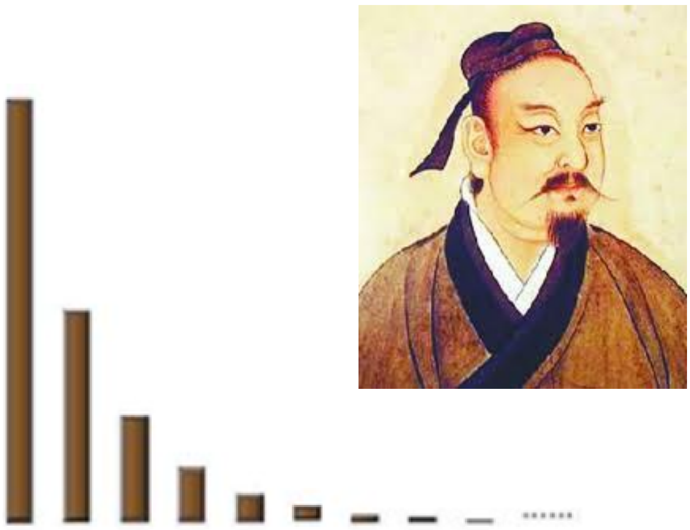
2019/2020 學年教學設計獎勵計劃

等比數列



參選類型:教案

參賽編號: C022

科目: 數學

組別:高中教育

實施年級:高一

簡介

中國數學文化歷史悠久，數列問題就是我國古代數學家們非常感興趣的問題。我國對數列的研究處於世界的領先地位，例如古老的《易經》一書中寫道“是故《易》有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦”，實際上，這種分割，已經寓有數學中等比數列的思想。而出自《莊子·天下》一句名言：一尺之棰，日取其半，萬世不竭，則更加形象地說明等比數列可以是一個無窮數列。之後的東漢(25 年-220)年初出現了數學名著《九章算術》，南北朝時，於466 年-468 年中，張嶽建寫了一部數學著作《張嶽建算經》，都出現了不少研究數列問題的題目，說明我國對數列的研究已經形成了系統的理論。而同類結果一直到西元七世紀才在印度梵藏的著作中出現。這是中國數學史上非常值得濃墨重彩書寫的一筆。我們這一課題，正正好就在再展現我國古代數學文化瑰寶的同時，和同學們一起學習探討數列中等比數列的種種神奇之處，又好像穿越時空，再體會古人今人對數列的那份摯愛，去感受那種濃濃的愛國情懷。

然而，在同學們學習等比數列的過程中，困難不少，常見到的情況是定義記不牢，公式用不熟，基礎勉強掌握，能力提高的確困難，特別是當等差等比數列綜合應用的時候，更加不知所措。故概括之，等比數列的特點是“入門易，深入難”，這裡涉及到了幾個難關：定義關，性質關，運算關，推理關，綜合關，可謂要“過五關，斬六將”，處理不好，則會“關關是淚”啊。因此在教學當中，要特別注意讓學生體會知識的發生，發展，變化，應用的過程，注重性質和公式的探索與推導，讓學生有一個理解過程，建立一個堅實的理解基礎，“授之以魚不如授之以漁”，讓其可以在學習推導的過程之中，體會性質和公式的由來，知道性質和公式之間的內在聯繫，培養嚴密的邏輯思維和推理思維，這樣才能在應用中得心應手。同時，在其中滲透愛國主義的思想，讓學生在學習知識的過程中，不知不覺中得到薰陶。

當然，教育應該實現“因材施教”的思想，要因應學生的具體情況，同時也要符合教育教學的規律，才能最大程度地使學生融入到課堂學習中去，產生最好地教學效果。針對本校情況，我們選取了《人教版全日制普通高級中學教科書數學第一冊(上)》教材，該教材的編寫簡明扼要，編排合理，淺深合度，符合學生的實際情況。另外結合本澳四校聯考的要求，還需補充一部分性質，所以我們的設計方案是：第一課：定義和基本公式；第二課：補充基本性質；第三課：公式及性質應用；第四課：求和公式；第五課：補充求和性質；第六課：綜合應用。希望通過課堂上的引導，探求，推理，讓學生慢慢進入等比數列的世界，理解掌握公式和性質的發生發展過程，學會應用公式和性質去解題，培養探索能力，推理思維，並體會古代數學家們的數列情懷。

目次

教學進度表

課節	課題	課題內容	授課時間	課時
第一課節	等比數列	1.等比數列的概念 2.等比數列的通項公式 3.等比中項	2019 年 12 月 26 日	1
第二課節	等比數列的性質	1.等比數列的性質 2.等比數列的公式推廣	2019 年 12 月 27 日	1
第三課節	等比數列的應用	等比數列的應用	2019 年 12 月 30 日	1
第四課節	等比數列求和	1.等比數列求和公式 2.等比數列求和公式運用	2019 年 12 月 31 日	1
第五課節	等比數列求和性質	等比數列求和性質運用	2020 年 1 月 2 日	1
第六課節	數列的綜合應用	數列的綜合應用	2020 年 1 月 3 日	1
	數列的書面報告	在第二段考試後，以分組設計報告，對所學過的知識進行梳理、歸納、總結，並鼓勵學生多尋找一些與數列相關的知識內容，豐富他們對數學知識的理解與運用。		

課題	基本學力要求	
	學力編號	相對應之文字表述
等比數列 等比數列的性質 等比數列的應用	A-6-7	理解等比數列的概念；能夠判斷數列是否等比數列；
	A-6-8	掌握等比數列的通項公式及瞭解其推導方法；經歷探索等比數列性質的過程；
	E-1-1	積極參與觀察、操作、歸納、猜想、驗證等數學活動，能表達、交流自己的思維過程；
等比數列求和 等比數列求和性質 數列的綜合應用	E-1-2	面對實際情境，能發現數學問題，並用數學的方式進行分析和解決問題；
	A-6-9	掌握等比數列前 n 項和公式及瞭解其推導方法；能熟練運用通項公式及前 n 項和公式；
	A-6-10	能夠解決與等比數列有關的綜合問題；能建立等比數列模型解決實際問題。
	E-1-4	通過建立數學模型解決問題，體會數學在生活中的應用，提高數學學習的興趣；
數列的總結報告	E-1-3	能對所學知識進行分類與總結，建立數學知識之間的聯繫；

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1.理解，掌握等比數列的定義，能判斷是否等比數列；

2.理解，掌握等比數列的基本公式；

3.學會基本公式推導，培養探索能力，培養推理思維；

4.理解，掌握等比數列的補充基本性質；

5.能熟練運用基本公式及基本性質解決問題；

6.理解，掌握等比數列的求和公式，能熟練運用求和公式解決求和問題；

7.學會求和公式推導，培養探索能力，培養推理思維

8.理解，掌握等比數列的補充求和性質；

9.學會等差和等比數列的綜合應用，能結合兩種數列的特點列式解題。

二、主要內容

1.學習等比數列的定義，基本公式及補充基本性質，學會推導，並且能夠熟練運用基本公式進行解題，並懂得基本性質的初步運用；

2.學習等比數列求和公式及補充求和性質，學會推導，並且能熟練運用求和公式進行求和，並懂得求和性質的初步運用；

3.要求學生做等比數列公式報告表，歸納總結梳理公式及性質，給出相應例題及解法，作為學習等比數列之總結報告。

4.通過引入部分，例題，作業等等內容，加入了較多的家國情懷元素，在述說我國自古以來在數列領域獲得了巨大成就的同時，與學生們分享這些喜悅。

三、設計創意和特色

第一節課

1. 在引入部分加入我國古代著名的哲學家莊子的名言，述說中國古代在數列上的成就，引起學生的關注和興趣。
2. 在引入部分再通過折紙小遊戲，讓學生有想像空間，去設想等比數列是如何“生成”的，從而使學生對等比數列的特性有較為深刻的理解。
3. 採取探索，分析，引導，證明，類比的方式，引導學生從感性到理性，從而對等比數列的定義式，通項式，等比中項有較深的印象，避免了認識上的“突兀”。
4. 針對定義式，通項式，等比中項式設計例題與練習，通過先講後練，加強動手能力，理論聯繫實際，讓學生將知識“記入心中”。

第二節課

1. 連結上一節的內容，本節是基本性質的學習。引入部分利用我國特色的退耕還林政策實施的例子為入口，再次點燃學生的愛國熱情。
2. 運用歸納法進行推理，使學生能“順理成章”掌握基本的性質，起到事半功倍的作業。
3. 一題多解，發散思維，引導學生多角度解決問題。

第三節課

1. 在基本公式和基本性質學習之後，本節開始學習它們的應用。本課從大數學家愛因斯坦的複利率引入，更增添同學們的學習興趣。
2. 例 1，例 2 從實際出發，說明生活與等比數列的聯繫，更突出了等比數列在實際問題應用中解題的技巧性。
3. 精心設計練習和作業，再次加強生活中等比數列兩種類型的解題應用。

第四節課

1. 從這一節課起，進入到等比數列的另一類型：求和問題。本課聯繫到中國有

二千多年歷史文化的象棋做例子引入，然後將象棋與等比數列聯繫一起，令人耳目一新，目的是激發學生的民族自豪感。

2. 運用類比思維，使學生較為輕鬆地從舊的思維跳到新的思維當中。
3. 堅持公式證明的推導過程，加強公式應用的嚴謹性。
4. 練習中設計加入明朝著名數學家吳敬《九章算術》中的一例，詩文並茂，隱入等比數列內容，古代數列文化又見一斑。

第五節課

1. 承接上節，進入有關等比數列求和公式的性質問題。本節從複習求和公式引入，由此延伸至前 n 項和的性質，順理成章。
2. 設置問題，有序引導，合作探究，層層深入，發現規律，使學生在思維的海洋裡翱翔，在探究中逐步發現求和的兩個性質。

第六節課

1. 本課是本專題的最後一節，屬於等比數列的綜合運用。引入部分從總結入手，引導學生利用表格去歸納總結等差等比的所有公式性質，對比記憶，較易深入理解掌握相關知識，形成系統。
2. 設置問題，將等差等比數列融入其中，引導學生掌握分組求和的解法，瞭解綜合運用的一些規律。
3. 再次在例題，作業中設計引入東漢《周髀算經》和明代《九章算術》中的數列題，前後呼應，令學生又一次體會數列情懷。

四、教學重點

1. 等比數列的定義，等比數列的基本公式的理解與運用；
2. 等比數列的基本性質的掌握與應用；
3. 會用不同方法解決生活實際中的數學問題；
4. 學會數列前 n 項和公式的推導，並能解決一些簡單問題；

5. 理解掌握等比數列前 n 項和的性質；

6. 數列問題的綜合運用，會用適當方法解決一些等差等比數列的綜合問題。

五、教學難點

1. 等比數列通項公式的推導；

2. 結合性質，如何找出合適方法解決等比數列的問題；

3. 結合公式和性質，會用適當方法解決實際生活中的問題；

4. 靈活運用等比數列求和公式解決有關問題；

5. 等比數列前 n 項和公式及性質的靈活運用；

6. 讓學生理解並學會運用等比數列的有關公式與性質，能將實際問題轉化成數學問題，並加以解決。

六、教學用具

電腦及投影儀，方形紙 40 張，黑板

七、教學課時

本專題共設計安排 6 個課時，每課時 40 分鐘。

貳、教案

課題	第 1 課節　等比數列	年級	高一級
教學目標	1.從生活例子與實際操作中了解等比數列及其意義；理解公比的概念，能夠判斷數列是等比數列；理解等比中項的概念； 2.掌握等比數列的通項公式運用及其推導過程； 3.經歷等比數列的通項公式的探索，研究培養學生主動探索，勇於發現的求知精神。		
學情分析	1.本節是等比數列的第一節課，為了提升學生的學習興趣，設計了莊子的數學思想，以及動手操作，讓學生對這節課更投入。 2.普遍學生在推導公式時存在困惑，透過回顧等差數列的推導回顧，希望慢慢加強學生在類比、分析問題的能力。 3.有些學生上課時較被動，因此設計了多個問題與探討，希望能增進師生之間的互動交流，多鼓勵學生發表意見。		
教學重點	等比數列的通項公式的理解與運用。		
教學難點	等比數列通項公式的推導。		

〔教學過程〕

一、創設情境，發現規律

莊子是戰國中期道家學派代表人物，他是著名的思想家、哲學家、文學家，其著作《莊子 天下篇》其中一句“一尺之棰，日取其半，萬世不竭”亦包含了數學的思想。意思為：一尺長的木棒，每日取其一半，永遠也取不完．如果將“一尺之棰”視為 1 份，那麼每日剩下的部分依次為：

第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	…	第 n 天
1	$\frac{1}{2}$			…	

(學生很快完成了)

二、動手操作，發現新知

將一張正方形紙連續對折 5 次(可以更多)，試列出每次對折後紙的層數

對折次數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
層數					

(學生用事前準備的正方形紙動手操作折紙，一邊折紙，一邊完成表格)

問題 1：你能發現對折次數與層數的關係嗎?（能，後一次是前一次的 2 倍）

問題 2：當折到第 28 次的時候，層數為多少？(2^{28})

問題 3：若其中紙片的厚度為 0.04 毫米，總厚度為多少?

（當折到第 28 次的時候，總厚度為.

$2^{28}\times 0.04\times 10^{-3}$米=10737.41824米）

比珠穆朗瑪峰還要高!!

探討 1:這個數列每一次與前一次的變化有何固定關係?

(每一次與它前一次的比都等於一個常數 2。)

探討 2:你能找出它的遞推公式嗎?($a_n=2a_{n-1}$)

定義:如果一個數列的首項不為零，且從第 2 項開始，每一項與它前一項的比都等於同一常數，那麼這個數列叫做**等比數列**。 這個常數叫做這個等比數列的**公比**，一般用字母 q 來表示 $(q\neq 0)$ 。

問題：你能用數學式子表示等比數列的定義嗎?(能，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$)

例 1 判斷下列數列是否為等比數列？若是，找出公比，不是請說明理由。

(1) 1， 4 ，16 ， 32， 64 。
(2) 0 ， 2 ， 4 ， 6 ， 8 。
(3) 1， −10 ，100 ， −1000 ，10000 。
(4) a ， a ， a ， a ， a 。

(1)是, $q=4$ (2)不是，首項為 0 (3)是, $q=-10$

(4)若 $a\neq 0$ 是, $q=1$。若 $a=0$, 首項與 q 均為 0,不是等比數列

三、類比問題，探索公式：(先回顧等差的證明方法，來找出等比數列的公式推導)

回顧等差數列證明方法

方法一：**疊加法**	方法二：**不完全歸納法**
$\{a_n\}$是等差數列，公差是 d，由定義 $a_2-a_1=d$ $a_3-a_2=d$ $a_4-a_3=d$ … … $a_n-a_{n-1}=d$ 若將上述 $n-1$ 個等式<u>相加</u>，便可得： $a_n-a_1=(n-1)d$ 即 $a_n=a_1+(n-1)d$ （ $n\geq 2$ ） 當 $n=1$ 時，左邊 $=a_1$，右邊 $=a_1$，所以等式成立 ∴等差數列**通項公式**為： $a_n=a_1+(n-1)d$ ·	$\{a_n\}$是等差數列，公差是 d，則有 $a_2=a_1+d$ $a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$ $a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$ …… 依此類推，得到等差數列的**通項公式**： $a_n=a_1+(n-1)d$ （ $n\geq 2$ ）

一起推導等比數列的通項公式

方法一：疊乘法	方法二：不完全歸納法
由等比數列的定義，前 $(n-1)$ 个等式有： $\frac{a_2}{a_1}=q$； $\frac{a_3}{a_2}=q,$； … … … … … … … $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ 若將上述 $n-1$ 個等式<u>相乘</u>，便可得： $\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=q^{n-1}$，即： $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$（$n\geq 2$） 當 $n=1$ 時，左邊 $=a_1$，右邊 $=a_1$，所以等式成立， ∴等比數列**通項公式**為： $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$. ·	設等比數列 $\{a_n\}$ 的公比為 q，則 $a_2=a_1\cdot q,$ $a_3=a_2\cdot q=(a_1\cdot q)\cdot q=a_1\cdot q^2,$ $a_4=a_3\cdot q=(a_1\cdot q^2)\cdot q=a_1\cdot q^3,$ …… 依此類推，得到等比數列的**通項公式**： $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.（$n\geq 2$）

注意：若已知 a_1 和 q，則利用通項公式，可以直接計算出數列的任意一項。

例 2　求等比數列 $-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$ 的第 10 項以及第 n 項。

分析: 問題 1：題目給出那些條件?

（已知 $a_1=-1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=-\frac{1}{4}$，$a_4=\frac{1}{8}$，$q=-\frac{1}{2}$）

問題 2：題目求什麼？（求 a_{10} 與 a_n）

問題 3：會選用甚麼方法計算?（利用通項公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$）

(a_{10} 和 a_n 學生代入通項公式容易得出)

解: $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = (-1) \cdot (-\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{512}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

五、生活經歷，發現中項

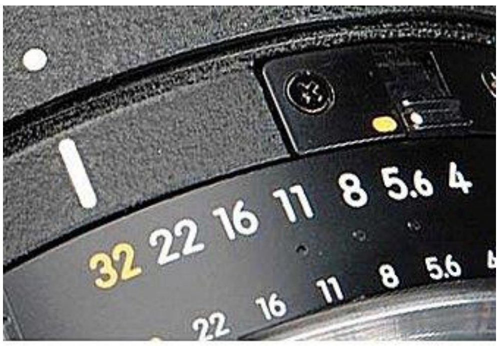
大家觀察: $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$ 這個數列有甚麼特點?(等比數列)

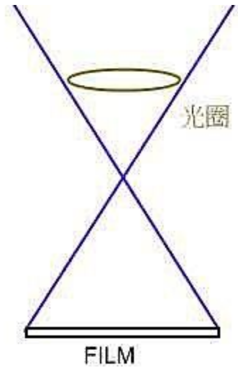
小志的父親去中國的西部旅行，用相機拍了很多祖國的美麗的風景照，並與小志分享，小志充分感受到祖國的壯麗風景，並立志學好攝影，以後去探索祖國美好的風光。小志有一天拿起相機練習時，偶然發現光圈的排列是:

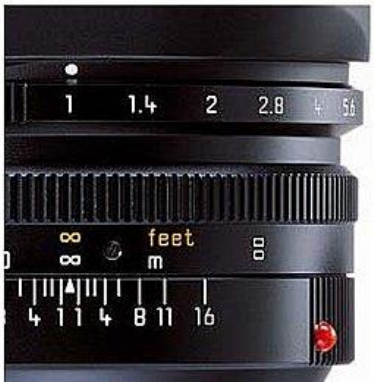
1, 1.4, 2 ,2.8 ,4 ,5.6,8 ,11, 16, 22 ,32

探討 1 :你們知道這些數字之間有甚麼關係呢?(等比數列)

探討 2 :如何由 1 與 2 中,求出中項 1.4 出來? (學生們努力嘗試)







知識科普(自行閱讀):相機的光圈值構成一個等比數列，這是因為光圈值與其直徑

成反比，而光圈每轉動一格，其透光面積會變為 2(或 0. 5 倍)，所以光圈值會變為 $\sqrt{2}$,(或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$) 倍。

經過總結後可得出

1.定義法: 利用$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,得$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$,可知$a_2{}^2=a_1\cdot a_3$,從而$a_2=\pm\sqrt{a_1\cdot a_3}=\pm\sqrt{2}$

2.通項公式法:利用 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,代入$a_3=a_1\cdot q^2$,求出$q=\pm\sqrt{2}$,從而$a_2=\pm\sqrt{2}$

明顯，使用$a_2=\pm\sqrt{a_1\cdot a_3}$會較直接得出中項的數值。

等比中項：如果在a與b中間插入一個數G，使a，G，b成等比數列，那麼G叫做a與b的等比中項。即$G=\pm\sqrt{ab}$或$G^2=ab$

反之，如果a,b同號，G等於$\sqrt{ab}$或$-\sqrt{ab}$，即$G^2=ab$，那麼G叫做a與b的等比中項。

例 3 求 45 與 80 的等比中項

解:應用等比中項公式，可得

$$G=\pm\sqrt{45\cdot 80}=\pm 3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}=\pm 60$$

七、即時練習，知識鞏固

1. 求等比數列的第4，5項及通項公式: 5,-15,45,⋯;

   $a_4=-135, a_5=405, a_n=5\cdot(-3)^{n-1}$

2. 已知b是a與c的等比中項，且$abc=27$,求b。

   $b=3$

八、課堂小結：

（1）等比數列的定義。$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

（2）等比數列公式的推導方法。疊乘法，不完全歸納法。

（3）等比數列的通項公式: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

（4）等比中項公式: $\underline{G=\pm\sqrt{ab}}$

九、作業佈置

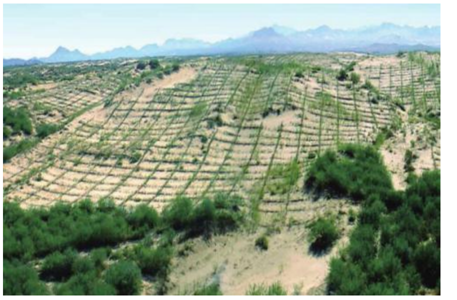
1. 一個等比數列的第9項是$\frac{4}{9}$，公比是$-\frac{1}{3}$，求它的第1項.
2. 求$7+3\sqrt{5}$與$7-3\sqrt{5}$的等比中項.
3. 已知$a_n=\frac{1}{4}\cdot 10^n$，求數列的首項和公比.
4. 某種細菌的培養過程中，每半小時分裂一次(一次分裂為兩個)，經過4小時，這種細菌由1個可繁殖成多少個?

課題	第 2 課節　等比數列性質	年級	高一級
教學目標	1. 理解等比數列通項公式的性質及應用。 2. 理解等比數列的中項的性質及應用。 3. 通過對等比數列的研究，逐步培養學生觀察、類比、歸納、猜想等思維能力並進一步培養學生善於思考，解決問題的能力。		
學情分析	1.學生已經學過等比數列的基本公式，並能作基本運用。 2.學生對數字之間的關係比較容易理解，利用由實際到一般，希望學生能夠理解性質的意義。 3. 從之前學習等差數列的經歷，學生對性質關係的運用較薄弱，需要多一些練習與實例才能掌握。		
教學重點	等比數列的性質及其運用		
教學難點	找出合適的方法去解決等比數列的問題		

〔**教學過程**〕

一、創設情境，探索關係

《退耕還林》



我國西部地區的環境問題正引起越來越廣泛的關注，其中一個重要的舉措即是退耕還林。王師傅是當地一名熱心群眾，退休後，他決心用一個月的時間做下面的事：第一天，他自己種一棵樹；第二天，他發動兩個人和他一起每人種一棵樹；第三天，這三個人每人再發動兩個人加入他們的行列，每人種一棵樹。如此繼續。

問題 1：填上以下表格，並說出每天種樹數量之間的關係?

第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	…	第 n 天
1	1+2=3	3+6=9			…	

(學生很快就找到答案及其關係，了解這是一個等比數列)

問題 2：能否只由第 2 天的數據，直接求出第 4 天，以及第 n 天的種樹數量?

(透過學生的探索與總結，$a_4=a_2\cdot q^2, a_5=a_2\cdot q^3, a_n=a_2\cdot q^{n-2}$ 再代入數值)

二、公式歸納(等比數列通項公式)

若 a_m 與 a_n 為等比數列 $\{a_n\}$ 中的兩項，公比為 q ，則有 $a_n = a_m \cdot q^{n-m}\ (m \le n)$

學生填寫表格:

等比數列通項公式	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
等比數列通項公式性質	$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

例 1 在等比數列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = -1$ ， $a_8 = -\frac{1}{8}$ ，求 a_1 ， a_{11} 。

分析:

問題 1：有多少種方法可以求出 a_1 ， a_{11} 呢? (2 種，通項公式和通項公式性質)

問題 2：利用通項公式時，要列多少條式子?（2 條）

問題 3:用通項公式性質時，怎樣應用公式?（直接應用 $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$ ）

要求每組都嘗試用 2 種方法去求出答案，然後一起總結。

方法一:(聯立兩次通項公式)	方法二:(等比數列通項公式應用)
解: 由 $a_5 = -1, a_8 = -\frac{1}{8}$ 有 $-1 = a_1 \cdot q^4$ （1） $-\frac{1}{8} = a_1 \cdot q^7$ （2） （2）式除以（1）式,得 $\frac{1}{8} = q^3$ 由此得 $q = \frac{1}{2}$ 將 $q = \frac{1}{2}$ 代人（1），得 $a_1 = -2^4$ 所以，數列的通項公式為 $a_n = -2^4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ 故 $a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = -2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$	**解:** 由 $a_5 = -1, a_8 = -\frac{1}{8}$ 有 $a_8 = a_5 \cdot q^3 \Rightarrow -\frac{1}{8} = -1 \cdot q^3$ $q = \frac{1}{2}$ $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow -1 = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^4$ $a_1 = -2^4$ $a_{11} = a_8 \cdot q^3 \Rightarrow a_{11} = -\frac{1}{8} \cdot (\frac{1}{2})^3$ $a_{11} = -\frac{1}{64}$

注意:知道等比數列的某兩項，可求出等比數列的任一項。

三、題後思考，更進一步:

由上題關係式 $a_8 = a_5 \cdot q^3$ ， $a_{11} = a_8 \cdot q^3$ ，

問題 1：你可知道 a_5 ， a_8 與 a_{11} 三者之間的關係是甚麼嗎?

(學生後快觀察到它們之間公比相同， a_8 是 a_5與a_{11} 的等比中項)

問題 2：猜想 a_8 與 $a_5 \cdot a_{11}$ 、 $a_6 \cdot a_{10}$ 、 $a_7 \cdot a_9$ 之間的關係?為甚麼?

($a_8{}^2 = a_5 \cdot a_{11} = a_6 \cdot a_{10} = a_7 \cdot a_9$ ， a_8 是 a_5與a_{11} 、 a_6與a_{10} 、 a_7與a_9 的等比中項)

一起總結: (1) 若 $m+n=p+q$ ，則 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ (m,n,p,q 均為正整數)

(2) 若 $m+n=2p$ ，則 $a_m \cdot a_n = a_p{}^2$ (m,n,p 均為正整數)

四、等比中項知識歸納(學生填寫表格)

等比中項	$G = \pm\sqrt{ab}$ 或 $G^2 = ab$
等比數列性質 1	若 $m+n=p+q$ ，則 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ (m,n,p,q 均為正整數)
等比數列性質 2	若 $m+n=2p$ ，則 $a_m \cdot a_n = a_p{}^2$ (m,n,p 均為正整數)

例 2 在正項的等比數列 $\{a_n\}$ 中， a_1 與 a_9 是方程 $x^2-6x+8=0$ 的兩根，求

$a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$

分析:問題 1：知道 a_1 與 a_9 的值後與 $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ 有甚麼關係?($a_1 \cdot a_9 = a_4 \cdot a_6 = a_5{}^2$)

問題 2：怎樣求出 $a_1 \cdot a_9$ 的值呢?(解一元二次方程或韋達定理)

(學生解題的兩種方法)

解: 方法 1 : 解一元二次方程	解: 方法 2 : 利用韋達定理,
由 $x^2-6x+8=0$ 可得 $x_1=2, x_2=4$ $a_1=2, a_9=4$ 或 $a_1=4, a_9=2$ $\because a_5>0$ $\therefore a_5=\sqrt{a_1\cdot a_9}=2\sqrt{2}$ $\because a_4\cdot a_6=a_1\cdot a_9=8$ $\therefore a_4\cdot a_5\cdot a_6=16\sqrt{2}$	可知 $a_1\cdot a_9=8$ $\because a_4\cdot a_6={a_5}^2=a_1\cdot a_9=8$, 而且各項皆為正數 $\therefore a_4\cdot a_5\cdot a_6=8\times\sqrt{8}=16\sqrt{2}$

五、練習鞏固

1. 在等比數列$\{a_n\}$中， $a_2=18$ ， $a_4=8$ ，則 $a_1=\pm 27$ ， $q=\pm\dfrac{2}{3}$ 。

2. 在等比數列$\{a_n\}$中，已知: $a_1=5$ ， $a_9\cdot a_{10}=100$ ，則 $a_{18}=20$ 。

3. 數列$\{a_n\}$， a_1和a_6為方程$3x^2-5x+2=0$的兩個根，若$\{a_n\}$是等差數列，則

$a_2+a_5=\dfrac{5}{3}$;若$\{a_n\}$是等比數列，則 $a_3\cdot a_4=\dfrac{2}{3}$

(充分讓學生思考，展示將問題與所學的性質聯繫到一起的思維過程，題 3 給學生聯想等差數列與等比數列性質的類比關係)

六、課堂小結:

1. 等比數列通項公式性質: $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$

2. 等比數列性質1: 若 $m+n=p+q$ ，則 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ (m,n,p,q 均為正整數)

3. 等比數列性質2: 若 $m+n=2p$ ，則 $a_m\cdot a_n={a_p}^2$ (m,n,p 均為正整數)

七、作業佈置

1. 在等比數列$\{a_n\}$中，第二項是 10，第三項是 20，求它的第一項與第四項。

2. 在等比數列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_5=8$，求(1) $a_2\cdot a_3\cdot a_4=$______，

(2) $a_9=$________。

3. 在 160 與 5 中間插入 4 個數，使它們同這兩個數成等比數列，求這四個數。

4. 內地西部某林場計劃第一年做林 15 公頃，以後每年比前一年多造林 20%，第 5 年造林多少公頃?(答案保留至個位)

課題	第 3 課節　等比數列的應用	年級	高一級
教學目標	1. 理解等比數列在實際問題中的應用。 2. 透過生活中的實例，解決等比數列的相關計算，培養學生的計算技能，使用合適的方法去解決問題。 3. 通過對等比數列的研究，逐步培養學生觀察、類比、歸納、猜想等思維能力並進一步培養學生善於思考，解決問題的能力。		
學情分析	1.從功課可知道，學生在處理應用題時，有些學生往往不知怎樣運用公式，功課講評能讓學生加強理解。 2.在實際運用時，把一條應用題的要點分拆成多個要素，讓學生把每個要素理解了，學生便會慢慢地對應用題的處理有信心。		
教學重點	會用不同方法解決實際的數學問題		
教學難點	找出合適的方法去解決實際的問題		

〔教學過程〕

一、課前覆習

重溫等比數列已學過的公式(提問)

數列	等比數列
定義	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$
通項公式與性質	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}, a_n=a_m\cdot q^{n-m}$
等比中項	$G=\pm\sqrt{ab},\text{或}G^2=ab$
等比數列性質 1	若 $m+n=p+q$，則 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
等比數列性質 2	若 $m+n=2p$，則 $a_m\cdot a_n={a_p}^2$

二、評講昨天功課問題

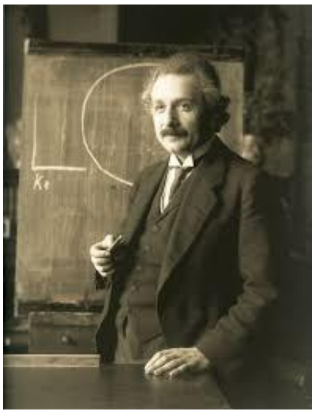
內地西部某林場計劃第一年做林 15 公頃，以後每年比前一年多造林 20%，第 5 年造林多少公頃? (答案保留至個位) (有些學生只是將 20%乘以 5)

分析: 1.前三年做林分別是: 第一年做林15公頃，第二年做林$15\times(1+20\%)$，第三年做林$15\times(1+20\%)\times(1+20\%)=15\times(1+20\%)^2$

2.你能找出第 5 年，以及第 n 年的造林的計算式子嗎?(能)

解: 第 5 年造林為: $15\times(1+20\%)^4\approx 31$公頃

三、 生活實例引入:



大科學家愛因斯坦曾經說過:複利是世界上第八大奇迹。

想像一下，如果大家每天在為某個目標都進步 1%，一年之後，

你們知道自己將會進步多少嗎?($a\cdot(1+1\%)^{365}\approx$ ______)

A. 2倍 B. 5倍 C. 12倍 D. 25倍 E. 37倍

(答案是 37 倍後，大部分同學都覺得不可思議。)

澳門常見的存款方式

１.**定期儲蓄(單利)**：是指約定存期、整筆存入、到時一次支取本息的一種儲蓄。它適合於較長時間不用的生活節餘款。

2.**“複利”**是現行儲蓄中的一種支付利息的方式，即把前一期的利息和本金加在一起算作本金，再計算下一期的利息，也就是通常說的“利滾利”。我國現行定期儲蓄中的自動轉存業務實際上就是按複利支付利息的。

四、例題分析

例 1 小美將 100000 元存入銀行，年利率 3%，

(1)若直接把100000元定存5年;

(2)若把100000元存入銀行，但銀行半年計息一次，採用複利計算，

試比較這二種情況 5 年後本利和？

(分析:問題1.問題中的本利和、本金與利息的關係是怎樣的?

問題2.利息是怎樣計算出來的?

總結:(1)這是單利的情形,計算公式：本利和＝本金+利息,

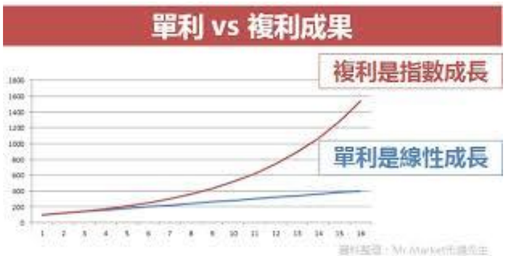
對應的本利和=本金+本金×利率×時期=本金×(1+利率×時期)

字母表示為 $p = A(1 + m\% \cdot n)$

(2)這是複利的計算的公式：本利和=本金×(1+利率)^n，這裡 n 為期數.

字母表示為 $p = A(1 + m\%)^n$

(注意:若半年利率需要把年利率除以2)



解: (1) 本利和=100000×(1+3%×5)=115000元

(2) 本利和=100000×(1+1.5%)^{10} =116054元

兩者相差1054元(即約相差本金的1%，隨著時間越長或者利率越高差距會更明顯。)

例 2 小明、小剛和小強進行釣魚比賽，他們三人釣魚的數量恰好組成一個等比數列。已知他們三人一共釣了 14 條魚，而每個人釣魚數量的積為 64。 並且知道，小強釣的魚最多，小明釣的魚最少，問他們三人各釣了多少條魚？

分析： 問題 1：三個數構成等比數列，你能知道這三個數的關係嗎?

($\frac{a}{q}, a, aq$ 或 a, aq, aq^2 前者為對稱性的設法，計算上較容易)

問題 2：你能列出多少條關係式呢?(2 條)

解: 設小明、小剛和小強釣魚的數量分別為 $\frac{a}{q},a,aq$ 。則

$$\begin{cases}\frac{a}{q}+a+aq=14,\\ \frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64.\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}a=4,\\ q=2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=4,\\ q=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

當 $q=2$ 時， $\frac{a}{q}=\frac{4}{2}=2,aq=4\times2=8,$

此時三個人釣魚的條數分別為 2、4、8.

當 $q=\frac{1}{2}$ 時， $\frac{a}{q}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8,aq=4\times\frac{1}{2}=2,$

此時三個人釣魚的條數分別為 8、4、2.

由於小明釣的魚最少，小強釣的魚最多，故小明釣了 2 條魚，小剛釣了 4 條魚，小強釣了 8 條魚。

例3. 已知三個數成等差數列，它們的和為15，若將這三個數分別加上1，4，19後，得到的三個數成等比數列，求這三個正數。

分析:問題1：若三個數成等差數列，則這三個數可設為甚麼?這三個數關係式是?(設這三個數為 $a-d$ ， a ， $a+d$ ，關係式是 $a-d+a+a+d=15$)

問題 2：若加上數字後成等比數列，則這三個數的關係式是?

(加上數字後分別是 $a-d+1$ ， $a+4$ ， $a+d+19$ ，

關係式是（ $(a-d+1)(a+d+19)=(a+4)^2$ ））

解: ∵ 這三個正數成等差數列

∴ 設這三個數為 $a-d,a,a+d$

可得到關係式 $\begin{cases}a-d+a+a+d=15\\ (a-d+1)(a+d+19)=(a+4)^2\end{cases}$

求出 $a=5$ 後再代入等比數列的關係式中，可得到

$d=-21$ (捨去) 或 $d=3$

$\therefore$ 這三個數為 2,5,8。

四、課堂練習

1. 4 年前，小竣剛出生時，媽媽為他在銀行存入 4 萬元當作教育基金。如果年利率為 4%，每年依複利計息一次，那麼現在小竣的教育基金有多少元?46794.3 元

2. (2017四校聯考) 設 $\{a_n\}$ 為一等比數列，其公比 $q>1$，且有 $a_1+a_2+a_3=21$，

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 216$，$a_1=$ ______, $a_2=$________, $a_3=$__________。$a_1=3, a_2=6, a_3=12$。

五、課堂小結

1.利率問題:單利問題的本利和 $p=A(1+m\%\cdot n)$

複利問題的本利和 $p=A(1+m\%)^n$，

其中，複利問題也是等比數列。

2.對稱性設法:三數成等比數列:可設三數為 $\frac{a}{q}, a, aq$，

三數成等差數列:可設三數為 $a-d, a, a+d$。

六、作業佈置

1.3 年前，小竣剛出生時，媽媽為他在銀行存入 4 萬元當作教育基金。如果年利率為 4%，每 3 個月依複利計息一次，那麼現在小竣的教育基金有多少元?

2.(挑戰題)承(1)，若小竣的媽媽改成在銀行每年的年初都存入 1 萬元當作教育基金。那麼這 3 年小竣的教育基金各有多少元?合共有多少元?

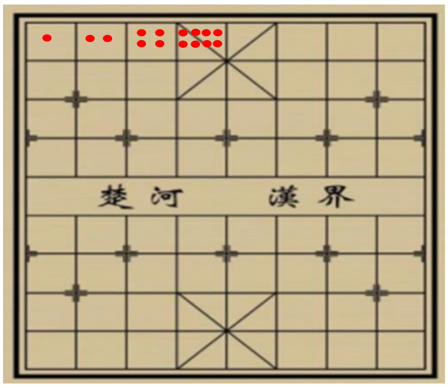
3.成等差數列的三個數的和是 15，并且這三個數分別加上 1，3，9 後又成等比數列。求這三個數。

課題	第 4 課節　等比數列的前 n 項和	年級	高一級
教學目標	1. 掌握等比數列的前 n 項和公式及公式證明思路，會用等比數列的前 n 項和公式解決有關等比數列的一些簡單問題； 2. 經歷等比數列前 n 項和的推導與靈活應用，總結數列的求和方法；能在具體的問題情境中發現等比關係建立數學模型、解決求和問題。 3.在應用數列知識解決問題的過程中，要勇於探索，積極進取，激發學習數學的熱情和刻苦求是的精神。		
學情分析	1.學生已經學習了等差數列及等比數列的相關知識，也學習了疊加法，疊乘法，不完全歸納法等相關的推導方法，具備了一定的探究能力。 2.本節公式的推導與等差前 n 項和公式的推導有著本質的不同，這對學生的思維是一個突破。另外，對於 $q=1$ 這一特殊情況，學生往往容易忽視，所以講課時要強調不要忽視這一點。		
教學重點	等比數列的前 n 項和公式推導。		
教學難點	靈活應用公式解決有關問題。		

〔**教學過程**〕

一、創設情境，提出問題

老師介紹《中國象棋》



中國象棋是中華民族傳統文化，是非物質文化經典產物，大約有兩千年的歷史。

問題 1：棋盤方格一共多少格？（一共 64 個方格）

問題 2：假如我現在第 1 格放 1 粒麥粒，第 2 格放 2 粒，第 3 格 4 粒……，以後每格是前一格粒數的 2 倍。一共要多少粒麥子？

（把每格的數目加起來）

問題 3：每一格有多少粒小麥？（用等比數列的通項公式一一算出來）

列表計算如下：

格子序號：	1	2	3	4	5	…	64
小麥數量：	1	2	2^2	2^3	2^4	…	2^{63}

所以，得出探究問題：

$$1+2+2^2+\ldots+2^{63}=?$$

（題目實質是以 1 為首項，2 為公比的等比數列前 64 項的求和問題.）

二、根據情境，初步探討

探討 1： 設 $S_{64}=1+2+2^2+\ldots+2^{63}$,記為①式,觀察每一項的特徵，有何聯繫？

（後一項都是前一項的 2 倍）

探討 2： 如果我們把每一項都乘以 2，就變成了它的後一項，即①式兩邊同乘以 2，則有 $2S_{64}=2+2^2+2^3+\ldots+2^{64}$，記為②式．比較①②兩式，你有什麼發現？

（①、②兩式有許多相同的項，只有①式項中的“1”與②式項中的“2^{64}”不同，其他相同。）

探討 3： 那麼如何求出 S_{64}？

（把兩式錯開一位，再相減，相同的項就消去了。）

$$S_{64}=1+2+2^2+\cdots+2^{62}+2^{63} \quad ①$$

$$2S_{64}=\quad 2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}+2^{64} \quad ②$$

由①-②,得

$-S_{64}=1-2^{64}$，即 $S_{64}=2^{64}-1$.

從而得出這就是**錯位相減法.**

探討 4： 為什麼①式兩邊同時乘以 2 呢？這個 2 又是代表什麼呢？
（目的是把前一項化為與後一項相同；2 是數列的公比.）

三、類比聯想，解決問題

這時老師再順勢引導學生將結論一般化，對於一般的等比數列$\{a_n\}$，設首項為 a_1，公比為q，如何求前n項和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，即

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$$，記為③式．

問題 1：③式每一項的特徵有何聯繫？ （後一項是前一項的q倍）

問題 2：將③式每一項乘以多少？ （每一項乘以公比q）

得 $qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$，記為④式．

問題 3：怎樣消去相同的項？ （兩個式子錯位相減）

即 $S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$ ③

$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$ ④

③- ④得 $(1-q)S_n=a_1-a_1q^n$

問題 4：能否直接寫出成$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$？

（不能，需要討論q的取值範圍，當$q=1$時，分母為零，無意義）

問題 5：當$q=1$時，S_n的值為多少？能否舉個例子？

（例如數列 5,5,5，...,5,前n項和為$5n$。所以當首項為a_1，$q=1$的等比數列的前n項和為$S_n=na_1$）

因此得到等比數列前n項和公式：

$\therefore$當$q\neq1$時，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

當 q=1 時，$S_n=na_1$

四、例題講解，練習鞏固

例 1 已知等比數列為 $\frac{1}{2}$ ，$\frac{1}{4}$ ，$\frac{1}{8}$ ，… ，則前 8 項之和為________ 。

分析：問題 1：題目給出哪些條件？

（等比數列，首項是 $\frac{1}{2}$ ，公比是 $\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ，項數為 8，求 S_8 ）

問題 2：選用哪一個公式計算？ （ $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ）

解： $\because a_1=\frac{1}{2}$ ，$q=\frac{1}{2}$ ，則

$$S_{10}=\frac{1\times\left[1-(\frac{1}{2})^8\right]}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{255}{256}$$

例 2 在等比數列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_n=189$ ，$q=2$ ，$a_n=96$ ，求 a_1 和 n .

分析：問題 1：題目已知哪些量？（已知 S_n ，q ，a_n ）

問題 2：選用哪一個公式計算？

（ $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ ， 先求出 a_1 ，再由 $a_n=a_1q^{n-1}$ ，求 n ）

解： 由題意得 $\frac{a_1-96\times 2}{1-2}=189$ ，得 $a_1=3$

再由 $a_n=a_1q^{n-1}$ ，即 $3\times 2^{n-1}=96$ ，得 $n=6$

注意：在等比數列的通項公式及前 n 項和公式中共有 a_1 ，a_n ，n ，q ，S_n 五個量，知道其中任意三個量，都可以求出其餘兩個量。

練習

1. 在等比數列$\{a_n\}$中，公比$q=2$，首項$a_1=2$，則$S_n=$（ C ）

A. n^2+n B. n^2-n C. $2^{n+1}-2$ D. 2^n-1

2.在等比數列$\{a_n\}$中，公比是整數，$a_1+a_4=18$，$a_2+a_3=12$，則此數列的前 8 項和為__510__。

3. "遠望巍巍塔七層，光點點倍加增，汽燈三百八十一，請問尖頭幾盞燈？"（選自明朝著名數學家吳敬《九章演算法比類大全》），請算出詩中所述的尖頭有____3__盞燈．

【譯文】一座燈塔 7 層共掛了 381 盞燈，且相鄰兩層中的下一層燈數是上一層燈數的 2 倍，求最頂層的燈數？

首先，學生獨立思考，自主解題，再請學生上臺來解答，其他同學進行評價，然後師生共同進行總結．

五、課堂小結

等比數列前n項和公式：

當$q\neq 1$時，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

當 q=1 時，$S_n=na_1$

六、作業佈置

1.在等比數列$\{a_n\}$中，已知$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_4=96$，求q與S_4.

2.在等比數列$\{a_n\}$中，已知$q=\dfrac{1}{2}$，$S_5=3\dfrac{7}{8}$,求a_1與a_5.

3.在等比數列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2$，$S_3=26$,求q與a_3.

課題	第 5 課節　等比數列的前 n 項和性質	年級	高一級
教學目標	1. 掌握等比數列前 n 項和公式的的特點，能初步應用公式解決與之有關的問題． 2 .通過對公式運用的探索與發現，向學生滲透特殊到一般、類比與轉化、分類討論等數學思想，培養學生觀察、比較、抽象、概括等邏輯思維能力和逆向思維的能力．		
學情分析	1.學生已經學習等比數列前 n 項和公式，並能利用公式解決有關基礎問題； 2.還要加強對等比數列前 n 項和公式的掌握，特別當 $q=1$ 這種特殊情況，要加強練習； 3.本節課能利用等比數列前 n 項和公式來推出性質，有一定難度，但有挑戰性。		
教學重點	等比數列前 n 項和的性質		
教學難點	等比數列前 n 項和及性質的靈活應用		

〔**教學過程**〕

一、復習回顧

等比數列前 n 項和公式：

當 $q \neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

當 $q=1$ 時，$S_n=na_1$

二、合作探究，形成規律

探究 1　　等比數列 $\{a_n\}$ 中，若項數為 $2n$，公比為 q，奇數項之和為 $S_{奇}$，偶數項之和為 $S_{偶}$，則 $\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}$ 的值為多少？為什麼？

問題 1：等比數列$\{a_n\}$中，哪些是偶數項？（a_2，a_4，a_6，a_8，...，a_{2n}）

問題 2：偶數項中首項是多少？公比是多少？項數是多少？

（首項為a_2，公比為q^2，項數為n）

問題 3：則$S_偶$的值是多少？（由等比數列前和公式得$S_偶=\frac{a_2\left[1-\left(q^2\right)^n\right]}{1-q^2}$）

問題 4：同理，則$S_奇$的值是多少？（$S_奇=\frac{a_1\left[1-\left(q^2\right)^n\right]}{1-q^2}$）

所以$\frac{S_偶}{S_奇}=\frac{a_2}{a_1}=q$

性質 1　等比數列$\{a_n\}$中，若項數為$2n$,公比為q，奇數項之和為$S_奇$，偶數項之和為$S_偶$，則$\frac{S_偶}{S_奇}=q$.

例 1 一個等比數列的首項是 1 ，項數是偶數，其奇數項的和為 85，偶數項之和為 170，求此數列的公比和項數。

分析：問題 1：已知哪些量？（首項a_1，$S_奇$，$S_偶$，）

問題 2：可求出什麼？（由$\frac{S_偶}{S_奇}=q$,求出q，項數總和=$S_偶+S_奇$.）

問題 3：如何求出項數？（由等比數列前和公式$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$得.）

解：設等比數列為$\{a_n\}$，項數為$2n$，$n\in N^*$，公比為q，

由$q=\frac{S_偶}{S_奇}=\frac{170}{85}=2$

又由$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=S_偶+S_奇=170+85=255$　即$\frac{1\times(1-2^{2n})}{1-2}=255$得$n=6$

∴公比為 2，項數為 6.

探究 2　在等差數列中，我們知道其前 n 項和 S_n 滿足這樣的性質，S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，成等差數列；試問等比數列的前 n 項和 S_n 是否也滿足 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，也成等比數列呢？（$k \in N^*$）

問題 1：S_k 怎樣表示？（$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$）

問題 2：$S_{2k}-S_k$ 怎樣表示？

（$S_{2k}-S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{2k} = q^k(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)$）

問題 3：$S_{3k}-S_{2k}$ 又怎樣表示？

（$S_{3k}-S_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2} + a_{2k+3} + ... + a_{3k} = q^{2k}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)$）

所以 $\dfrac{S_{3k}-S_{2k}}{S_{2k}-S_k} = \dfrac{S_{2k}-S_k}{S_k} = q^k$

性質 2　等比數列的前 n 項和 S_n 滿足 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，成等比數列.

例 2　已知等比數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n，若 $S_{10}=20$，$S_{20}=60$，則 $S_{30}=$____.

分析：問題 1：已知哪些量？（已知 $S_{10}=20$，$S_{20}=60$）

問題 2：根據什麼公式求 S_{30}？

（根據比數列的前 n 項和的性質，可知 S_{10}，$S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$ 成等比數列）

問題 3：可先求出哪些量？（可先求出 $S_{20}-S_{10}=40$）

解：根據比數列的前 n 項和的性質，可知 S_{10}，$S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$ 成等比數列

則 $(S_{20}-S_{10})^2 = S_{10}(S_{30}-S_{20})$，即 $(60-20)^2 = 20\times(S_{30}-60)$

解得 $S_{30}=140$.

三、知識鞏固

1. 若等比數列$\{a_n\}$的公比為$\dfrac{1}{3}$，且$a_1+a_3+...+a_{99}=60$，則$S_{100}=$__80__；

2. 若等比數列$\{a_n\}$中,$S_5=48$,$S_{10}=60$,則$S_{15}=$__63__.

四、課堂小結

等比數列前n項和性質：

性質 1　等比數列$\{a_n\}$中，若項數為$2n$,公比為q，奇數項之和為$S_{奇}$，偶數項之和為$S_{偶}$，則$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

性質 2　等比數列的前n項和S_n滿足S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，成等比數列.

五、佈置作業

1.在等比數列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{4}$，在前$2n$項中，奇數項的和為 85.25，偶數項的和為 170.5，求n的值.

2.已知數列$\{a_n\}$是等比數列，且$S_m=10, S_{2m}=30$，求S_{3m}的值.

課題	第 6 課節　數列的應用	年級	高一級
教學目標	1.熟練地掌握數列的有關知識及其性質，並利用這些知識解決有關數列的綜合性問題。 2.利用數列知識建立實際問題的數學模型。 3.趣味數學能激發學生學習的興趣。		
學情分析	1.學生已經學完等差等比數列有關公式，為了學會總結公式，本節課首先讓學生回顧所有學過的公式； 2.利用所學數列知識，學會分析問題，並解決實際生活中的問題方法，留出學生思考的餘地，讓學生去聯想，探索並尋找答案。		
教學重點	數列公式的綜合應用。		
教學難點	應該讓學生理解並學會應用，能將實際問題轉化歸納成數學問題，得以解決。		

〔**教學過程**〕

一、知識回顧

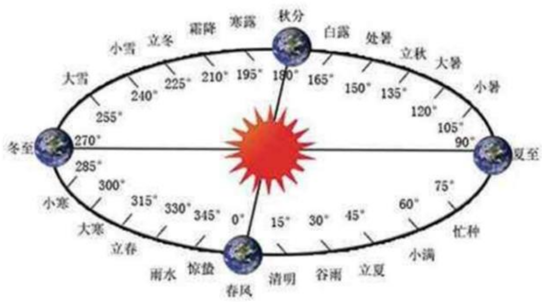
復習等差數列和等比數列的有關公式：

名稱	等差數列	等比數列
定義	$a_{n+1}-a_n=d$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$
通項公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$
求和公式	$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 注意: n 為項數	當 $q\neq 1$ 時， $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 當 $q=1$ 時， $S_n=na_1$ 注意: n 為項數

		等差數列	等比數列
中項公式		若a，A，b成等差數列，則$A=\frac{a+b}{2}$	若a，G，b成等比數列，則$G=\pm\sqrt{ab}$
性質	1	$a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_m q^{n-m}$
	2	$m+n=p+q \Leftrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$	$m+n=p+q \Leftrightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
	3	$m+n=2w \Leftrightarrow a_m+a_n=2a_w$	$m+n=2w \Leftrightarrow a_m\cdot a_n={a_w}^2$
	4	若項數為$2n$，則$S_{偶}-S_{奇}=nd$	若項數為$2n$，則$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$
	5	S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等差數列	S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等比數列

二、講與練(以學生為主、教師為輔，師生一起解決問題)

1.《周髀算經》中有這樣一個問題：從冬至起，依次小寒、大寒、立春、雨水、驚蟄、春分、清明、穀雨、立夏、小滿、芒種這十二個節氣其日影長減等尺，冬至、立春、春分日影之和為 31.5 尺，前九個節氣日影之和為 85.5 尺，問芒種日影長為（　）



A.1.5 尺　　　B.2.5 尺　　C.3.5 尺　　D.4.5 尺

分析：

問題 1：各節氣的日影長構成什麼數列？

（等差數列，設這十二個節氣日影長依次成等差數列$\{a_n\}$）

問題 2：各節氣代表第幾項？（列表如下）

節氣	冬至	小寒	大寒	立春	雨水	驚蟄	春分	清明	穀雨	立夏	小滿	芒種
項數	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

問題 3：題目求什麼？（求 a_{12}）

問題 4：用什麼方法求 a_{12}？需要哪些條件？

（利用通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 或 $a_n = a_m + (n-m)d$ ，因此要知道公差 d 和 a_1 或 a_m）

解：根據已知條件設這十二個節氣日影長依次成等差數列 $\{a_n\}$，且列表如下

節氣	冬至	小寒	大寒	立春	雨水	驚蟄	春分	清明	穀雨	立夏	小滿	芒種
項數	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

根據已知條件列方程組，再利用等差數列的性質計算：

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_4 + a_7 = 31.5 \\ S_9 = \dfrac{9(a_1 + a_9)}{2} = 85.5 \end{cases} \quad \text{化簡得} \quad \begin{cases} 3a_4 = 31.5 \\ 9a_5 = 88.5 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_4 = 10.5 \\ a_5 = 9.5 \end{cases}$$

$\therefore d = a_5 - a_4 = -1$ 則 $a_{12} = a_5 + 7d = 2.5$ **故選 B**

注意:解應用題的一般驟:審、設、列、解、答。

2.一個熱氣球在第一分鐘上升了 25 m 的高度，在以後的每一分鐘裏，它上升的高度都是它在前一分鐘裏上升高度的 80%，這個熱氣球上升的高度能超過 125 m 嗎？

分析：问題 1：題目已知哪些條件？

（首項為 25，由後一項是前一項的 80%，得出構成等比數列，且公比為 $\frac{4}{5}$，求 S_n）

問題 2：選用哪一個公式計算？ （$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$）

解：用 a_n 表示熱氣球在第 n 分鐘上升的高度，由題意，得 $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$，

$\therefore$數列 $\{a_n\}$ 是首項 $a_1=25$，公比 $q=\frac{4}{5}$ 的等比數列.

熱氣球在前 n 分鐘內上升的總高度為

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{25\times\left[1-(\frac{4}{5})^n\right]}{1-\frac{4}{5}}=125\times\left[1-(\frac{4}{5})^n\right]<125$$

故這個熱氣球上升的高度不可能超過 125 m.

3. 求 $(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$ 的值.

分析：問題 1：式子每項是等差數列嗎？（不是）

問題 2：式子每項是等比數列嗎？（不是）

問題 3：那麼式子每項有何特徵？如何求？

（把式子每項拆分成兩項，把 $2,4,\cdots,2n$ 構成一個新的數列，是等差數列，且首項為 2，公差為 2；然後把 $-3\times5^{-1},-3\times5^{-2},\cdots,-3\times5^{-n}$ 構成一個新的數列，是等比數列，且首項為 -3×5^{-1}，公比為 5^{-1}；最後重新求和）

解：

$$\begin{aligned}
&(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})\\
&=2+4+\cdots+2n-3\times5^{-1}-3\times5^{-2}-\cdots-3\times5^{-n}\\
&=(2+4+\cdots+2n)-3(5^{-1}+5^{-2}+\cdots+5^{-n})\\
&=\frac{(2+2n)n}{2}-3\times\frac{\frac{1}{5}(1-(\frac{1}{5})^n)}{1-\frac{1}{5}}\\
&=n+n^2-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{5^n})\\
&=n^2+n-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^n}
\end{aligned}$$

分組求和法:就是將數列的項分成二項，而這兩項往往是常數或是等差（比）數列，進而利用等差數列或等比數列的求和方法分別求和，然後再合併，從而得到該數列的和。

三、課堂小結.

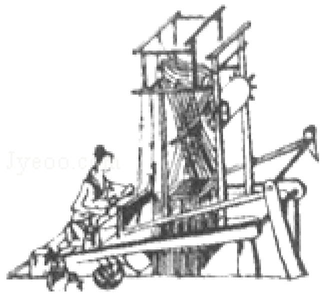
1.請同學們回顧一下通過本節課的學習，你有哪些收穫？

(學生討論、回答、補充、共同，加深對所學知識的理解，形成系統。)

2.解數學應用題的一般步驟；(審、設、列、解、答)

3.掌握分組求和的方法。

四、作業佈置



1.古代數字著作《九章算術》有如下問題：今有女子善織，日自倍，五日織五尺，問日織幾何？

【譯文】今有一女子是織布能手，每天織的布都是前一天的 2 倍。已知她 5 天裡共織布 5 尺，問這位婦女每天織布多少？

2.求通項為 $a_n = 2^n + 2n - 1$ 的數列的前 n 項和.

叁、教學評估與反思建議

一個專題的教學課程完成了，終於到了總結反思的時刻，一直以來，我們總是相信，教學必須經過反思，教學只有在總結反思後才能得到進步。今次是我們三人團隊的第一次合作，之前的預備會議開了好幾次，我們一心想打造一個較為優質的教程，為學生的得益，為自己的提升，這是我們這次設計教案的初心和出發點，至於得獎與否倒不是太重要的事了。所以我們會去想許多個為什麼，許多個怎麼辦，諸如這一屆學生的學情如何，結合學情和之後的四校聯考，我們要呈現給學生的應該是什麼內容，要把怎樣的數學思想帶給學生們，怎樣的教學方法比較接地氣，能提起學生們的學習興趣，又能真正符合學生的實際情況等等。 因此經過多次討論，思索，我們決定把這一專題的教學課程分為 6 個課時，第一課時，是等比數列的定義及其基本公式；第二課時，等比數列的基本性質；第三課時，是基本公式和基本性質的應用；第四課時，等比數列的求和問題；第五課時，為等比數列的求和的性質；第六課時，安排了等差等比數列的綜合運用。做出這一個課時的安排，理由有四：一是考慮了符合學生們的思維線路，從定義→到基本公式→到基本性質→基本公式和基本性質的應用→再上升到求和公式→求和性質→最後彙聚到綜合運用，層層提高，環環相扣，順理成章，就像上樓梯一樣，最後到了第六課時，把所有的公式性質做一個大的集合，使學生們在這裡得以一窺全貌，瞭解到我們所學的整個等比數列部分的內容，再次加深同學們對等比數列部分整體的理解；二是方便我們在教學中為了提升同學們的學習興趣，我們加入了多個不同的教學元素，例如教學小遊戲，大數學家愛因斯坦的數列故事，我國古代有關數列的諸多例子，以及現今在世界上獨一無二的中國退耕還林活動等等，通過學生們動手，動腦，以及視頻展示，例題或作業講解等手法，力圖構建一個穿越時空的感覺，使同學們真正體會到了數列的一種魅力，牢牢吸引住學生們的興趣；三是方便在其中安排不少的家國情懷的例子，從戰國哲學家莊子的關於等比數列的名言，到東

漢的東漢《周髀算經》，明代的《九章算術》，還將二千多年有悠久歷史的象棋文化，融入到等比數列之中，相信在同學們的心中會激起迴響，陶冶情操；四是利於在我們總的課時完成之後，安排同學們做一次數列的數學報告，借機檢查學生們在整個學習過程中的得著，教師們則可以由此檢查教學中存在的問題，以此調整教學策略。

當然，教學的受眾是學生，教學的效果如何，當然要從學生的反應中去瞭解，從與同學們的交流當中，去分析去總結，再做總體的總結。我們三位老師分別去同各自班級的學生談話，瞭解，之後匯總資訊，做全面分析。

第一課時，本節上課之前有兩個班先作了充分的預習，有一個班因為當天有事沒有做預習，效果截然不同，有預習的兩個班很好地理解了教學的意圖，較快進入了角色，對於等比數列定義，通項式，還是等比中項等三部分的內容有較好的理解，包括小遊戲部分，或者通項式的推導部分，都較為順利。而另一個班則為困難許多，課程上得極為緊張，一部分同學在通項式的證明上表示不理解，少數對定義中“除了首項外，其它能為 0 嗎”有疑問。但對於小遊戲則是表示歡迎。另外，本節的三個例子處理得還算順利，算是一個小小的收穫。至於公式的推導，三位教者的共同認知是還是要進行，一則是基本學歷的要求，二則要使學生真正懂得“知其然，還要知其所以然”，是很有必要的。再有，引入部分的莊子名言引起了學生極大的興趣，大家問了許多有關莊子的軼事，說明這一個事關數列的愛國事例引起了同學們的共鳴。

第二課時， 本節學生們均作了預習，效果比上一課時略好。大家對我國退耕還林政策頗有興趣，也對該項成就感到興奮，同時看到居然能同等比數列有關聯感到新奇。但反映較多問題是對基本性質所表示的字母意義感到費解，例如若 $m+n=p+q$，則 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ 和由 $m+n=2p$，則 $a_m \cdot a_n = a_p{}^2$ 這兩個性質，解釋用了許多時間。教者的做法是舉實例，從特殊推一般。例題的講解出現了

兩級分化的情況，中等以上的學生極易掌握，中下學生稍難理解，需要作多次解釋。

第三課時，以下的每一節都提醒學生作預習，不在贅述。 這是大家都感到有壓力的一課，對了，因為是文字題。儘管大家對引入部分的大科學家愛因斯坦的例子感興趣，但對下面的內容如臨大敵，聽得很小心。特別是複利問題，學生感到很難，而且不明白為何要將這部分內容放到這裡？必須教者詳細解釋，其實複利本質上就是等比數列。例 2 和例 3 用了類比的思想，情況稍微好一些。對於公式性質的掌握，中等以下的學生還是覺得吃力，看來要吩咐同學們課下要做功夫。

第四課時，本節創設了一個情境，從有二千多年的中國象棋入手，聯繫等比數列，讓學生有一個耳目一新的感覺， 之後利用類比思維，推導出等比數列的求和公式。但學生反映比較難掌握，一個難點是“錯位相減”，一個難點是從具體例子推導到一般情形，字母變化不好接受，一個難點是求和公式必須分情況討論，這三點要給出準確的解答。另外，練習題中的第 3 題涉及到明代《九章演算法》的詩文題，學生表示基本不理解，還是要老師作全部解釋。作業的設計注重了基本題型“知三求二”型，完成情況良好。

第五課時，這一節進入了對於學生而言較為困難的一節，連結上一節的內容而進行的性質推導使得學生們感到“變幻莫測”，開頭的第一個性質還好一點，兩式相除就可以了，關鍵是第二個性質，中下等學生較難理解，還要用到實際例子，例如$\{a_n\}$等比，取$k=2$，那麼$S_2=a_1+a_2$，$S_4-S_2=a_3+a_4$，$S_6-S_5=a_5+a_6$也是等比的。例 1 的講解比較順利，例 2 則較為困難，同學們覺得好神奇，雖然是性質用起來方便。所以這一部分要放慢去解釋，個別學生課後還反復問了不少問題，諸如 k 如何取值？這個性質何時應用？甚至有一名學生還問做題時還要不要再寫出類似a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6的式子等。這些情況

也是教者事先預想到的，所以本節的作業設計是儘量接近例題的形式，先讓學生有一個慢慢理解接受的過程。從作業完成情況來看，還是可以的。

第六課時，這一節對學生而言，容量是大的，學生非常樂於對整個等差等比公式和性質進行梳理，但是內容較多，一時三刻難以全部掌握。本節設計的例題中，教者只是選擇了三種題型，一個是《周髀算經》裡等差數列的綜合題，一個是等比數列的求和公式的實際應用題，一個是等差和等比的綜合應用題。學生的反應有參差，例 1 裡說到我國古代發明的 24 個節氣，大家想不到會聯繫到等差數列，將文字解釋後大家就釋然了；例 2 大家覺得容易理解；例 3 教者覺得簡單，但學生們反而覺得不好理解，有幾個後進同學需要課後輔導。作業的設計中有一道《九章算術》的文字題，今次不做解釋，讓同學們自己去理解發揮。

前者之思，後者之師，教者明白，從無最好的教案，只有更好的教案，總結及反思是我們前進的動力。許多的東西就是這樣，教然後知不足，學然後知困，通過這一個專題的教學，我們教者有了幾個反思：

一是課節的安排基本合理，但顯得較為緊湊， 如果沒有做好前期預習的話，教學效果會很受影響；

二是內容的安排順序符合學生的認知規律，從易到難，從簡單到綜合，但公式之多，學生們對公式的理解掌握的方法還待提高；

三是引入部分很重要，對整堂課所起的作用，對提升同學們的學習興趣至關緊要，通常，圖文並茂而且有生活實際的例子更能有用；

四是時間管理對每一堂課，對每一個老師而言，都是一個大的考驗，需要老師有豐富的教學經驗，本專題教學內容較多，難度不小，又必須加入推理證明過程，所以每一節都要做到認真細緻，靈活處理；

五是最後要求學生們所做的數學報告，對於培養同學們的歸納推理能力，提升理解記憶，有相當好的作用，可以考慮在以後的學習中採用。

最後我們在與學生們的交談之中，有不少人表示出了對我國古代數學家的傾佩，表示出了不畏難的思想，願意接受更難題目的挑戰。我們想，尚能如此，則是教者最大的希望。

1

肆、參考文獻

一、相關教材及參考資料:

1.《全日制普通高級中學教科書 數學第一冊(上) 人教版》

2. 數學練習冊 高一級上學期第二冊 延邊教育出版社

3. 四校聯考數學科試題

4. 澳門高中教育階段數學基本學力要求

二、相關網站

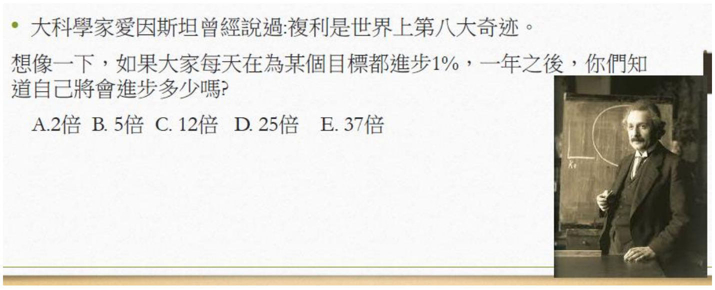
1. 維基百科(https://zh.wikipedia.org/wiki/Wikipedia)

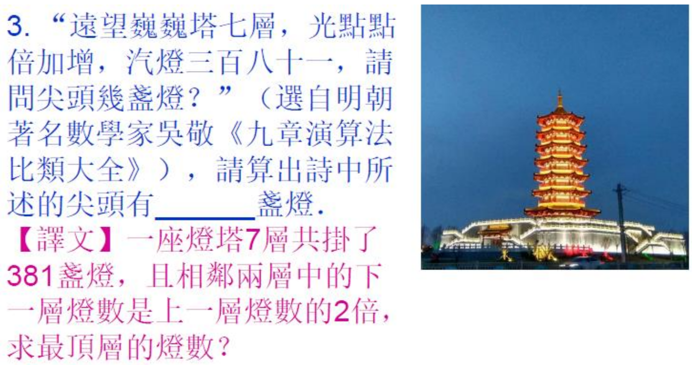
2. 百度文庫(https://wenku.baidu.com/)

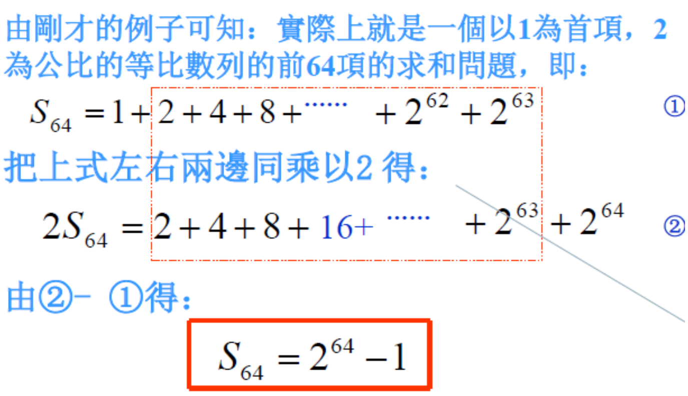
伍、相關教材

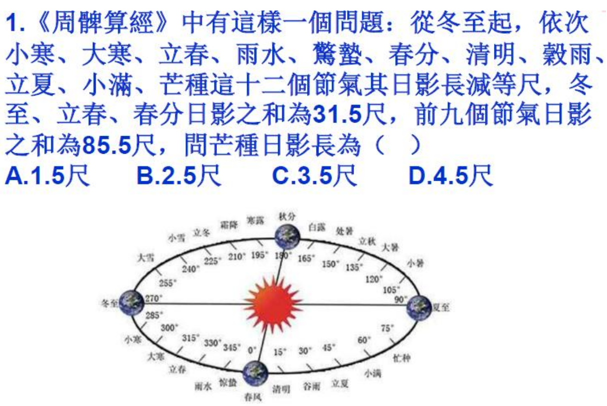
輔助教學資料

一、教材課件部分圖片









附錄

一、數列書面報告章程

2019-20 學年度高一級暨“手抄版數列公式報告表”章程

一、宗旨 以《人教版全日制普通高級中學教科書 數學第一冊(上)》之數列部分為綱，編寫“高中數列公式報告表”，通過親手製作，其一加強公式記憶，鞏固數學基礎，其二提高數學素質和應用能力，其三為之後的四校聯考，甚至大學深造做準備。

二、製作 以 1/2/3/4/5/6 人做一組，可以聯合分工製作。要求於 2020 年 1 月 3 日或之前交分組名單給本班數學老師。此項由各班數學科代表負責。

三、交表 2020 年 1 月 27 日(100%)，28 日（90%），29 日（80%），依此類推。

四、要求 1. 在數列範圍內，分部分列出相關公式，隨後附上例題並加以解析，例題應有解題過程。2. 全部手工製作，畫圖部分要用間尺，可以加入個人想像的插圖。3. 最後部分要寫上每個人的感想，約 100 字左右，當中寫出過程中個人的得著，樂趣…。4. 統一以 A4 紙製作，封面及封底，目錄，內容形式可自行設計。5. 可以在網上選取資料，但要講明出處。6. 題目不限，可以自己命題，但必須要以數列知識為主。7. 若能加入公式或性質的證明過程，或者有一題多解的內容，可視為加分項。

五、評分標準 以齊全，美觀，整潔，條理分明，內容豐富，例題翔實為標準

六、計分 計第三段平時分占 10%-20%

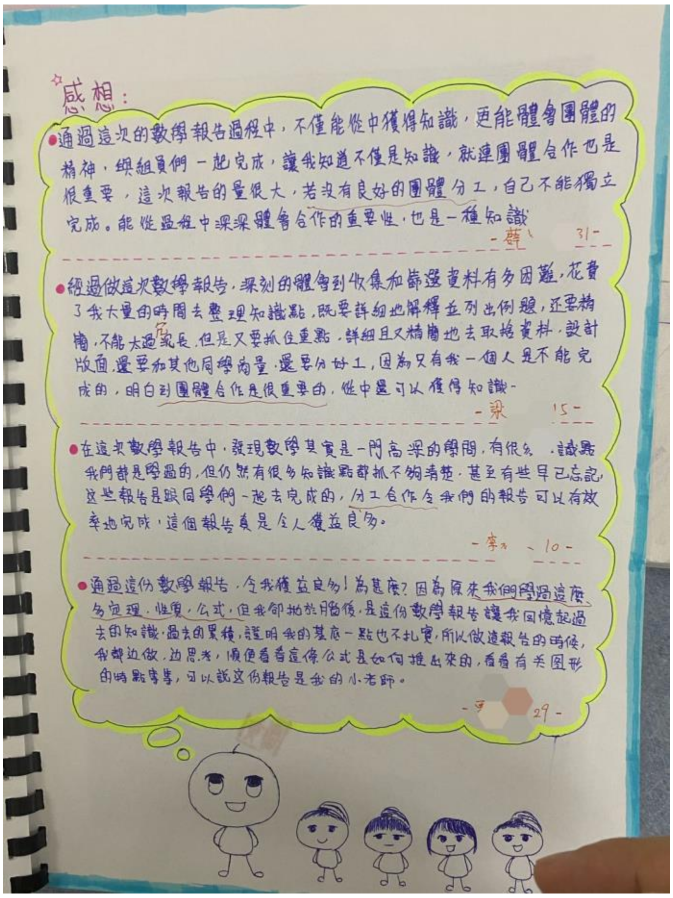
附錄範圍如下

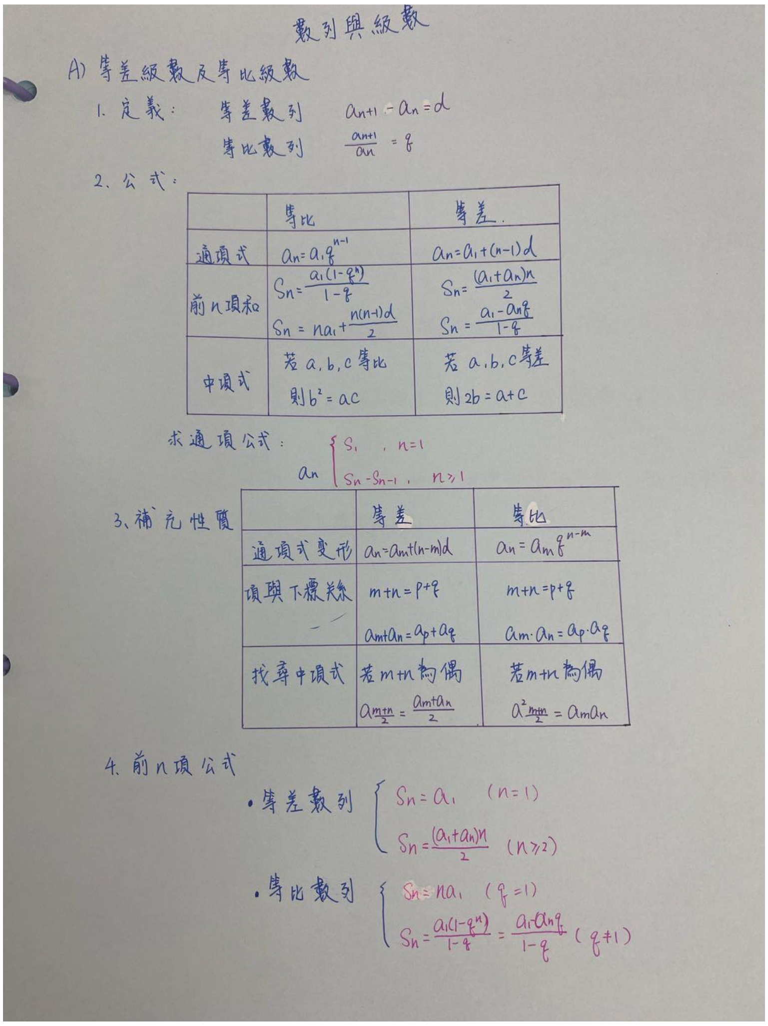
1. 等差等比數列定義；2. 等差等比數列基本公式；

3. 等差等比數列基本性質；4. 等差等比數列求和公式；

5. 等差等比數列求和性質；6.等差等比數列的題型與解法。

二、學生數列的總結報告照片





數列與級數

A) 等差級數及等比級數

1. 定義：等差數列 $a_{n+1}-a_n=d$
   等比數列 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

2. 公式：

	等比	等差
通項式	$a_n=a_1q^{n-1}$	$a_n=a_1+(n-1)d$
前n項和	$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$	$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
中項式	若 a, b, c 等比 則 $b^2=ac$	若 a, b, c 等差 則 $2b=a+c$

求通項公式：$a_n\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq1\end{cases}$

3. 補充性質

	等差	等比
通項式變形	$a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_mq^{n-m}$
項與下標關係	$m+n=p+q$ $a_m+a_n=a_p+a_q$	$m+n=p+q$ $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
找尋中項式	若 m+n 為偶 $a_{\frac{m+n}{2}}=\frac{a_m+a_n}{2}$	若 m+n 為偶 $a^2_{\frac{m+n}{2}}=a_ma_n$

4. 前n項公式

• 等差數列 $\begin{cases}S_n=a_1 & (n=1)\\ S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2} & (n\geq2)\end{cases}$

• 等比數列 $\begin{cases}S_n=na_1 & (q=1)\\ S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$

7. $\{a_n\}$等比. $a_5-a_1=15$, $a_4-a_2=6$. 求 q.

解: $\begin{cases} a_1q^4-a_1=15 \\ a_1q^3-a_1q=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(q^4-1)=15 & ① \\ a_1(q^3-q)=6 & ② \end{cases}$

$\frac{①}{②}$ 得: $\frac{a_1(q^2-1)(q^2+1)}{a_1q(q^2-1)}=\frac{15}{6}$

$15q=6q^2+6$

$6q^2-15q+6=0$

$2q^2-5q+2=0$

$(2q-1)(q-2)=0$

$q=\frac{1}{2}$(舍), $q=2$

数列与级数

一. 数列定义:

1. 等差定义: $a_{n+1}-a_n=d$
2. 等比定义: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

二. 数列公式:

1. 通项式: $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_n=a_1q^{n-1}$
2. 前n项和: $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$

   $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$, $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
3. 中项式: a, b, c等差 $\Updownarrow$ $b=\frac{a+c}{2}$ a, G, b等比 $\Updownarrow$ $G^2=ab$
4. 求通项式: $a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1} & n\geq2 \end{cases}$

29

三. 补充性质

1. 通项式变形: $a_n=a_m+(n-m)d$, $a_n=a_mq^{n-m}$
2. 项与下标的关系: $n+m=p+q \Downarrow a_n+a_m=a_p+a_q$ $m+n=p+q \Downarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
3. 寻找中项式: 若n+m为偶数 $\Downarrow$ $a_{\frac{n+m}{2}}=\frac{a_m+a_n}{2}$ 若m+n为偶 $a^2_{\frac{n+m}{2}}=a_m\cdot a_n$
4. 前n项和变形: 等差(等比)数列依次每k项和仍等差(等比)

   例: $\{a_n\}$等差, $k=2$, 公差为d

   a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, 公差为d

   公差$=(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=a_1+2d+a_1+3d-a_1-d-a_1=4d$.

22.3 数列的求和法.

一. 数列补充性质:

	等差	等比
1. 通项式变形	$a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_m\cdot q^{n-m}$
2. 项式与下标关系	$m+n=p+q \Downarrow a_m+a_n=a_p+a_q$	$m+n=p+q \Downarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$
3. 寻找中项式	若m+n为偶 $\Downarrow$ $a_{\frac{m+n}{2}}=\frac{a_m+a_n}{2}$	若m+n为偶 $\Downarrow$ $a^2_{\frac{m+n}{2}}=a_m\cdot a_n$

4. 数列的变形规律: 等差(等比)数列依次每k项和仍等差(等比)

例 $\{a_n\}$等差, 公差d

$k=2$, a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6 等差, 公差4d. 6

例 1. 求等差数列4+7+10+… 前50项之和

解: $S_{50}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ $=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n$

$=50\times4+\frac{50\times49}{2}\times3$ $=\left(\frac{4+3}{2}\right)\cdot 50 25$

$=3875$ $=175$

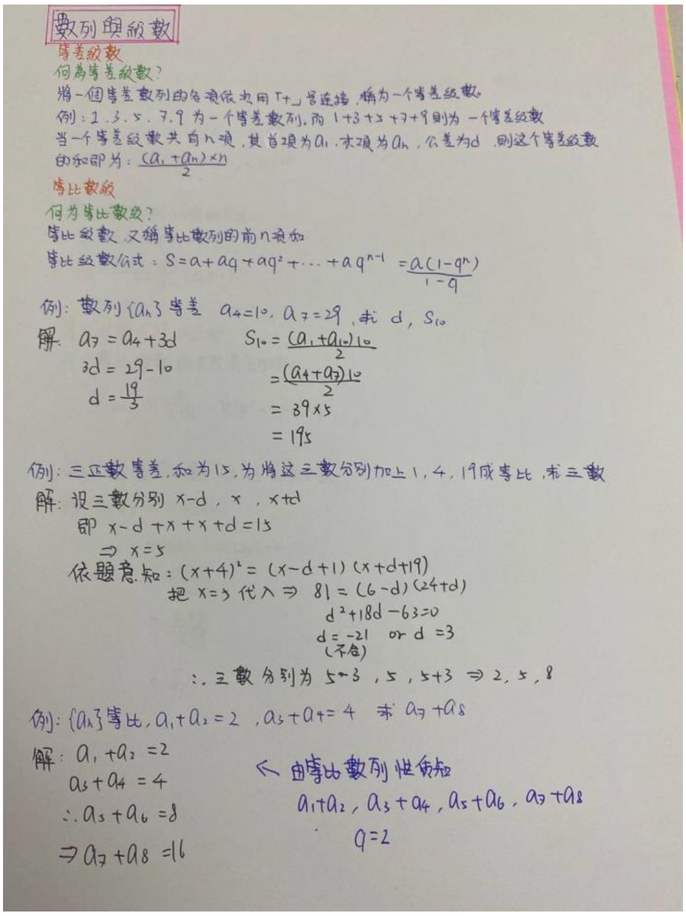
练习 1. 求等比数列 $1-2+4-8+\cdots$ 前10项之和

解: $\because a_1=1$, $q=-2$

$\therefore S_{10}=\frac{1\cdot[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=\frac{1-1024}{3}$

$=\frac{-1023}{3}$

$S_n=\frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$ $=-341.$



數列與級數

等差級數

何為等差級數?

將一個等差數列的各項依次用「+」號連接，稱為一个等差級數。

例：1，3，5，7，9 为一个等差數列，而 1+3+5+7+9 則为一个等差級數

当一个等差級數共有 n 項，其首項为 a_1，末項为 a_n，公差为 d，則这个等差級數的和即为：$\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$

等比數級

何为等比數級?

等比級數，又稱等比數列的前 n 項和

等比級數公式：$S=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$

例：數列 $\{a_n\}$ 等差 $a_4=10$，$a_7=29$，求 d，S_{10}

解：$a_7=a_4+3d$ 　　 $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})10}{2}$

$3d=29-10$ 　　 $=\frac{(a_4+a_7)10}{2}$

$d=\frac{19}{3}$ 　　 $=39\times5$

$=195$

例：三正數等差，和为15，为將这三數分別加上 1，4，19 成等比，求三數

解：设三數分別 $x-d$，x，$x+d$

即 $x-d+x+x+d=15$

$\Rightarrow x=5$

依題意知：$(x+4)^2=(x-d+1)(x+d+19)$

把 $x=5$ 代入 $\Rightarrow 81=(6-d)(24+d)$

$d^2+18d-63=0$

$d=-21$ (不合) or $d=3$

$\therefore$ 三數分別为 $5-3$，5，$5+3 \Rightarrow 2, 5, 8$

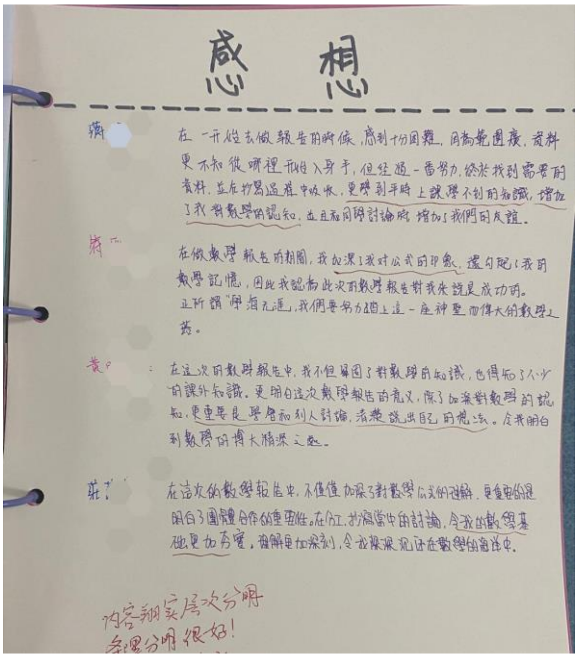
例：$\{a_n\}$ 等比，$a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=4$ 求 a_7+a_8

解：$a_1+a_2=2$ 　　 ⇐ 由等比數列性質知

$a_3+a_4=4$ 　　 a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6，a_7+a_8

$\therefore a_5+a_6=8$ 　　 $q=2$

$\Rightarrow a_7+a_8=16$



感想

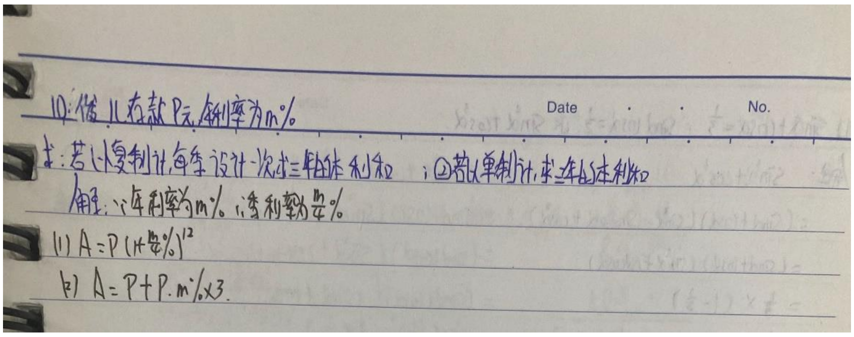
蔣：在一开始去做報告的時候，感到十分困難，因為範圍廣，資料更不知從哪裡开始入手，但经過一番努力，終於找到需要的資料，並在抄寫過程中吸收，更學到平時上課學不到的知識，增加了我對數學的認知，並且和同學討論時增加了我們的友誼。

蔣：在做數學報告的期間，我加深了我对公式的印象，還勾起了我的數學記憶，因此我認為此次的數學報告對我來說是成功的。正所謂"學海无涯"，我們要努力踏上這一座神聖而偉大的數學之路。

黃：在這次的數學報告中，我不但鞏固了對數學的知識，也得知了不少的課外知識。更明白這次數學報告的意义，除了加深對數學的認知，更重要是學會和別人討論，清楚說出自己的想法。令我明白到數學的博大精深之處。

莊：在這次的數學報告中，不僅僅加深了對數學公式的理解，更重要的是明白了團體合作的重要性。在分工，抄寫當中的討論，令我的數學基礎更加夯實，理解更加深刻，令我深深沉迷在數學的海洋中。

内容翔实层次分明
条理分明很好!



Date . . No.

10：假 1 儿存款 P元，年利率为 m%

求：若以复利计，每季设计一次，求三年的本利和；② 若以单利计，求三年的本利和

解：$\because$ 年利率为 m%，$\therefore$ 季利率为 $\frac{m}{4}$%

(1) $A=P(1+\frac{m}{4}\%)^{12}$

(2) $A=P+P\cdot m\%\times3$.