2019/2020 學年教學設計獎勵計劃

不定積分與定積分

參選類型：教案

參選編號：C031

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高三

簡介

今年是教青局基力全面實施的一年。按照高中基本學力要求，需要講授與微分相關的課程，而對於積分部分則未作相應要求。根據往年的教學設計獎勵計劃資料庫，積分部分只有少部分的教案，可見對於高中課程來說，積分教學設計確實有一定難度。有見於此我們決定補上這一塊空白，期待拋磚引玉。

函數的微分和積分一對互逆運算。對於同學來說，要掌握基本的積分運算之前必須熟練掌握基本的求導公式。因此在講授不定積分時，首先復習、測試同學關於求導公式的掌握程度，然後進入到基本的積分公式學習。不定積分與定積分的計算大部分雷同，所以不定積分的掌握尤為重要。由於中學生未學習過積分形式的求導法則和中值定理，因此積分中最重要的微積分基本定理是難以在中學階段講得透徹的，這裡充分運用 Geogebra 把分割的 Uppersum 和 Lowersum 運用計算機模擬計算，讓學生知道，無論是上和分割還是下和分割，只要分割得足夠小，矩形面積和就等於實際面積。教學過程中注重方法和思想上的滲透，而對於結論，學生能把它一個已知結論來應用即可。結合四校聯考附加卷的要求，本教案中並沒有引入太多與復合函數相關的積分。此教案目標是同學能運算微積分基本定理來進行基本的積分計算，掌握積分運演算法則，能用積分計算一些簡單的不規則圖形面積。

教案注重滲透定積分背後的數學文化，激發學生學習的興趣。同時教案條理清晰，力求結構清晰，每節最後都有知識網絡結構圖。資訊科技方面，特別是定積分的分割計算上用 geogebra 來進行圖像的分割模擬，讓學生理解分割的極限思想。同時挖掘互聯網相關教學視頻，讓學生經歷不同的教學環境，在不同的角度下理解、增強對知識點的認識。

目次

教學進度表

作品名稱	不定積分與定積分			人數	33 人
實施年級	高三			總實施節數[註]	5 節
實施日期	2019 年 12 月 2 日-12 月 4 日			每節課時	40 分鐘
科目	數學			科目每週節數	8 節
預計授課日期（年-月-日）	**節數**	**課節**	**課題名稱**	**課題內容**	**課時（分鐘）**
2019 年 12 月 2 日	1	第一課節	不定積分	不定積分的定義和運算	40
2019 年 12 月 3 日	2	第二課節	定積分及其運算	定積分的運算性質和計算	80
2019 年 12 月 4 日	1	第三課節	定積分的應用	定積分在不規則面積的計算應用	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1.瞭解不定積分和定積分的相關概念和表示。
2.了解微積分基本定理，掌握不定積分、定積分的運演算法則。
3.學會計算簡單的不定積分和定積分。
4.學會運用定積分計算簡單的不規則區域面積。

二、主要內容

本單元的主要內容為不定積分、定積分和定積分在計算不規則圖形面積的應用。

三、設計創意和特色

1.滲透定積分背後的數學文化，激發學生學習的興趣。
2.教案條理清晰，結構清晰，每節最後都有知識網絡結構圖。
3.結合資訊科技，特別是定積分的分割計算上用 geogebra 來進行圖像的分割模擬，讓學生理解分割的極限思想。讓學生經歷不同的教學環境，在不同的角度下理解、增強對知識點的認識。

四、教學重點

定積分的計算。

五、教學難點

運用定積分計算不規則圖形面積。

六、教學用具

PPT、Geogebra、計算機

貳、教案

不定積分–第一課時

教學目標

- 知識目標

1.瞭解不定積分的相關符號。

2.瞭解不定積分與微分的關係。

3.掌握簡單不定積分的運算性質。

- 技能目標

1.能計算簡單的不定積分。

- 情意目標

通過對不定積分的學習，辯證看待數學運算中的互逆關係。

教學重點：不定積分的計算

教學難點：不定積分與求導的關係、積分微元的理解

尤其是積分微元 dx 的理解，由於教材頻繁運用 dx 作為積分的一部分，容易給學生“符號化”誤解，需要對某一個函數對不同變量進行積分，讓同學意識到積分微元完全可以根據實際情況而定，而在練習中亦刻意設置對 t 積分案例。

對應基力：無。

教學過程：

溫故知新

設計意圖：從回憶公式引入，確保同學已經掌握基本求導公式再鋪墊不定積分。

先回憶之前學過的求導公式：

$(x^n)'=$ ______

$(\cos x)'=$ ______

$(\sin x)'=$ ______

$(3)'=$ ______

$(\ln x)'=$ ______

$(e^x)'=$ ______

講授新知

如果 $F'(x)=f(x)$ ，那麼 $f(x)$ 的不定積分記為：

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

積分可以理解為導數的逆運算。算不定積分意思就是：知道函數的導數，求原來的函數是什麼。$\int$ 積分符號，dx是積分微元，x是指函數的自變量是x，c叫積分常數。

由於常數經過求導以後變為 0，所以積分計算出來的結果無法確定原來的常數是什麼，因此加上常數c。

如：$\begin{cases}(x^2+1)'=2x \\ (x^2+4)'=2x\end{cases} \Rightarrow (x^2+c)'=2x \Rightarrow \int 2xdx = x^2+c$

註：
1. 不定積分的結果是函數族，根據後面常數c不同，對應圖像它們是平行曲線(函數族)。
2. 積分符號中的dx意思是對x進行積分。有時函數可能有多個變量，需要明確對哪個變量進行積分。因此並不永遠是使用dx，也可以用dt，如：

$$\int(2x+t)dx = \int 2xdx + \int tdx = x^2+tx+c$$

$$\int(2x+t)dt = \int 2xdt + \int tdt = 2xt+\frac{1}{2}t^2+c$$

可見，對x還是對t積分，結果是完全不一樣的。

函數對不同變量積分，結果不同。避免同學產生符號化理解，突破難點。

不定積分的一些常見例子：

$\int 2xdx = x^2+c$ $\quad$ $\int \cos xdx = \sin x+c$ $\quad$ $\int \sin xdx = -\cos x+c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln x+c$ $\quad$ $\int e^x dx = e^x+c$ $\quad$ $\int kdx = kx+c$

根據微分的運演算法則，可知不定積分的運演算法則如下：

(1)如果$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$，那麼$\int f(x)\pm g(x)dx = F(x)\pm G(x)+c$

(2)$\int kf(x)dx = kF(x)+c$

例題講解

【例 1】求下列函數的不定積分。

1. $\int x^3+x^2+2x+1\ dx$

解：原式$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+x+c$

2. $\int \sqrt[3]{x^2}\ dx$

解：原式$=\int x^{\frac{2}{3}}\ dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

啟示：所有根號形式的函數積分，都可以先化為分數指數冪的形式進行積分。

問題：$\int x^{\frac{n}{m}} dx$ 的結果是什麼？

（答案：$\int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{n+m} x^{\frac{n+m}{m}} + c$）

設計意圖：讓學生經歷從特殊到一般的過程，類比得出一般化的公式(不需記憶)。

3. $\int \sin t + 2\cos t \, dt$

解：原式$= -\cos t + 2\sin t + c$

4. $\int 2e^{x} - 3\sin x - \frac{1}{x} \, dx$

解：原式$= 2e^{x} + 3\cos x - \ln x + c$

設計意圖：對 t 積分，讓同學符號地分析思考，而不是符號化的認知。

課堂練習

設計意圖：對前面所學進行練習鞏固，並且常見的被積函數都必須齊備。

計算不定積分

1. $\int 4t^{4} + 10t^{2} + t + 1 \, dt$

2. $\int \sqrt[4]{x^{5}} \, dx$

3. $\int 3\cos x + 5\sin x \, dx$

4. $\int 2e^{x} + \frac{3}{x} \, dx$

課堂小結

微分逆運算 → 不定積分 → 如何表示

不定積分 → 如何計算 → 求導逆運算

不定積分 → 運算法則

課後功課

計算下列積分

1. $\int 2x^3+3x^2+x+2\ dx$
2. $\int \sqrt[4]{x^3}\ dx$
3. $\int 2\cos x-3\sin x\ dx$
4. $\int 2e^x-\frac{5}{x}\ dx$
5. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\ dx$
6. $\int \sqrt{x}(x-3)\ dx$
7. $\int (x-3)(x-2)\ dx$
8. $\int \frac{2}{2x+3}\ dx$

課堂小結

不定積分

求導公式	例 1	練習
不定積分		
常見例子		

定積分—第二課時

教學目標

- ➢ 知識目標

1.知道定積分的歷史、表示方法及符號意義。
2.瞭解定積分與不定積分的關係。
3.理解定積分的幾何意義。
4.掌握簡單定積分的運算性質。

- ➢ 技能目標

1.能根據微積分基本定理計算簡單的定積分。

- ➢ 情意目標

通過對定積分的學習，體會到積分“分割-求和”思想，同時經歷微積分中的發展歷史，學習前人的探索求知精神，瞭解微積分的作用，激發學生學習微積分的興趣。

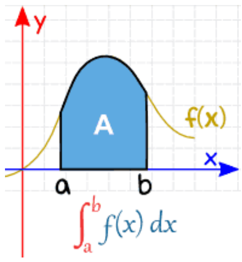
教學重點：微積分基本定理的運用
教學難點：分割求和與微積分基本定理的關係

按同學現在知識儲備，要從根上解釋清楚只要分割足夠小，達布求和可以用微積分基本定理來計算是困難的，本質上這涉及到微積分基本定理的證明。更多只能向學生闡述此結果，而定理證明並不是本節課的教學目標。因此只能轉化到只要分割得足夠小，求出的面積就足夠準確。這裡用我們運用 geogebra 動態分割，學生動手操作、觀察，在老師引導下得出相應結論。

對應基力：無。
教學過程：

講授新知

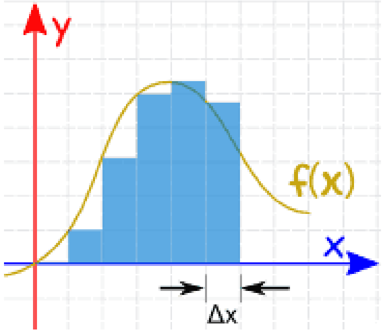
定積分的起源是算一些不規則圖形的面積。比如：



我們把區間$[a,b]$上的面積記為：$\int_a^b f(x)dx$。

這僅僅是一個記法。現在的問題是：如何計算不規則圖形的面積？

一開始肯定是無法直接得出精準面積，退而求其次，我們把圖形進行分割：



把曲線分割為一些很小的矩形面積，然後把矩形面積加起來就得到了原來不規則圖形的面積。

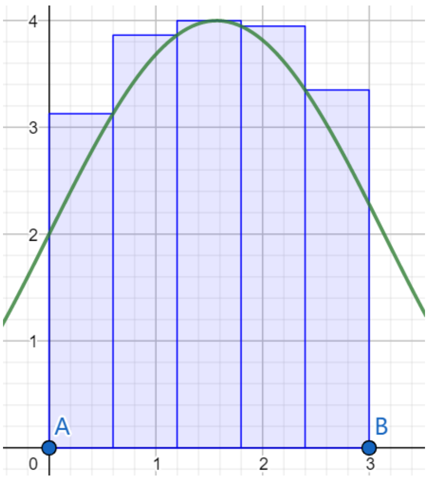
那我們如何確保矩形的面積就 100%等於原來不規則圖形的面積呢？

那就是把矩形劃分得無線細，此時每一個超級苗條的矩形面積就等於 $f(x_k)\Delta x_k$ ，

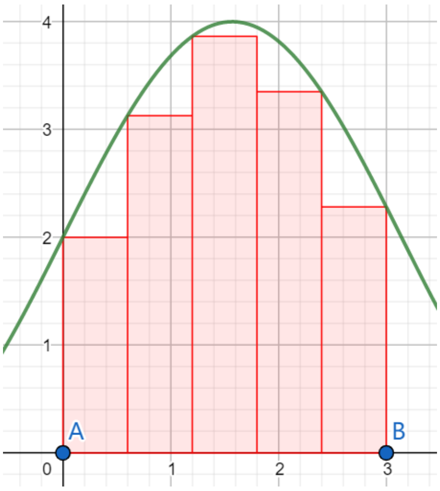
然後把這一堆矩形面積加起來就是 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ 。

但是分割 $(n=5)$ 出來的小矩形面積有兩種情形：

第一種是：

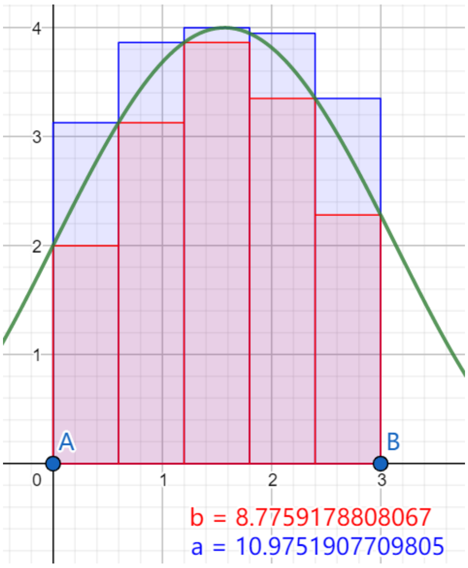


第二種是



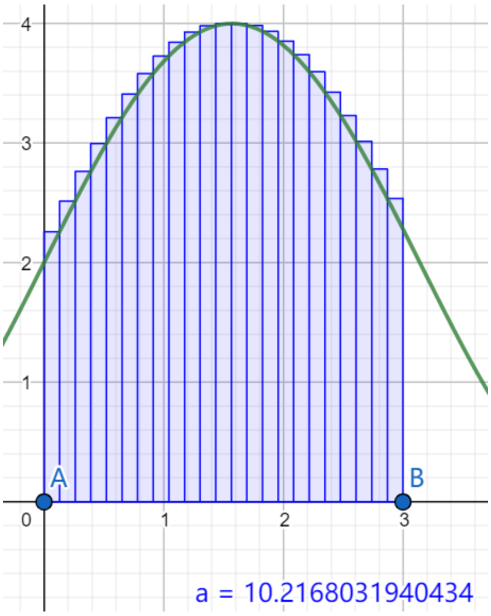
請學生觀察，並回答問題1：第一種分割得到的面積大還是第二種分割的面積大？

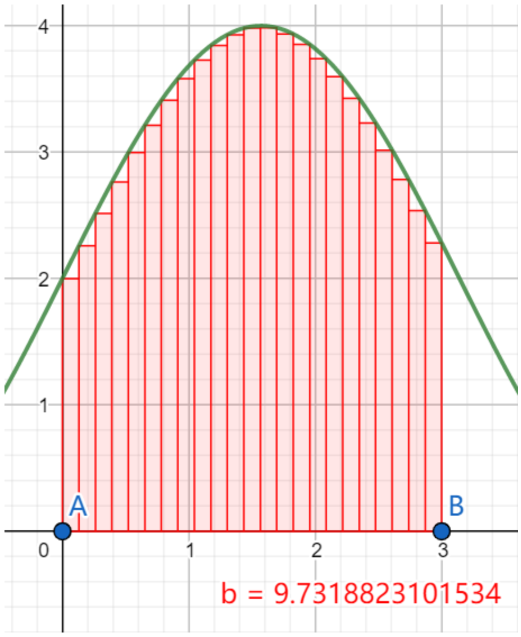
答案： $S_1 > S > S_2$



設計意圖：讓學生經歷觀察函數分割的直觀結果，同時吸引學生注意力，引出下面“只要分割足夠小，總可以精準表示實際面積”的結論。

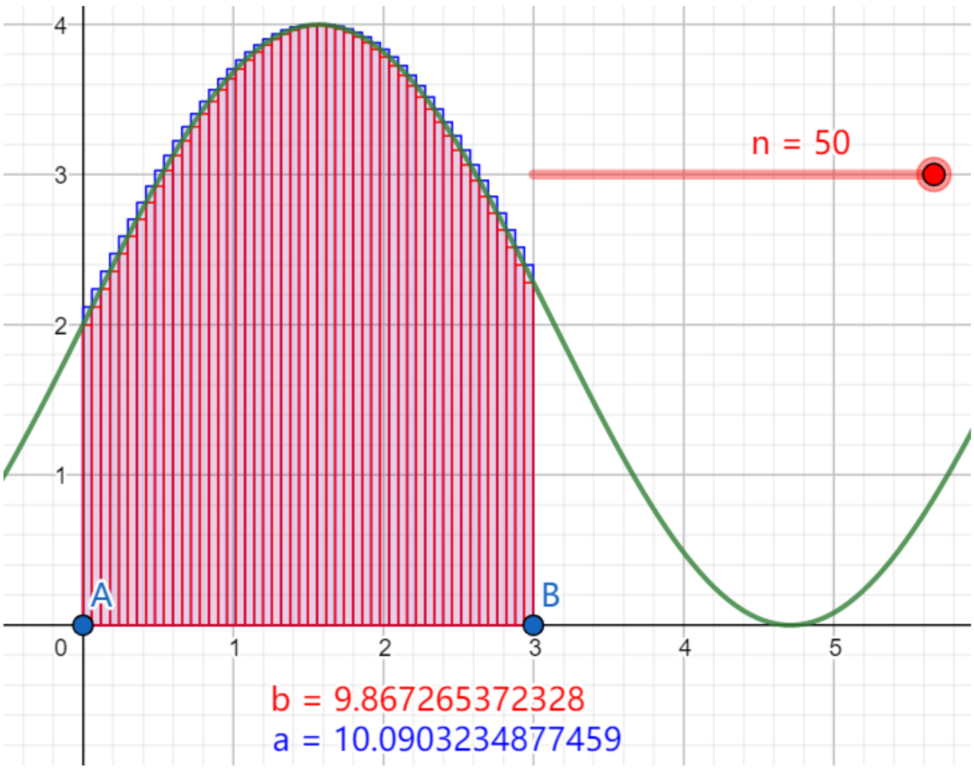
觀察 1：當分割得越來越多時 $(n=30)$ ， S_1, S_2 的變化會怎樣？





結論：兩者面積差值越來越接近！

思考 2：假設分割進一步放大，兩者的面積會進一步拉進嗎？
再結合 Geogebra 試試看！



結論：當分割越來越多， $S_1, S_2 \to S$ ！
即無論是第一種分割還是第二種分割， $n \to \infty$ 時(此時 $\Delta x \to 0$)都會等於真實面積。 ，這就是極限刻畫。
即不規則的面積為：

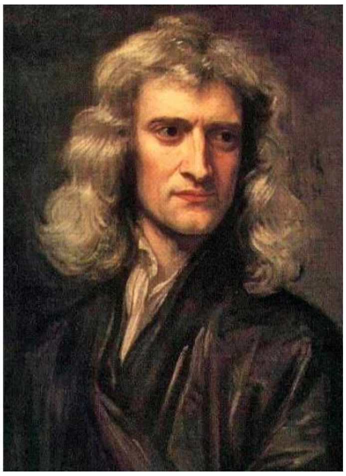
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

這是一個意思表達，很難具體執行計算。
事實上

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

這就是大名鼎鼎的微積分基本定理，它是由牛頓和萊佈尼茲獨立得出。
微積分的基本定理也叫「牛頓-萊布尼茨公式」，用兩個人的名字合在一起表示的。

數學文化



Isaac Newton
數學界、物理學界的祖師爺級別人物。
史上最伟大的物理學家之一和數學家之一。
人類歷史第一科學家的最有力競爭者。

Leibniz
數學家、哲學家、法律專家、神學研究者、歷史學家、科學院院長。發明微積分、提出單子論、啟蒙拓撲學、開拓二進位。
在《西方哲學史》裡贊為人類歷史智力巔峰。

設計意圖： 向學生講解微積分發展歷史的兩位數學家，介紹他們在自然科學中的貢獻，滲透數學文化元素，激發學生的學習興趣。

牛頓和萊佈尼茲的簡介

牛頓（Isaac Newton，1643 年 1 月 4 日—1727 年 3 月 31 日）是一位元元英格蘭物理學家、數學家、天文學家、自然哲學家和煉金術士。1687 年他發表《自然哲學的數學原理》，闡述了萬有引力和三大運動定律，奠定了此後三個世紀裡力學和天文學的基礎，成為了現代工程學的基礎。

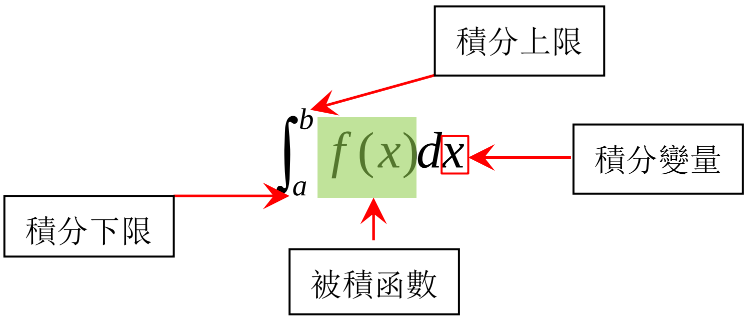
在力學上，牛頓闡明瞭動量和角動量守恆的原理。在光學上，他發明瞭反射望遠鏡，並基於對三棱鏡將白光發散成可見光譜的觀察，發展出了顏色理論。他還系統地表述了冷卻定律，並研究了音速。

在數學上，牛頓與戈特弗裡德·萊布尼茨分享了發展出微積分學的榮譽。他也證明瞭廣義二項式定理，提出了“牛頓法”以趨近函數的零點，並為冪級數的研究作出了貢獻。

戈特弗裡德·威廉·萊布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646 年 7 月 1 日 ---1716 年 11 月 14 日），德國思想家、哲學家、數學家、科學家、外交家、著述家。涉及的領域及法學、力學、光學、語言學等 40 多個範疇，被譽為 17 世紀的亞裡斯多德。

萊布尼茨 14 歲進入萊比錫大學，17 歲獲得哲學碩士學位，20 歲完成博士學位。萊比錫大學覺得年輕人 20 歲就拿博士學位，太不像話，愣是沒給他博士學位。一氣之下離開萊比錫，前往紐倫堡附近的阿爾特多夫大學，並立即向學校提交了早已準備好的那篇博士論文，1667 年 2 月，阿爾特多夫大學授予他法學博士學位，還聘請他為法學教授。

$\int_a^b f(x)dx$ 叫定積分。b 叫積分上限，a 叫積分下限，意思是函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上進行積分。



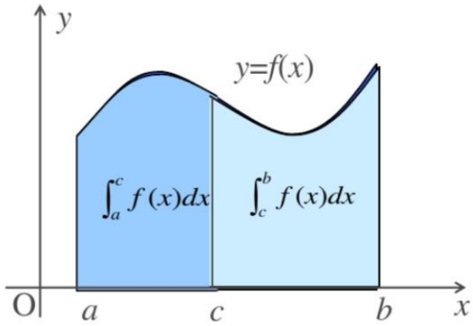
注意：

1. 定積分是一個求和的極限，結果是一個數。
2. 不定積分 $\int f(x)dx$ 是一組函數族，有沒有上下限是區別定積分和不定積分的標誌。
3. 積分上下限交換的話，會變為相反數：$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的結果與被積函數和積分區間有關，跟積分變量的記號無關。

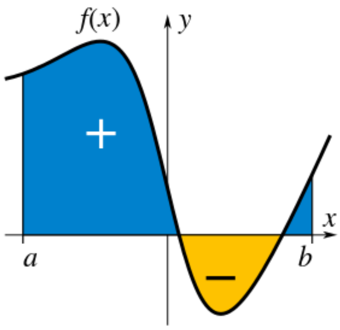
即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(s)ds$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

6. 如果 $a < c < b$ ，那麼 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



另外，如果函數在區間$[a,b]$有正有負時，在 x 軸下方的面積計算出來的是負值，此時就需要分開三部分計算。



積分的運算性質：

(1) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

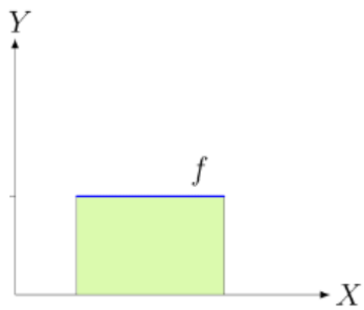
(2) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

事實上這兩條公式可以合二為一地表示為：

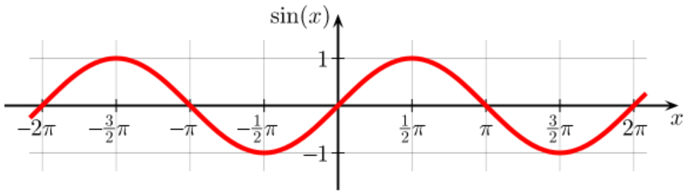
$$\int_a^b af(x) + bg(x)dx = a\int_a^b f(x)dx + b\int_a^b g(x)dx$$

例題講解

例 1 用積分方法計算圖中矩形面積。



例 2 計算 $y = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的面積。



課堂練習

(1)計算 $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ ，嘗試解釋這個積分結果？

設計意圖：讓同學根據計算結果，解釋結果，已在提醒同學在 x 軸下方時積分取值為負。

課後功課

工作紙

課堂小結

定積分的定義

定積分的歷史 → 定積分的計算 → 定積分的幾何意義

積分運算法則

板書設計

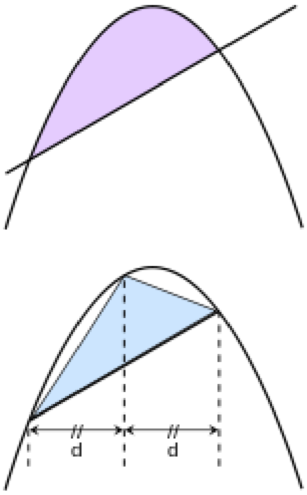
定積分

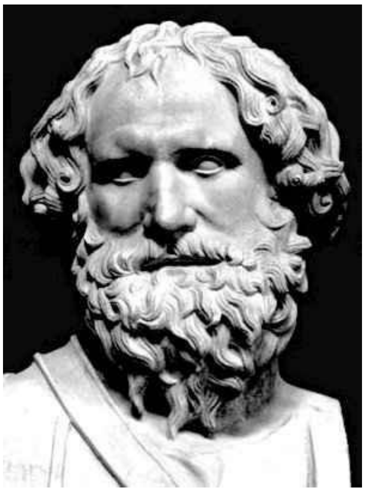
定積分意義	例 1	例 2
		練習

數學史與數學文化的滲透

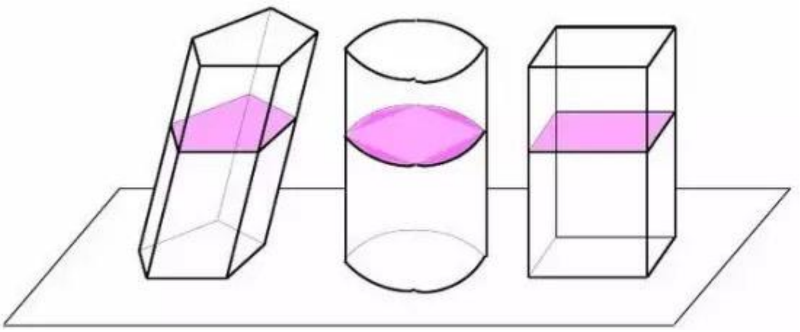
定積分的起源

積分的起源很早，古希臘時期歐多克索斯（約西元前 408-355 年）就曾用窮竭法來求面積與體積。阿基米德（約西元前 287-212 年）用內接正多邊形的周長來窮盡圓周長，而求得圓周率的近似值；也用一連串的三角形來填充拋物線的圖形，以求得其面積。這些都是窮盡法的古典例子。





我國劉徽在西元三世紀也應用窮竭法(即割圓術)求圓的面積。在西元五世紀，祖沖之的兒子祖暅採用類似原理計算出球體積(祖暅原理)。



歷史上積分觀念的形成比微分要早，但直到牛頓和萊佈尼茲的工作出現之前(17 世紀下半葉)，定積分的很多結果還是孤立零散的，直到牛頓-萊佈尼茲公式建立後，徹底刻畫了微分與積分的內在聯繫，至此定積分才迅速發展起來。
萊布尼茨和牛頓都被普遍認為是獨立的微積分發明者。牛頓最先將微積分應用到普通物理當中，而萊布尼茨創作了不少今天在微積分所使用的符號。

我們能以兩者中任意一者為起點來討論微積分學，但是在教學中一般會先引入微分學。在更深的數學領域中，高等微積分學通常被稱為分析學，並被定義為研究函數的科學，是高等數學的主要分支之一。

目前我們中學學的還是黎曼積分(Riemann integral)，即經典積分，事實上還有勒貝格積分(Lebesgue integral)，這是為了彌補經典積分下的一些不足而產生，現代積分一般是指勒貝格積分(Lebesgue integral)。

定積分—第三課時

教學目標

- ➢ 知識目標

1.會計算簡單的定積分。

2.學會把不規則圖形面積轉為定積分的計算。

- ➢ 技能目標

1.能畫出兩條相交曲線中的積分區域；

2.能運用定積分計算相交區域的面積。

- ➢ 情意目標

瞭解微積分在計算不規則區域面積作用，激發學生學習微積分的興趣。

教學重點：微積分基本定理的運用

教學難點：運用微積分計算不規則區域的面積

對應基力：無。

教學過程：

溫故知新

1. 如何計算定積分？

先算不定積分 → 計算積分上限數值 → 作差，結果為積分值

先算不定積分 → 計算積分下限數值 → 作差，結果為積分值

講練結合

例 1 計算定積分。

1. $\int_1^2 x^3+x^2+2x+1\ dx$

解：原式$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+x\Big|_1^2$

$$=\frac{1}{4}\times 2^4+\frac{1}{3}\times 2^3+2^2+2-\left(\frac{1}{4}\times 1^4+\frac{1}{3}\times 1^3+1^2+1\right)$$

? ?

2. $\int_1^2 \sqrt[3]{x^2}\ dx$

解：原式$=\int_1^2 x^{\frac{2}{3}}dx$

3. $\int_0^{2\pi} 2e^x-3\sin x-\cos x dx$

設計意圖：讓同學經歷各種常見的初等積分，打好運算基本功。

解：原式$=2e^x+3\cos x-\sin x\Big|_0^{2\pi}$

$=\left(2e^{2\pi}+3\cos 2\pi-\sin 2\pi\right)-\left(2e^0+3\cos 0-\sin 0\right)$

$=\left(2e^{2\pi}+3-0\right)-\left(2+3-0\right)$

$=2e^{2\pi}-2$

4. $\int_1^2 2\cos 2x dx$

解：原式$=\sin 2x\Big|_0^{2\pi}$

$=\left(\sin 2\cdot 2\pi\right)-\sin 0$

$=0$

練習

1. $\int_0^2 2x^3+3x^2+x+2\ dx$

2. $\int_0^1 \sqrt[4]{x^3}\ dx$

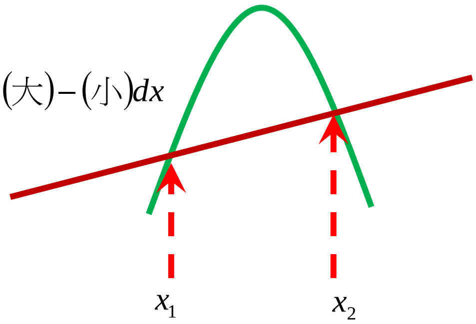
3. $\int_0^{\pi} 3\sin x-\cos x dx$

4. $\int_1^2 e^x-\frac{5}{x}\ dx$

例 2　求由曲線 $y=-x^2-x-4$ 和直線 $y=5x+4$ 所包圍的區域的面積。

分析：首先要學會繪圖。前者是個開口向上還是向下的拋物線？

$S=\int_{x_1}^{x_2}(大)-(小)dx$



啟示：同學能根據題意畫出對應的區域。區域上方的是“較大”的函數，區域下方是“較小”的函數。

解：

聯合 $\begin{cases} y=-x^2-x-4 \\ y=5x+4 \end{cases}$ 求得 $\begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=-2 \end{cases}$

$\therefore S=\int_{-4}^{-2}\left(-x^2-x-4\right)-\left(5x+4\right)dx$

$=\int_{-4}^{-2}-x^2-6x-8dx$

$=-\frac{1}{3}x^3-3x^2-8x\Big|_{-4}^{-2}$

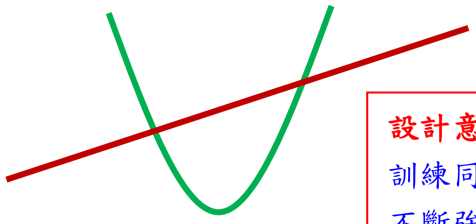
設計意圖：發揮同學主觀能動性，根據前面過程自己總結求不規則圖形面積的步驟

請同學總結：

求區域面積步驟有哪些？

1. 根據題意畫出區域的草圖；
2. 聯立方程組，求出區域兩側交點的橫坐標(無須求縱坐標)；
3. 確定圖像的高低對於的函數；
4. 寫出面積的積分表達式；
5. 計算定積分。

如果把問題改為：求由曲線 $y=2x^2-x-4$ 和直線 $y=5x+3$ 所包圍的區域的面積，應該怎麼算？



設計意圖：提出類似問題，訓練同學舉一反三的能力，不斷強化學生認識。

答案： $S=\int_{x_1}^{x_2}(5x+3)-(2x^2-x-4)dx$

練習 4（四校模擬卷）求由曲線 $y=5-x^2$ 和直線 $y=x-1$ 所包圍的區域的面積。

課堂功課

工作紙對應練習

課堂小結

區域面積的計算步驟

畫出草圖
↓
計算交點
↓
注意區域上下函數，確定表達式
↓
計算積分

板書設計

定積分的計算

例 1

例 2

練習

計算區域面積步驟

定積分的應用—第四課時

教學目標

- 知識目標

能將不規則圖形面積轉為定積分的計算。

- 技能目標

1.能計算曲線交點，畫出兩條相交曲線中的積分區域；
2.能運用定積分計算相交區域的面積。

- 情意目標

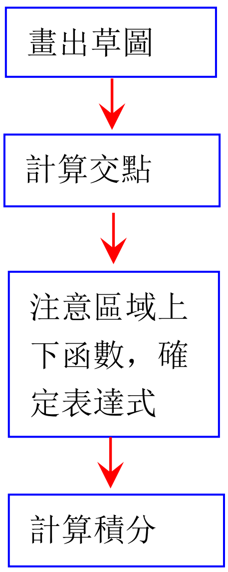
瞭解微積分在計算不規則區域面積作用，激發學生學習微積分的興趣。

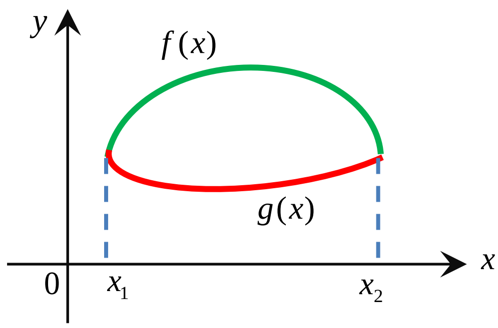
教學重點：微積分基本定理的運用
教學難點：運用微積分計算不規則區域的面積

要計算不規則區域的面積，首先要能畫出積分區域的草圖，而積分區域的確定有依賴於同學對常見的一次函數、二次函數、三次函數、絕對值函數及其函數性質的掌握，綜合性較強。而本班學生前面已經學過分析三次函數的函數形態(單調區間、拐點等等)，已具備基本的知識基礎。

對應基力：無。
教學過程：

溫故知新



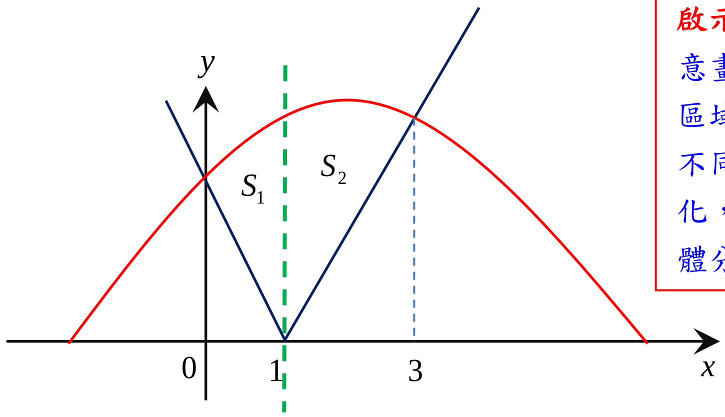


$$S=\int_{x_1}^{x_2} f(x)-g(x)dx$$

講練結合

例 1(2019 四校)求由曲線 $y=-x^2+4x+3$ 和直線 $y=3|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

分析：先畫出區域，主要困難是絕對值函數的圖像。



啟示：同學能根據題意畫出對應的區域。區域上下方的函數在不同的區間會有所變化，注意具體問題具體分析。

解：分情況討論，

$$\begin{cases} x>1 \\ y=3x-3 \\ y=-x^2+4x=3 \end{cases}\qquad \text{解得 } x=3\text{（}-2\text{ 捨去）}$$

$$\begin{cases} x<1 \\ y=3-3x \\ y=-x^2+4x=3 \end{cases}\qquad \text{解得 } x=0\text{（}7\text{ 捨去）}$$

$$\therefore S=S_1+S_2=\int_0^1\left(-x^2+4x+3\right)-(3-3x)dx+\int_1^3\left(-x^2+4x+3\right)-(3x-3)dx$$

練習 1 求由曲線 $y=-x^2+2x+4$ 和直線 $y=4|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

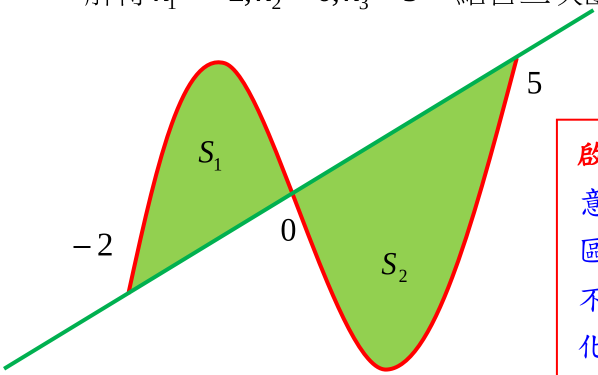
例 2(2018 四校)　求由曲線 $y=x^3-3x^2-9x+2$ 和直線 $y=x+2$ 所包圍的區域的面積。

分析：主要困難在於確定區域面積。首先要對三次函數有所瞭解，其次根據交點確定大概區域。

解：聯立方程組

$\begin{cases} y=x^3-3x^2-9x+2 \\ y=x+2 \end{cases}$，解得 $x_1=-2, x_2=0, x_3=5$，結合三次函數圖像可知

x^3-3x^2-9x+2

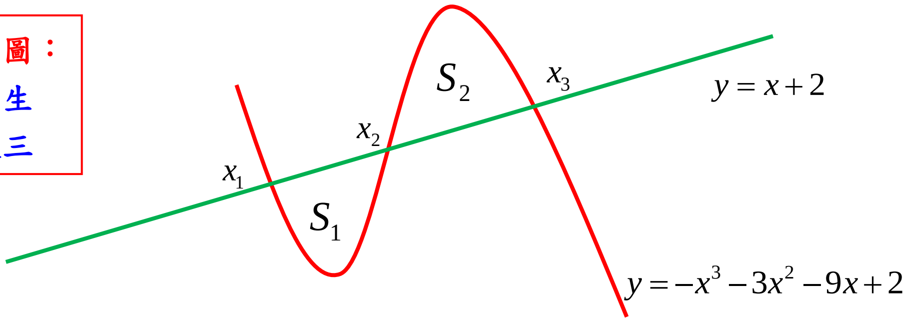


啟示：同學能根據題意畫出對應的區域。區域上下方的函數在不同的區間會有所變化，注意具體問題具體分析。

可知 $S=S_1+S_2=\int_{-2}^0\left(x^3-3x^2-9x+2\right)-(x+2)dx+\int_0^5(x+2)-\left(x^3-3x^2-9x+2\right)dx$

反思：
(1)如果只有交點，還有其他方法可知函數的相對大小。比如取 $-1\in(-2,0)$，代入兩函數就可知大小。
(2)如果三次函數最高次為負，假設變為 $y=-x^3-3x^2-9x+2$，此時區域變為什麼樣？

設計意圖：
訓練學生
舉一反三



假設有交點橫坐標，則面積表達式怎麼寫？(同學上黑板表示)

練習 2　求由曲線 $y=x^3-5x^2+10x+3$ 和直線 $y=4x+3$ 所包圍的區域的面積。

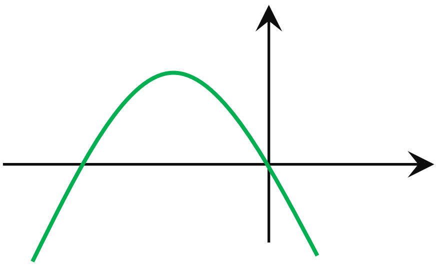
例 3(2017 四校) 求 a 的值，使得由曲線 $y=ax(a-x)$ 和 x 軸所包圍的區域的面積為 $\frac{8}{3}$。

解：聯立方程組

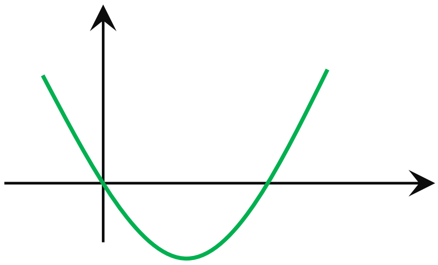
$$\begin{cases} y=ax(a-x) \\ y=0 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x_1=a \\ x_2=0 \end{cases}$$

a 的正負對於積分表達式有影響，需討論。

當 $a>0$ 時，圖像為



當 $a<0$ 時，圖像為



依題意得

$$-\int_0^a ax(a-x)dx=\frac{8}{3}$$

解得 $a=2$

$$\int_a^0 ax(a-x)dx=\frac{8}{3}$$

解得 $a=-2$

綜上所述，$a=2$ 或 -2。

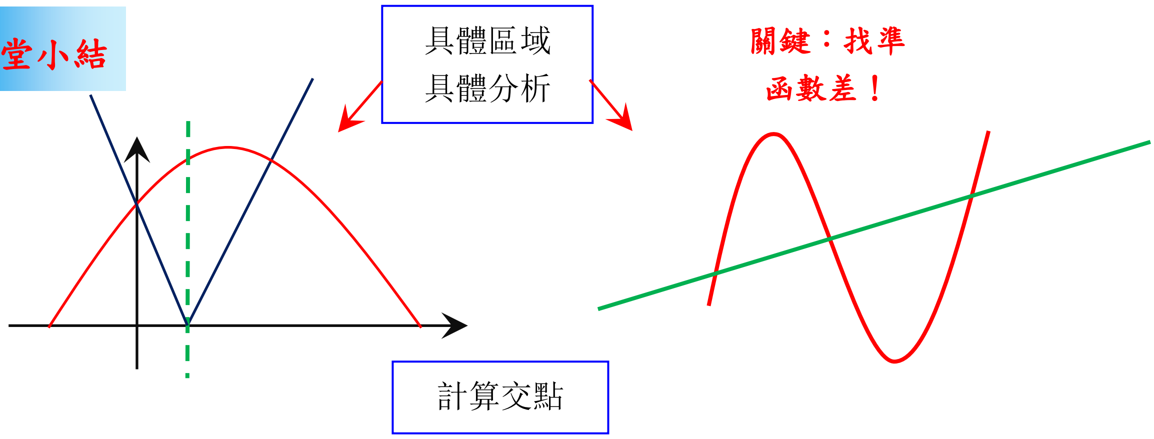
解法二：

$$\left|\int_0^a ax(a-x)dx\right|=\frac{8}{3}$$

$$\left|\frac{a^4}{6}\right|=\frac{8}{3}$$

$$a=2 或 -2$$

課堂小結



課後功課

1. 求由曲線 $y=-x^2-6x+10$ 和直線 $y=x+2$ 所包圍的區域的面積。

2. 求由曲線 $y=3x^2+2x-5$ 和直線 $y=x-3$ 所包圍的區域的面積。

3. 求由曲線 $y=-x^2+2x+6$ 和直線 $y=3|x-2|$ 所包圍的區域的面積。

4. 求由曲線 $y=-x^2+2x+7$ 和直線 $y=2|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

5. 求由曲線 $y=x^3-2x^2-x+4$ 和直線 $y=2x+4$ 所包圍的區域的面積。

板書設計

定積分的應用

例 1　　例 2　　例 3

三、試教評估與反思建議

整體上看，同學較好地掌握了簡單的積分計算及積分的運演算法則。由於定積分主要建立在不定積分的基礎上，所以掌握好不定積分的計算是重要的。考慮到四校聯考以及基本學力的要求，本教案的教學目標定位於高於學力要求，與四校聯考附加卷要求難度看齊，具體表現在定積分的應用上，設計的例題都是以升大試題為基礎，對應的練習或功課都是難度相當的題目。

在前面的積分計算中，我們並沒有引入太多設計到復合函數的積分，只保留了最低限度稍難的積分。結合之前經驗，同學對於復合函數的微分有所遺忘，而且也確實不適合一開始就堆難度較大的積分，這可能會打擊同學的信心。況且從中學角度來看，這種難度已經基本夠用了。

在牛頓-萊佈尼茲的公式介紹中，同學對於數學史上的故事較感興趣，不過似乎同學對於牛頓在物理學上的成就更加清楚，牛頓的三大理學定理也能娓娓道來，如數家珍。

從同學的筆記和功課表現來看，絕大部分同學都能掌握基本的積分運算，也能用積分去計算由簡單函數圍成的不規則區域面積。由於積分計算往往比較繁雜，也留意到有一部分同學在解答過程中思路正確但最終運算結果錯誤的情形，這是正常現象。

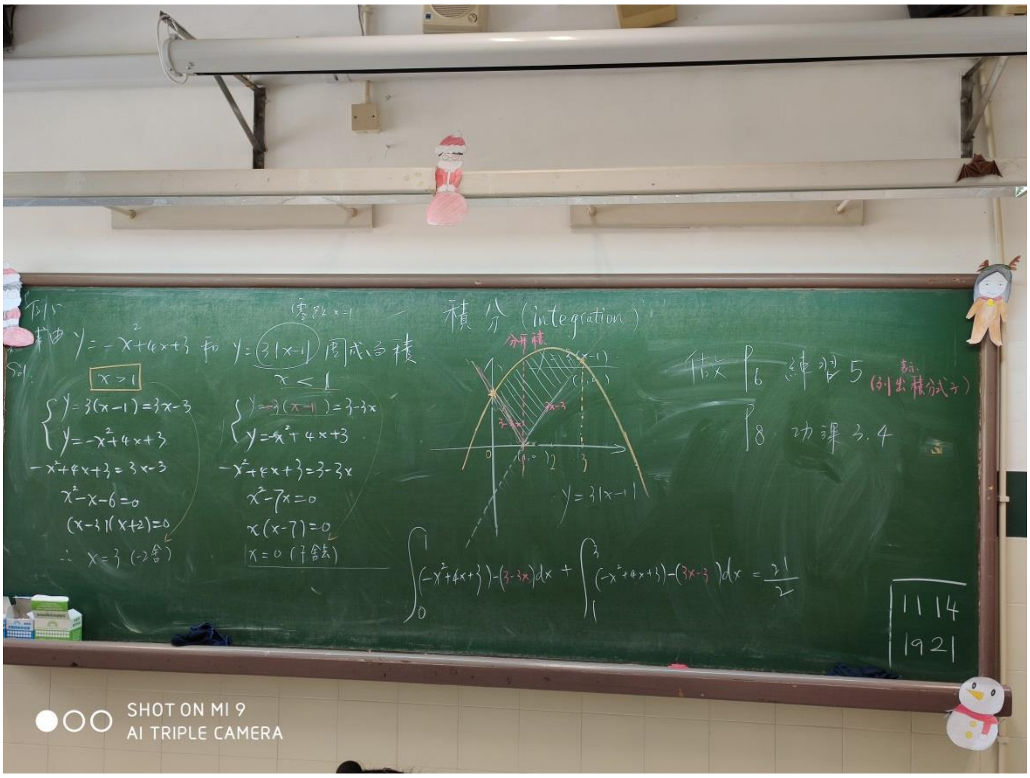
肆、參考文獻

校本教材　第十五章　　微積分初步

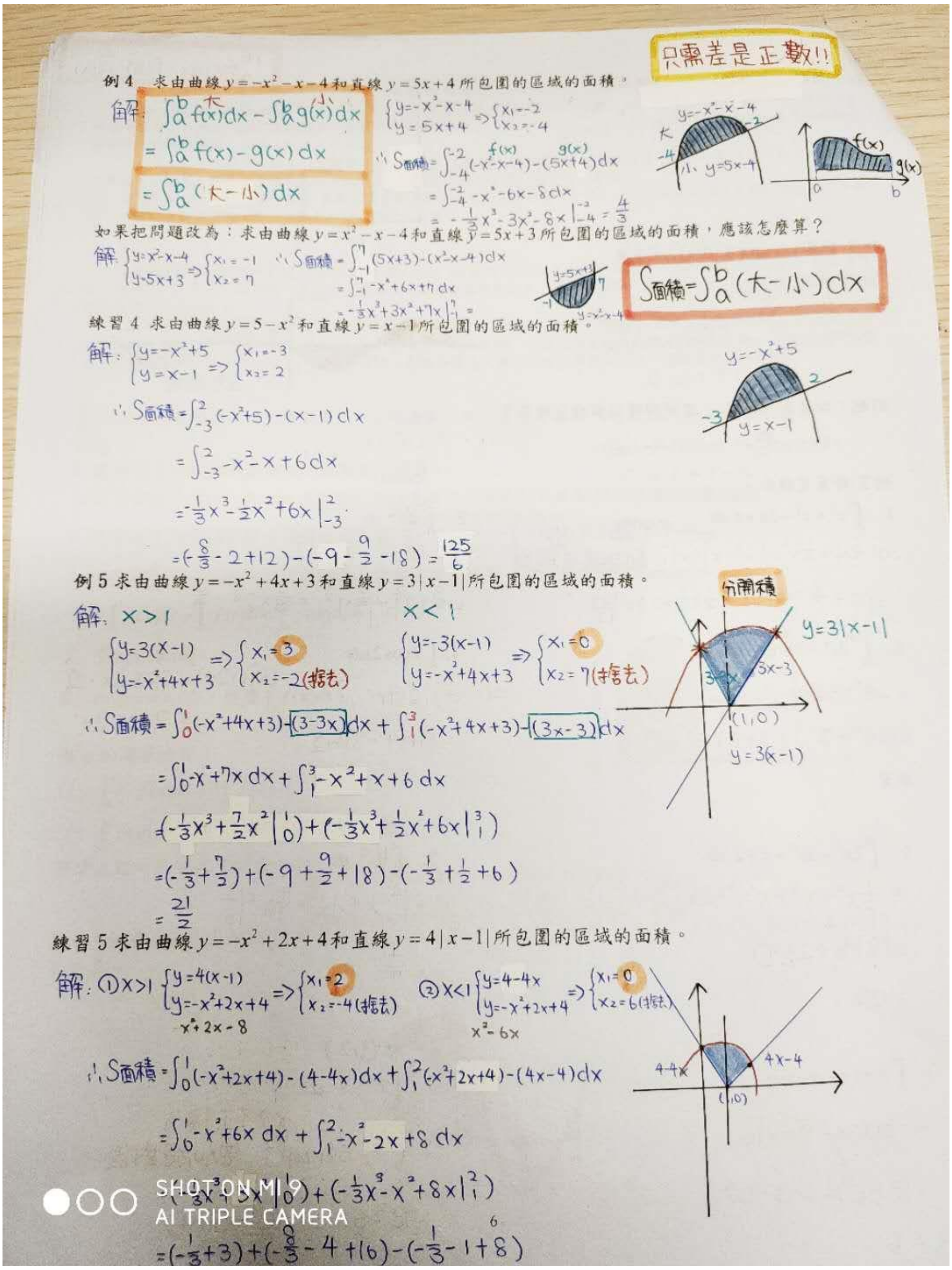
伍、相關教材

輔助教學資料

一、 教學圖片



附錄



只需差是正數!!

例 4 求由曲線 $y=-x^2-x-4$ 和直線 $y=5x+4$ 所包圍的區域的面積。

解：$\int_a^b \overset{大}{f(x)}dx - \int_a^b \overset{小}{g(x)}dx$

$= \int_a^b f(x)-g(x)\,dx$

$= \int_a^b (大-小)\,dx$

$\begin{cases} y=-x^2-x-4 \\ y=5x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-4 \end{cases}$

$\therefore S_{面積} = \int_{-4}^{-2} \overset{f(x)}{(-x^2-x-4)} - \overset{g(x)}{(5x+4)}\,dx$

$= \int_{-4}^{-2} -x^2-6x-8\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3-3x^2-8x\Big|_{-4}^{-2} = \frac{4}{3}$

如果把問題改為：求由曲線 $y=x^2-x-4$ 和直線 $y=5x+3$ 所包圍的區域的面積，應該怎麼算？

解 $\begin{cases} y=x^2-x-4 \\ y=5x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=7 \end{cases}$ $\therefore S_{面積} = \int_{-1}^{7} (5x+3)-(x^2-x-4)\,dx$

$= \int_{-1}^{7} -x^2+6x+7\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x\Big|_{-1}^{7} =$

$S_{面積} = \int_a^b (大-小)\,dx$

練習 4 求由曲線 $y=5-x^2$ 和直線 $y=x-1$ 所包圍的區域的面積。

解：$\begin{cases} y=-x^2+5 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{cases}$

$\therefore S_{面積} = \int_{-3}^{2} (-x^2+5)-(x-1)\,dx$

$= \int_{-3}^{2} -x^2-x+6\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\Big|_{-3}^{2}$

$= (-\frac{8}{3}-2+12)-(-9-\frac{9}{2}-18) = \frac{125}{6}$

例 5 求由曲線 $y=-x^2+4x+3$ 和直線 $y=3|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

分開積

解：$x>1$

$\begin{cases} y=3(x-1) \\ y=-x^2+4x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-2\text{(捨去)} \end{cases}$

$x<1$

$\begin{cases} y=-3(x-1) \\ y=-x^2+4x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=7\text{(捨去)} \end{cases}$

$\therefore S_{面積} = \int_0^1 (-x^2+4x+3)-\boxed{(3-3x)}\,dx + \int_1^3 (-x^2+4x+3)-\boxed{(3x-3)}\,dx$

$= \int_0^1 -x^2+7x\,dx + \int_1^3 -x^2+x+6\,dx$

$= (-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\Big|_0^1) + (-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\Big|_1^3)$

$= (-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}) + (-9+\frac{9}{2}+18) - (-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+6)$

$= \frac{21}{2}$

練習 5 求由曲線 $y=-x^2+2x+4$ 和直線 $y=4|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

解：① $x>1$ $\begin{cases} y=4(x-1) \\ y=-x^2+2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-4\text{(捨去)} \end{cases}$

x^2+2x-8

② $x<1$ $\begin{cases} y=4-4x \\ y=-x^2+2x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=6\text{(捨去)} \end{cases}$

x^2-6x

$\therefore S_{面積} = \int_0^1 (-x^2+2x+4)-(4-4x)\,dx + \int_1^2 (-x^2+2x+4)-(4x-4)\,dx$

$= \int_0^1 -x^2+6x\,dx + \int_1^2 -x^2-2x+8\,dx$

$(-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big|_0^1) + (-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\Big|_1^2)$

$= (-\frac{1}{3}+3) + (-\frac{8}{3}-4+16) - (-\frac{1}{3}-1+8)$

例 6　求由曲線 $y=x^3-3x^2-9x+2$ 和直線 $y=x+2$ 所包圍的區域的面積。

先合拼再積分

解：令 $x^3-3x^2-9x+2=x+2$

$x^3-3x^2-10x=0$

$x(x^2-3x-10)=0$

$x(x-5)(x+2)=0$

$\therefore x_1=-2$；$x_2=0$；$x_3=5$

(−1)　(1)

分析：代 −1，$-1-3+9+2>1$

代 1，$1-3-9+2<3$

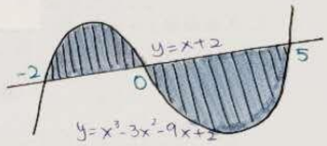
代 $-1\in(-2,0)$，$x^3-3x^2-9x+2>x+2$

代 $1\in(0,5)$，$x+2>x^3-3x^2-9x+2$

$\therefore S_{面積}=\int_{-2}^{0}\underbrace{(x^3-3x^2-9x+2)-(x+2)}_{x^3-3x^2-10x}dx+\int_{0}^{5}\underbrace{(x+2)-(x^3-3x^2-9x+2)}_{-x^3+3x^2+10x}dx$

$=\frac{1}{4}x^4-x^3-5x^2\Big|_{-2}^{0}+-\frac{1}{4}x^4+x^3+5x\Big|_{0}^{5}$

$=\frac{407}{4}$



練習 6　求由曲線 $y=x^3-5x^2+10x+3$ 和直線 $y=4x+3$ 所包圍的區域的面積。

解：令 $x^3-5x^2+10x+3=4x+3$

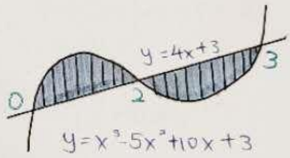
$x^3-5x^2+6x=0$

$x(x^2-5x+6)=0$

$\therefore x_1=0$；$x_2=2$；$x_3=3$

代 $1\in(0,2)$，$1-5+10+3>4+3$

代 $\frac{5}{2}\in(2,3)$，$\frac{125}{8}-\frac{125}{4}+25+3<10+3$



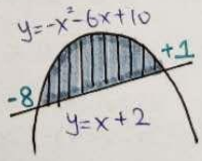
$\therefore S_{面積}=\int_{0}^{2}\underbrace{(x^3-5x^2+10x+3)-(4x+3)}_{x^3-5x^2+6x}dx+\int_{2}^{3}\underbrace{(4x+3)-(x^3-5x^2+10x+3)}_{-x^3+5x^2-6x}dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\Big|_{0}^{2}+-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-3x^2\Big|_{2}^{3}$

功課

1. 求由曲線 $y=-x^2-6x+10$ 和直線 $y=x+2$ 所包圍的區域的面積。

解：$\begin{cases}y=-x^2-6x+10\\y=x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-8\\x=+1\end{cases}$　(x^2+7x-8)



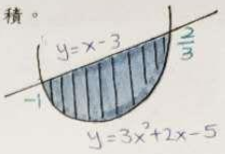
$\therefore S_{面積}=\int_{-8}^{1}(-x^2-6x+10)-(x+2)\,dx$

$=\int_{-8}^{1}-x^2-7x+8\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+8x\Big|_{-8}^{1}$

7

2. 求由曲線 $y=3x^2+2x-5$ 和直線 $y=x-3$ 所包圍的區域的面積。



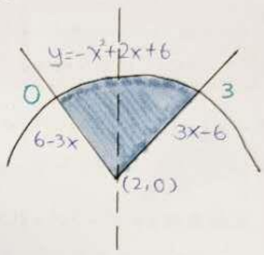
解: $\begin{cases} y=\overset{3x^2+x-2}{3x^2+2x-5} \\ y=x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\therefore$ S面積 $=\int_{-1}^{\frac{2}{3}}(x-3)-(3x^2+2x-5)dx$

$=\int_{-1}^{\frac{2}{3}}-3x^2-x+2\,dx$

$=-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\Big|_{-1}^{\frac{2}{3}}$ $=$??

3. 求由曲線 $y=-x^2+2x+6$ 和直線 $y=3|x-2|$ 所包圍的區域的面積。



解: ① $x>2$ $\begin{cases} y=3x-6 \\ y=-x^2+2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-4 \text{ (捨去)} \end{cases}$
x^2+x-12

② $x<2$ $\begin{cases} y=6-3x \\ y=-x^2+2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=5 \text{ (捨去)} \end{cases}$
x^2-5x

$\therefore$ S面積 $=\int_0^2-x^2-x+12\,dx+\int_2^3-x^2+5x\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+12x\Big|_0^2+-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\Big|_2^3$

$=(-\frac{8}{3}-2+24)+(-9+\frac{45}{2})-(-\frac{8}{3}+10)$

$=\frac{-16-12+144-54+135+16-60}{6}=\frac{121}{6}$

4. 求由曲線 $y=-x^2+2x+7$ 和直線 $y=2|x-1|$ 所包圍的區域的面積。

解: ① $x>1$ $\begin{cases} y=2(x-1) \\ y=-x^2+2x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \text{ (捨去)} \end{cases}$
x^2-9

② $x<1$ $\begin{cases} y=2-2x \\ y=-x^2+2x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=5 \text{ (捨去)} \end{cases}$
x^2-4x-5

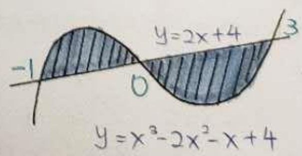
$\therefore$ S面積 $=\int_{-1}^{1}\overset{-x^2+9}{-x^2+2x+7-2x+2}\,dx+\int_1^3\overset{-x^2+4x+5}{-x^2+2x+7-2+2x}\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+9x\Big|_{-1}^{1}+-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\Big|_1^3$

$=(-\frac{1}{3}+9)-(\frac{1}{3}-9)+(-9+18+15)-(-\frac{1}{3}+2+5)$

$=-\frac{1}{3}+35=34\frac{2}{3}$

5. 求由曲線 $y=x^3-2x^2-x+4$ 和直線 $y=2x+4$ 所包圍的區域的面積。



解: 令 $x^3-2x^2-x+4=2x+4$

$x^3-2x^2-3x=0$

$x(x^2-2x-3)=0$

$\therefore x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=3$

代 $-\frac{1}{2}\in(-1,0)$, $-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4>-1+4$

代 $1\in(0,3)$, $1-2-1+4<2+4$

$\therefore$ S面積 $=\int_{-1}^{0}\overset{x^3-2x^2-3x}{(x^3-2x^2-x+4)-(2x+4)}\,dx+\int_0^3\overset{-x^3+2x^2+3x}{(2x+4)-(x^3-2x^2-x+4)}\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^3$

8

$=-(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2})+(-\frac{81}{4}+18+\frac{27}{2})$