A_3^2}=\frac{1}{3}.$$

通过类似的分析，可知第三个人得票的概率为

$$\frac{A_2^2}{A_3^3}=\frac{1}{3}.$$

由此看出，不管抽取纸团的次序如何，每个人得到演唱会票的概率都是$\frac{1}{3}$．

“玛丽莲问题”也可以看作是一个分票问题，如果用写有“汽车”的纸团代表汽车，写有“山羊”的纸团代表山羊．三次决定可以看作三个人各抽取一个纸团，第一个决定是参加者作出的，相当于第一个人抽取一个纸团，得到汽车的概率是$\frac{1}{3}$，第二个决定是主持人作出的，如果主持人是随机作出的决定，那么他得到汽车的概率也是$\frac{1}{3}$，第三个决定仍由参加者作出，如果他换选剩下的另一个门，就相当于第三个人抽取纸团，由上面分票的结果知得到汽车的概率仍是$\frac{1}{3}$，这样换与不换得到汽车的概率相等．

但是，由前面知道主持人的决定并不是随机的，她知道哪一个门后面有汽车，所以主持人打开的门后面总是山羊．仍从分票来考虑，这相当于第一个人抽取纸团后，第二个人抽取的总是写有“山羊”的纸团．即第一个人获得汽车的概率是$\frac{1}{3}$，第二个人获得汽车的概率是0，第三个人获得汽车的概率为$1-\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$，所以换选后得到汽车的概率为$\frac{2}{3}$，参加者应该改变自己的选择．