2019/2020 學年教學設計獎勵計劃

函數的導數

參選類型：教案

參選編號：C032

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高三

簡介

今年是教青局基力全面實施的一年。按照高中基本學力要求，需要講授與微積分相關的課程。而根據往年的教學設計獎勵，還沒有同行就微分部分撰寫過教學設計，有見於此我們決定補上這一塊空白，期待拋磚引玉。

函數的導函數簡稱導數。導數是建立在極限的描述基礎，導數刻畫了原函數的變化情況。而本單元主要內容是導數的定義、求導法則、各種運演算法則下的求導運算和復合函數的求導。

對於部分同學來說，有些求導法則是可以推導出來的，有些卻不是，不過我們並不要求所有同學都掌握所有求導法則的推導過程。同學只要記得求導公式並能正確求得函數的導數即可。復合函數的求導是本單元學習的難點，這主要是因為復合函數是不同函數之間嵌套所得，而不是常見基本初等函數經加減乘除運算所得，對復合函數求導必須首先能正確認知函數的嵌套結構。

值得一提的是，教案的第四課時中重點結合了今年來四校聯考的一些相關題型，讓學生提前適應升大考試要求，而不僅僅滿足於一般教學目標。

教案中用了多種方法輔助、促進同學關於導數的理解，並力求教案佈局清晰，注重資訊教學技術的配合，並輔助配套的即時練習及時讓學生反饋所學，每節課的最後輔助學生構建本節課的知識體系，收到了良好的教學效能。

目次

教學進度表

作品名稱	函數的導數			人數	33 人
實施年級	高三			總實施節數[註]	5 節
實施日期	2019 年 9 月 11 日- 9 月 13 日			每節課時	40 分鐘
科目	數學			科目每週節數	8 節
預計授課日期（年-月-日）	**節數**	**課節**	**課題名稱**	**課題內容**	**課時（分鐘）**
2019 年 9 月 11 日	2	第一課節	函數的導數	導數的定義和求導法則	80
2019 年 9 月 12 日	2	第二課節	函數的導數	導數的運演算法則、二階導數	80
2020 年 1 月 10 日	1	第三課節	函數的導數	復合函數的導數	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

知識目標

1.瞭解導數概念的實際背景，知道瞬時變化率就是導數。

2.理解導數的幾何意義，瞭解導數與函數切線的關係。

3.掌握六種基本初等函數的求導結果和運演算法則。

4.瞭解復合函數的結構特徵，掌握簡單復合函數的求導。

5.瞭解二階導數的概念及其表示。

技能目標

1.能運用導數的極限定義去計算簡單函數的導數。

2.會用導數求出曲線在指定點之切線方程和法線方程。

3.能利用給出的基本初等函數的導數公式和導數的四則運演算法則求簡單函數的導數。

4.能正確計算簡單函數的二階導數。

5.會識別簡單復合函數的結構,能計算復合函數的導數並能藉助互聯網驗證之。

情意目標

通過對導數定義的理解，體會導數在刻畫函數形態、計算切線斜率、計算單調區間的重要作用，增加學習導數的興趣。

二、主要內容

本單元的主要內容為導數的定義,計算和函數加減乘除下對應的求導法則。包含二階導數和復合函數求導的運算。

三、設計創意和特色

1.積極滲透數形結合的數學思想，讓學生經歷函數切線逼近下導數的幾何意義，體會導數的極限思想。

2.教案條理清晰，個別例子結合幾何畫板進行驗證，增強學生的學習興趣和學習信心。

3.結合資訊科技，挖掘互聯網相關教學視頻，讓學生經歷不同的教學環境，在不同的角度下理解、增強對知識點的認識。其中個別教節還引入 QR-code，學生可以進行拓展學習。

4.教案第四課時中重點結合了今年來四校聯考的一些相關題型，讓學生提前適應升大考試要求，而不僅僅滿足於一般教學目標，有一定的前瞻性。

5.引導教學生學習較難的復合函數求導時，先讓學生對復合函數結構有所瞭解，並動手參與到復合函數的構造上來，在循序漸進學習復合函數的求導。 最後結合互聯網幫助開拓視野，引導學生通過網絡驗證自己所學、所算結果是否正確。

四、教學重點

導數的定義，函數的導數和導數的運演算法則。

五、教學難點

導數的定義及其幾何意義、復合函數的求導

六、教學用具

PPT、幾何畫板、計算機

貳、教案

函數的導數—第一課時

教學目標

- 知識目標

1.瞭解導數概念的實際背景，知道瞬時變化率就是導數。

2.理解導數的幾何意義，瞭解導數與函數切線的關係。

- 技能目標

1.能運用導數的極限定義去計算簡單函數的導數。

- 情意目標

通過對導數定義的理解，體會導數在刻畫函數形態和計算切線斜率的重要作用，增加學習導數的興趣。同時瞭解微積分的發展歷史，學習先賢在探索數學中嚴謹的治學態度。

教學重點：導數的定義

教學難點：運用導數的極限定義計算簡單函數的導數

教學用具：幾何畫板、電腦

對應基力：D-1-1 瞭解導數概念的實際背景，知道瞬時變化率就是導數。

知識引入

前面我們學習了極限和連續的概念。這節課我們學習導數。什麼是導數呢？就是函數在每一點的變化率。什麼是變化率呢？就是因變量增量與自變量增量的比值。

確定函數 $f(x)$ 的一點 x_0，它對應的函數值是 $f(x_0)$，如果這個點 x_0 移動了一點點 $\Delta x(\to 0)$，即此時為 $x_0+\Delta x$，對應的函數值自然是 $f(x_0+\Delta x)$，那麼變化率為：

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}$$

從式子結構來說，這個變化率就是“差商”。即分子分母作差，作差的結果即為變化，相除是比率，因此差商就是“變化率”。

如果我們作圖分析，就是對應兩點的斜率。

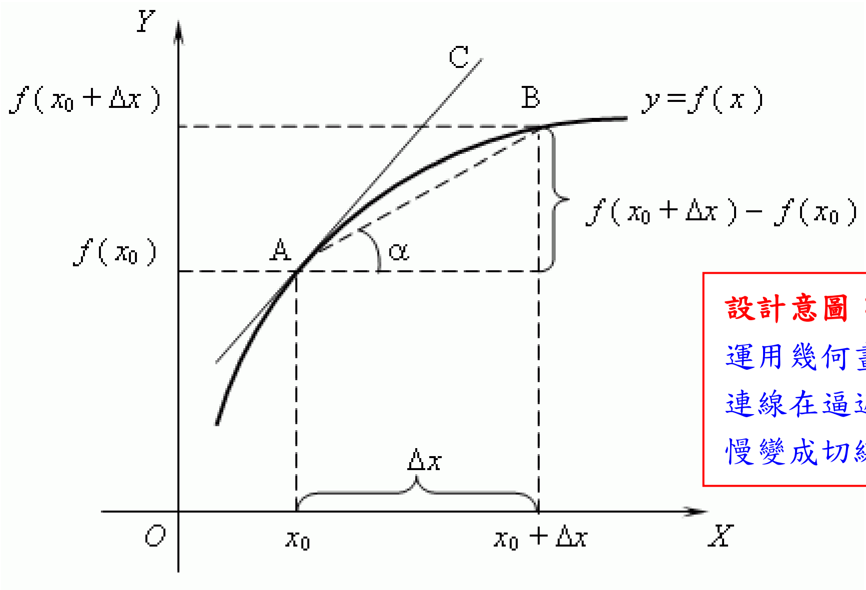


Fig. 1

設計意圖：
運用幾何畫板，讓學生兩點連線在逼近過程中割線會慢慢變成切線。

當 $\Delta x(\to 0)$ 時，兩點越來越靠近，最終所得的直線蛻變成這一點的切線。可知 x_0 點處對應的切線斜率為：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0}$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，這是一個瞬時變化率。

當然這個 x_0 是我們隨便選定的，可以隨意變化，為了體現選取的一般性我們用 x 去代替式子的 x_0 ，這樣我們就得到了函數在所有點處的變化率函數：

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

在中學階段，微分可以粗略地叫做“導數”。所以這兩個名字**暫時**可以認為是一樣的。中學學過的函數都有對應的函數圖像，函數圖像上的每一點都有對應的切線，有切線就有切線的斜率。導數的幾何意義就是每一點的切線斜率的集合，這個數集就是導函數，簡稱導數。函數 $y=f(x)$ 的導數記為 $f'(x)$ ，也可以記為 $\frac{df}{dx}$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 。

從這個意義來說，導數是對函數變化率的一種總體揭示。也可以理解為導數是對原函數的一種映射結果，映射過程叫求導。

我們想知道一個函數的導數，就是求這個函數相應的極限。

例題講解

例 1　求 $f(x)=x^3$ 的導數，並且求 $x=1$ 時的切線斜率。

解：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

設計意圖：
嚴格根據導數定義，用極限計算函數的導數。

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + (\Delta x)^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

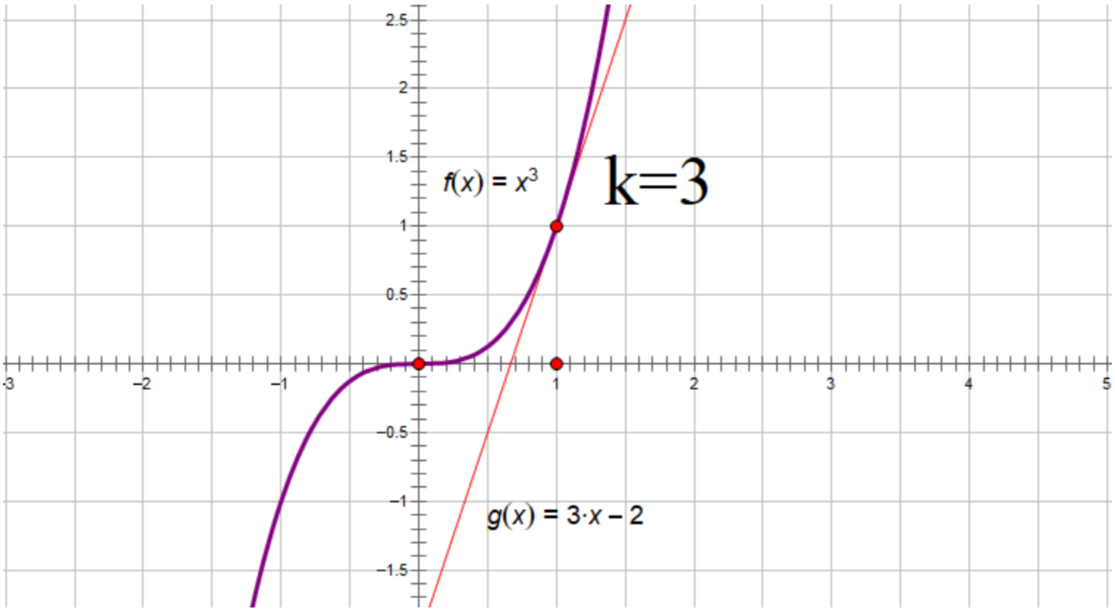
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 + 3x^2 + 3x(\Delta x)$$

$$= 3x^2$$

當 $x=1$時，切線斜率為$k = f'(1) = 3$ 。

設計意圖：
數形結合，促進理解。

打開幾何畫板，進行驗證分析



反思：
(1)除了切線斜率，我們是否可以求 $x=1$時對應點(1,1)的切線方程？
(2)是否可以求求 $x=2$ 時對應點的切線方程？

課堂練習

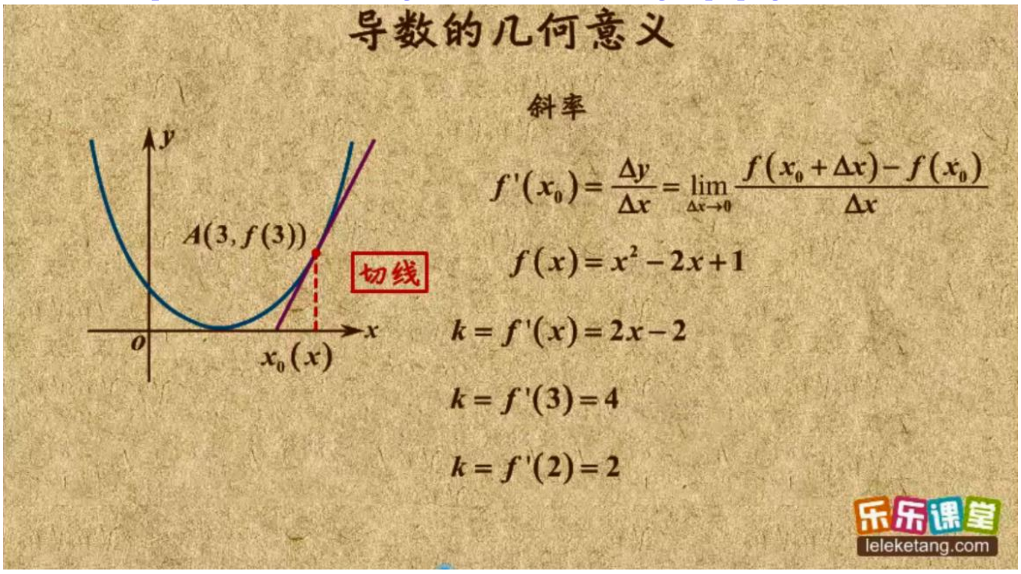
(1)求 $f(x) = x+3$的導數;
(2) 求 $f(x) = x^2$ 的導數和 $x=3$時的切線斜率。

根據例題和練習的結論，猜想函數 $f(x) = x^n$ 的導數是什麼？

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$
$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$\cdots$$
$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = ?$$

資訊教學

觀看視頻：https://www.leleketang.com/let3/knowledges.php?grade_id=30



事實上，微分的發展歷史並不一帆風順。

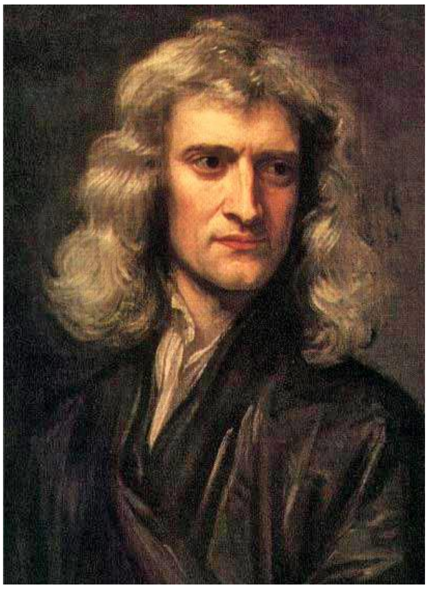
設計意圖：
滲透數學文化，學習先賢在探索數學中嚴謹的治學態度。

數學文化

導數的歷史

導數和積分的發現是微積分發明的關鍵一步。十七世紀以來，光學透鏡的設計以及炮彈彈道軌跡的計算促使歐洲的數學家對曲線的切線進行研究。1630 年代，法國數學家吉爾·德·羅伯瓦爾作出了最初的嘗試。與此同時，同是法國人的費馬在計算切線時已經使用了無窮小量的概念，但他並沒有將求導歸納為一種獨立的工具，只是給出了具體的計算技巧。

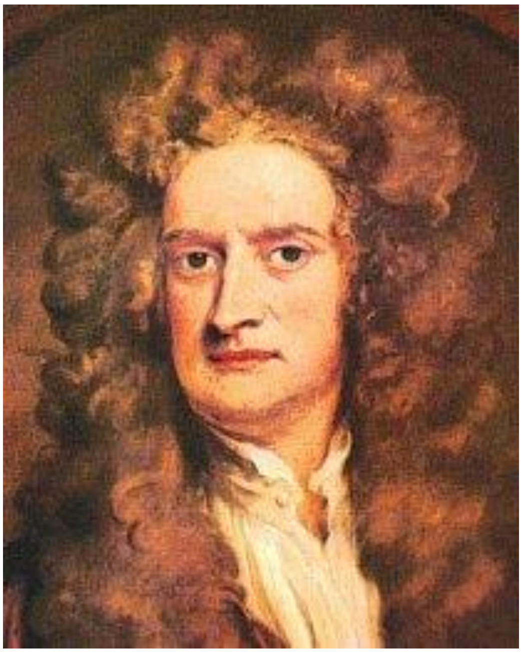

費馬(Fermat 1607-1665)


牛頓(Newton 1643-1727)

十七世紀六十年代，英國人伊薩克·牛頓提出了「流數」的概念。牛頓在寫於 1671 年的《流數法與無窮級數》中對流數的解釋是：「我把時間看作是連續的流動或增長，而其他的量則隨著時間而連續增長。我從時間流動性出發，把所有其他量的增長速度稱為流數。」也就是說，流數就是導數。牛頓將無窮小的時間間隔定義為「瞬間」（moment），而一個量的增量則是流數與瞬間的乘積。求導數時，牛頓將自變數和應變數兩邊展開，同時除以瞬間，再將剩下的項中含有瞬間的項忽略掉。而在他的第三篇微積分論文中，牛頓使用了新的概念：最初比和最後比。他說：隨我們的意願，流數可以任意地接近於在儘可能小的等間隔時段中產生的增量，精確地說，它們是最初增量的最初的比，它們也能用和它們成比例的任何線段來表示。

相比於牛頓，德國數學家萊布尼茲使用了更清晰的記號來描述導數。他將自變數和應變數的增量記為 dx 和 dy。他把 dx 理解為「比任何給定的長度都要小」，而 dy 則是 x 移動時 y「瞬刻的增長」，導數則是兩者之間的比例。他還研究了函數之和、差、積、商的求導法則。

牛頓和萊布尼茲的差別在於，牛頓將無窮小量作為求流數或導數的工具，而萊布尼茲則用無窮小量的比值來表示導數。這與二人的哲學思想差異有關。微積分的強烈抨擊者，英國的喬治·貝克萊主教在攻擊無窮小量時認為，流數實際上是「消失的量的鬼魂」，是 0 與 0 之比。歐拉承認後者，並認為 0 與 0 之比可以是有限值。十九世紀後，隨著對函數連續性和極限的更深刻認識，微積分終於趨於嚴謹。



萊佈尼茲(Leibniz 1646-1716)

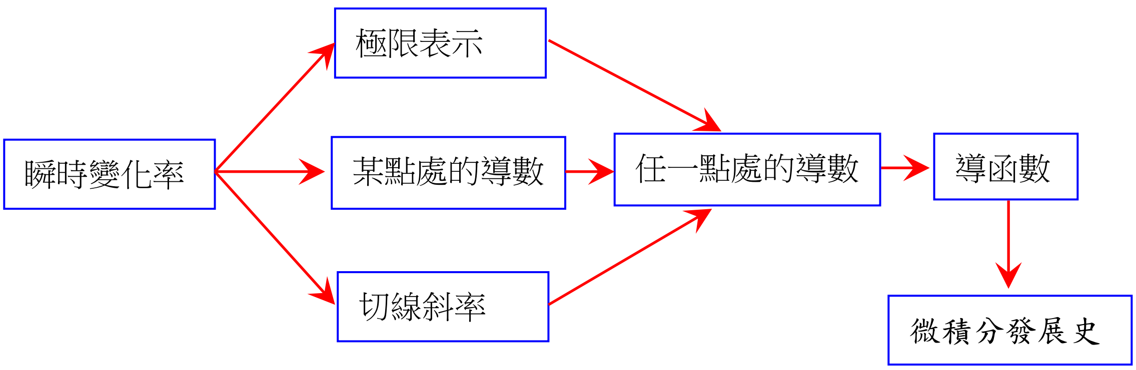
歐拉(Euler 1707-1783)

波爾查諾是首先將導數定義為函數值的改變數與自變數增量之比在自變數增量無限接近 0 時趨向的量。波爾查諾強調導數不是 0 與 0 之比，而是前面的比

值趨向的數。柯西在他的著作《無窮小分析教程概論》中也使用了同樣的定義，這樣，導數和微分的概念得到了統一。

更多資訊，可以通過掃描 Q-R 碼進行網上學習。

課堂小結



板書設計

函數的導數

瞬時變化率	例 1	練習 1，2
導數的定義		
極限表示		

函數的導數—第二課時

教學目標

- 知識目標

1.掌握六種基本初等函數的求導結果。

- 技能目標

1.能運用導數,計算函數在某點處的切線方程。

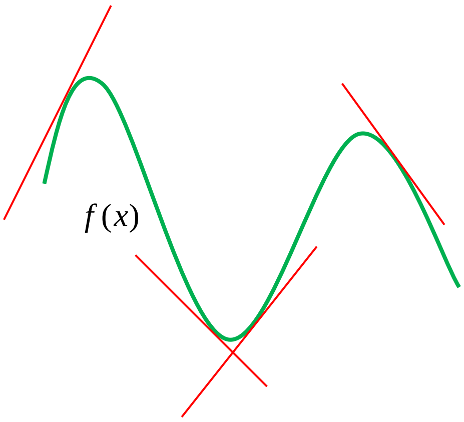
- 情意目標

通過對導數定義的理解,體會導數在刻畫函數形態和計算切線斜率的重要作用,增加學習導數的興趣。

教學重點：函數的求導公式
教學難點：指數型函數的求導
教學用具：電腦
對應基力：D-1-2通過函數圖像，理解導數的幾何意義：切線斜率，會用導數求出曲線在指定點之切線方程和法線方程。

溫故知新

前面我們學習了函數導數的概念和幾何意義。
如果給定一個函數，利用導數可以得知函數圖像每一點的斜率，這是不是一件很奇妙的事？



設計意圖：
滲透數學之美的教育:只要給出一些函數的解析式,就可以輕易求得曲線上任意一點的曲線方程！

中學常見的函數有 x^n ，a^x ，$\ln x$ ，$\sin x$ ，$\cos x$ 和常數函數 c 。這六種函數叫基本初等函數，它們對應的導數為：

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (c)' = 0$

注：

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ 的 n 不一定是整數，也可以是有理數。比如 $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 。

(2)特別地，$(a^x)'=a^x\ln a$ 中的底數為 e 時，對應的求導公式為 $(e^x)'=e^x$，事實上這是常見的，以其它數的底的求導反而少見。

設計意圖：
讓學生即時記憶，即時反饋。

全班默記一分鐘，準備默寫公式：

$(x^n)'=$ ______
$(\cos x)'=$ ______
$(\sin x)'=$ ______
$(3)'=$ ______
$(\ln x)'=$ ______
$(e^x)'=$ ______

例題講解

例 1　已知函數 $f(x)=e^x$，求這個函數在點 $x=e$ 處的切線方程。

解：$\because f(x)=e^x$

$\therefore f'(x)=e^x$，$\therefore$ 在點 $x=e$ 處的切線斜率為 e^e

而切線經過點 (e,e^e)

由點斜式，切線方程為 $y-e^e=e^e(x-e)$

化簡得切線方程為 $y-e^e=e^e x-e^{e+1}+e^e$

設計意圖：
講練結合，習得新知。

例 2　求函數 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 在點 $x=8$ 處的導數。

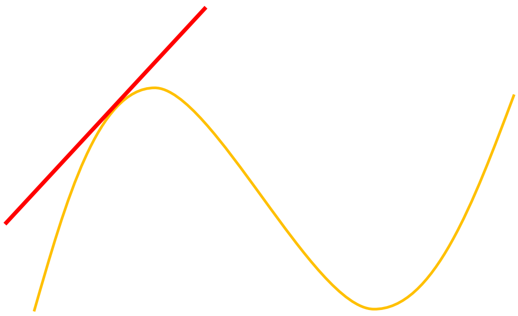
解：$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore y'=\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

當 $x=8$ 時，導數為 $-\dfrac{2}{3}\times 8^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{3}\times 2^{-5}=-\dfrac{2^{-4}}{3}=-\dfrac{1}{48}$

註：在某點的導數也就是在此點的斜率，只是不同問法，意思一樣。

反思：1.把問題改為求在點 $x=8$ 處的切線方程，你會嗎？
　　　2.數學之美的滲透



設計意圖：
滲透數學之美的教育：只要給出一些函數的解析式，就可以輕易求得曲線上任意一點的曲線方程！

課堂練習

練習：求曲線 $y=\sin x$ 在點 $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 處的切線方程。

資訊學習

觀看視頻：微積分的本質

設計意圖：
滲透資訊教育，讓學生根據需要，從網絡獲取另一個角度的導數知識，促進學生對導數的理解。

課堂小結

六條求導公式 → 某點處的斜率 → 過此點的切線方程

板書設計

函數的導數

求導公式	例 1	例 2
		練習

導數的運算法則—第三課時

教學目標

- 知識目標

1.掌握基本初等函數的求導法則。

2.了解法線的概念。

- 技能目標

1.會進行四則運算的求導。

2.能運用導數,計算函數在某點處的切線和法線方程。

- 情意目標

通過對導數的運演算法則，加強學生對求導運演算法則的掌握，培養學生的運算能力。

教學重點：導數的運演算法則、法線方程

教學難點：乘、除法的求導法則(學生易受到乘法則影響，混淆除法法則的公式)

教學用具：電腦

對應基力：D-1-2通過函數圖像，理解導數的幾何意義：切線斜率，會用導數求出曲線在指定點之切線方程和法線方程。

溫故知新

前面學習了 6 中基本初等函數的求導公式，接下來我們學習導數的運演算法則。

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為函數，k 為常數。導數的運演算法則：

(1) $(kf)'=kf'$

(2) $(f\pm g)'=f'\pm g'$

(3) $(fg)'=f'g+fg'$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

(5) $[f(g)]'=f'g'$

舉例：1. $(x^3+5x^2-2x+1)'=3x^2+10x-2$

2. $(x^3\sin x)'=3x^2\sin x+x^3\cos x$

3. $\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x-x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$

運用求導運演算法則的時候，需要掌握式子是加減還是乘除結構，這樣才用合適的公式。

分析一下：下麵的求導錯在哪裡？

(1) $f(x)=x^2\sin x$，那麼 $f'(x)=2x\cos x$

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$，那麼 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x}$

設計意圖：

給出初學者常見錯誤，讓學生吸取錯誤案例，促進學生認知。

【練習 1】求下列函數的導數。

1. $f(x)=x^3+4x^2+6\sin x+\ln x+\sqrt{x}$　　2. $f(x)=x^2\sin x+2$

3. $f(x)=\dfrac{\sin x+3}{x}$　　4.

例題講解

【例 1】 已知 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$，求 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。

注意： $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是先求出導數 $f'(x)$，再把$\dfrac{\pi}{2}$代回導數 $f'(x)$從而得到 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。
不是先代入數再求導，假如是代入數，結果必然是常數，再求導那就是 0 了，那題目就沒意思了。

設計意圖：
分析題意，幫助學生正確理解題目意思。學以致用，加深印象。

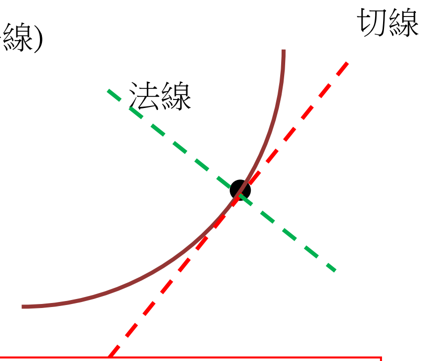
解：

$$f'(x)=\frac{(1-\cos x)'\sin x-(1-\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin^2 x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=1$$

【例 2】 設 P(-2,5)為曲線 $f(x)=2x^3+3x^2-4x+1$上一點，

(1) 求以點 P 為切點的切線方程;

(2) 求點 P 處的法線方程。(注：與切線垂直的線叫法線)



解：

(1)$\because f(x)=2x^3+3x^2-4x+1$

$\therefore f'(x)=6x^2+6x-4$

$\therefore$點 P(-2,5)處切線斜率為 $k=f(-2)=8$

所求切線方程為

$y-5=8(x-2)$

化簡得

$y=8x+21$為所求的切線方程

設計意圖：
學生從圖中能快速理解切線與法線的聯繫和區別。

(2)∵法線與切線互相垂直

∴法線斜率為 $-\frac{1}{8}$

所求法線方程為

$$y-5=-\frac{1}{8}(x-2)$$

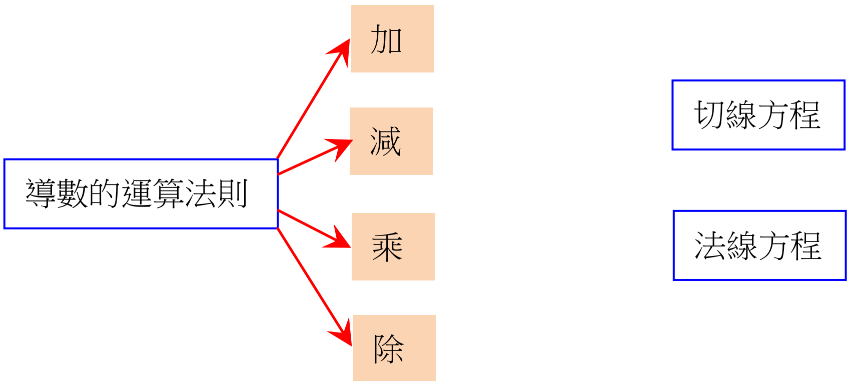
化簡得

$y=-\frac{x}{8}+\frac{19}{4}$ 為所求的切線方程

課堂小結

總結：

1.本節課學習了導數的運演算法則。



2.關於運演算法則的更多資訊，可掃描如下鏈接。

課後功課

1. $f(x)=x^3+4e^x+x\ln x$ ，則 $f'(1)=$______;

2. $f(x)=\frac{2\sin x}{e^x}$ ，則 $f'(-1)=$______;

3.(2015 台灣) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ ，求 $f'(0)$ 。

4. 設 P(−1, 2)為曲線 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 上一點，

(1)求以點 P 為切點的切線方程;

(2)求點 P 處的法線方程。

板書設計

導數的運算法則

加減乘除法則　　例 1　　例 2

注意事項：

(1)

(2)

函數的導數—第四課時

教學目標

- 知識目標
  1.理解二階導數的表示方式。
  2.瞭解二階導數的概念。
  3.掌握二階導數的運算方法。
- 技能目標
  1.會計算函數的二階導數。
- 情意目標
  通過對函數二階導數的運算學習，認識到事物是不斷變化發展的。

教學重點：函數的二階求導
教學難點：函數的二階求導
對應基力：無

講授新知

在原來導數 $f'(x)$ 的基礎上求多一次導叫**二階導數**。簡單來說就是把 $f(x)$ 求導兩次。

二階導數的表示： $f''(x)$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$，有時也表示為 $f^{(2)}(x)$。

為什麼要考慮用 $f^{(2)}(x)$ 呢？因為除了二階導數還有三階、四階甚至高階導數，不可能靠 $f''(x)$ 的形式去表示。所以為了方便，對於更高階的導數用 $f^{(n)}(x)$ 表示。我們高中只學到二階導數就夠了，三階導數也是從二階導數再導多一次。

設計意圖：
解釋為什麼用 $f^{(n)}(x)$ 來表示高階導數。

舉例： $f(x)=x^3+e^x$

那麼 $f'(x)=3x^2+e^x$，在這個基礎上再求導多一次就得到二階導數：

$$f''(x)=6x+e^x$$

【課堂練習】求下列函數的二階導數.

(1) $f(x)=x^3+4x^2+6\sin x$

(2) $f(x)=x^2\sin x+2$

設計意圖：
講練結合，練習提高。

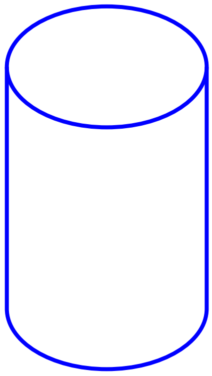
例題講解

【例 1】 一正圓柱的底半徑和高之和為 36。設此正圓柱的底半徑為 x 及體積為 $V(x)$，其中 $V(x)$ 為 x 的函數，求

(1) $V(x)$

(2) $V'(x)$ 和 $V''(x)$

分析：關鍵是表示出體積，也就是需要知道半徑和高。
半徑已經給出，高再根據條件可以用 x 表示。



解：

(1) $\because$ 半徑為 x ，底半徑和高之和為 36
$\therefore$ 高為 $36-x$
$\therefore V(x)=\pi x^2 h=\pi x^2(36-x)=36\pi x^2-\pi x^3$

(2)由 $V(x)=\pi x^2 h=\pi x^2(36-x)=36\pi x^2-\pi x^3$
$\therefore V'(x)=72\pi x-3\pi x^2$
$V''(x)=72\pi-6\pi x$

反思：我們是怎麼解決問題的？

設計意圖：
講完後再讓學生反思整個求解過程，力求有透徹理解。

課堂練習

一底半徑為 x 的正圓柱，其體積為 54π 。設該圓柱的表面面積(包括上下底)為 $S(x)$ ，

(1) 證明： $S(x)=2\pi\left(x^2+\dfrac{54}{x}\right)$

(2) 求 $\dfrac{dS}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2S}{dx^2}$

課堂小結

1.本節課我們學習了什麼內容？(二階導數)

課後功課

求導數。

1. $f(x)=x^3+4x^2+6\sin x+e^x$

2. $f(x)=x^2\sin x+2$

3. $f(x)=\dfrac{\sin x+3}{x}$

4. $f(x)=\sin x\ln x$

5. $f(x)=3x^3+2x^2+6x+\cos x+\sqrt{x}$

6. (1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ ，求 $f'(0)$ 。

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{1+\cos x}$ ，求 $f'(2)$

7. 設 P(−1, 10)為曲線 $f(x)=x^3+3x^2-4x+4$ 上一點，
(1)求以點 P 為切點的切線方程;
(2)求點 P 處的法線方程。

8. (1)已知 $S(x)=x^3+\frac{4}{x}$ ，求 $\frac{dS}{dx}$ 和 $\frac{d^2S}{dx^2}$

(2)已知 $f(x)=\frac{1+\sin x}{x}$ ，求 $\frac{df}{dx}$ 和 $\frac{d^2f}{dx^2}$

板書設計

二階導數

定義和表示

例 1

練習 1

例子

函數的導數—第五課時

教學目標

- 知識目標

1.瞭解復合函數的常見形式。
2.理解復合函數的結構。
3.掌握復合函數的求導法則。

- 技能目標

1.會判斷一個函數是否為復合函數；
2.能對復合函數正確地進行求導運算；
3.能藉助互聯網驗證復合函數的求導結果。

- 情意目標

通過對復合函數求導法則的學習，學會用發展思維看待函數結構，並注意區分與乘積狀態函數求導公式的分別。

教學重點：復合函數的函數結構、求導法則

教學難點：復合函數的函數結構。

復合函數是不同函數之間嵌套的結果，而不是常見基本初等函數經加減乘除運算所得，對復合函數求導必須首先能正確認知函數的嵌套結構。

教學用具：電腦

對應基力：無

講授新知

對於複合函數的求導，首先要認識什麼樣的函數是複合函數：

1. 首先，前面提到六種函數的加減乘除組合都不是複合函數；

2. 諸如 $(x^3+1)^2$ ，$\sin 2x$ ，$\sqrt{x^2+2}$ ，e^{-x^2} 才是複合函數。

> 設計意圖：
> 先分析什麼樣的函數不是複合函數，複合函數的特點。

複合函數不是基本初等函數的線性組合，它應該是函數的內外嵌套。

比如：

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=\sin x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=\sin^2 x, g(f(x))=\sin x^2$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=\sqrt{\ln x}, g(f(x))=\ln\sqrt{x}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=e^{2x}, g(f(x))=e^{x^2}$$

你能分清哪些是“外函數”　，哪些是“內函數”嗎？

> 設計意圖：
> 給出一些複合函數的嵌套例子，讓學生分清外函數與內函數。

課堂練習

練習 1 根據已知函數寫出對於的符合函數

$\begin{cases} f(x)=2x^2-1 \\ g(x)=\cos x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=$________, $g(f(x))=$________

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=3x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=$________, $g(f(x))=$________

$\begin{cases} f(x)=2\sin x-1 \\ g(x)=\ln 3x \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=$________, $g(f(x))=$________

設計意圖：
學生經歷複合函數的構造過程，感知複合函數的構造特點，為下面的求導做準備。

對複合函數求導，首先看函數結構，比如$(x^3+1)^2$就是Δ^2和(x^3+1)，兩者同時求導相乘即可。
注意的是，大的層面(外函數)求導時，未涉及的小層面(內函數)是整體寫出來的。比如：
$[(x^3+1)^2]'=2(x^3+1)\cdot(3x^2+0)=6x^2(x^3+1)$；
$(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$

注意：
數學上並沒有“外函數”、“內函數”的說法，這裡僅僅是輔助解釋說明復合函數的函數結構而臨時用的名字。

例題講解

例 1：求複合函數的導數:

1) $f(x)=e^{-x^2}$　　2) $f(x)=\ln(\sin x)$

分析：要學會把複合函數拆解為“外函數”、“內函數”。外函數形式求導，細節不變，再乘以內函數的具體求導。

$f(x)=e^{-x^2}$，外函數是e^*，內函數是$-x^2$

$f(x)=\ln(\sin x)$，外函數是$\ln *$，內函數是$\sin x$

解：

(1) $f'(x)=e^{-x^2}\times(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sin x}\times(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

注意：
1. 學生需要分清外函數、內函數。
2. 外函數求導時只是形式求導，不涉及到細節。

課堂練習

求下列函數的導數：

1) $f(x)=(x^4+3x+1)^3$
2) $f(x)=\sin^3 x$
3) $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$
4) $f(x)=\sqrt{\sin x}$

思考：

函數 $y = e^{\sin 2x}$ 的求導是什麼？

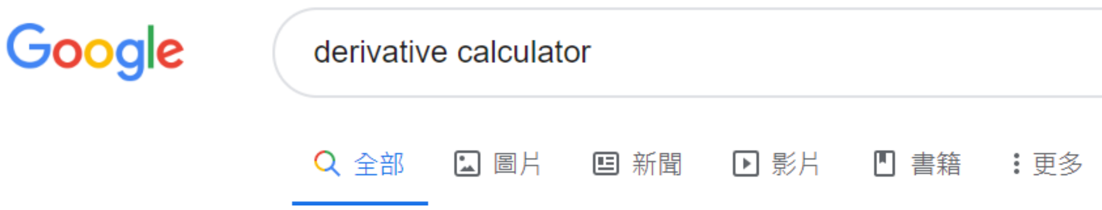
答案： $y' = 2e^{\sin 2x}\cos 2x$

設計意圖：

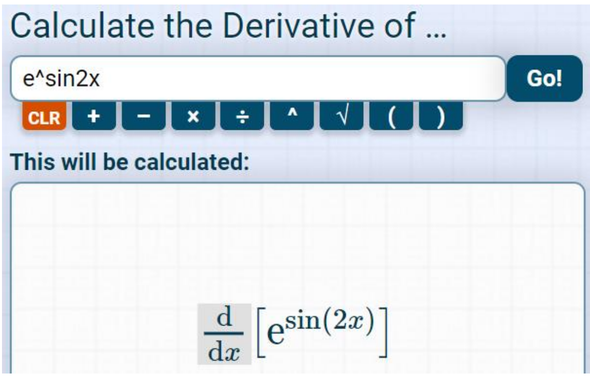
1. 前面學習的都是二重結構的復合函數，讓學生知道還有三重或多重的復合函數，它們的求導法則類似。
2. 結合互聯網進行結果驗證。

數學驗證

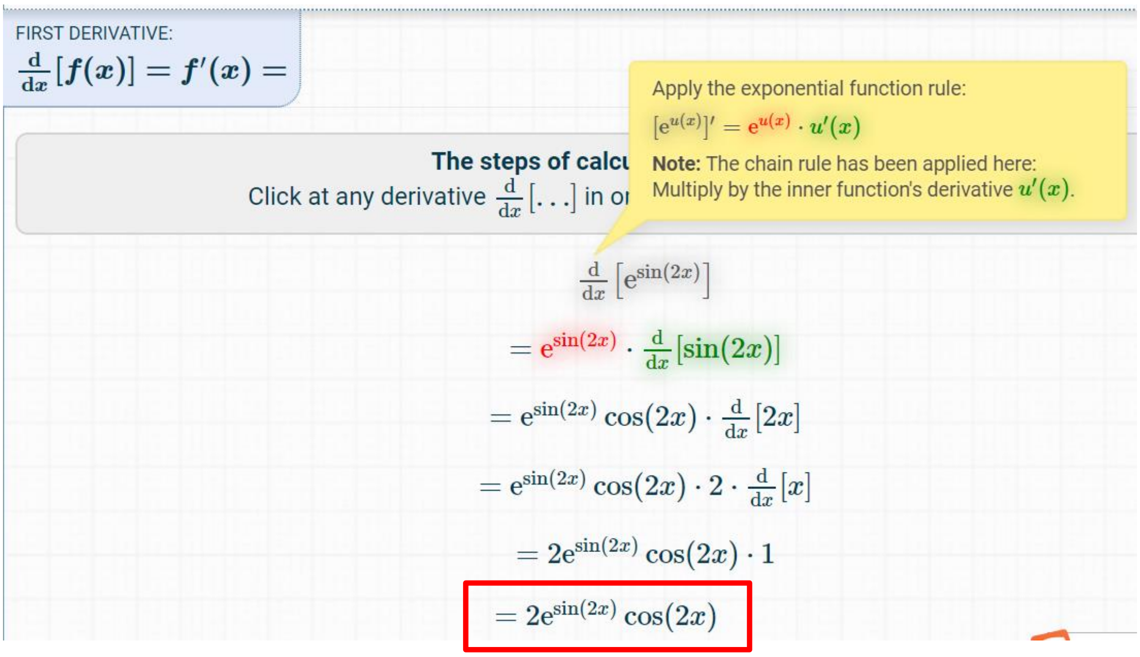
我們應該如何驗證這種結果？
藉助互聯網！
第一步先打開 Google ，輸入 derivative calculator



第二步進入網站：https://www.derivative-calculator.net/，輸入函數



按下按鈕 Go！，即得結果：



至此，驗證完成。

課後功課

求下列函數的導數：

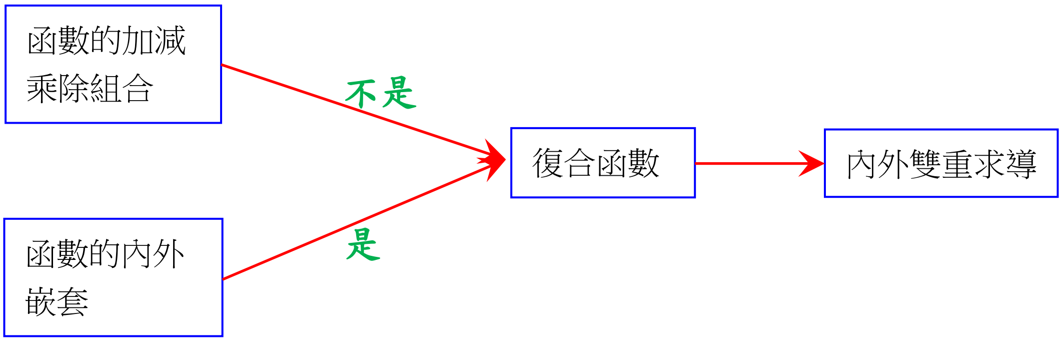
1) $f(x)=\sqrt{\cos x}$

2) $f(x)=\cos^3 x$

3) $f(x)=e^{2x}$

4) $f(x)=(2x^4+3x^2+1)^3$

課堂小結



板書設計

復合導數的求導

復合函數　　例 1　　練習

構造例子

叁、試教評估與反思建議

本單元是建立在函數極限的基礎上。函數在某一點的導數在定義上逼近這一點時的差商極限，幾何意義上就是在函數圖像在某一點處切線的斜率。由於逼近是動態過程，把兩點極限逼近形成的直線定義為切線，是學生在理解這一點時是存在一定困難的，需要結合幾何畫板動態展示。

此時建議不用“微分是函數增量的線性主部” 的角度進行講解，雖然直觀上這種分析也是導數的本質，但由此產生的“高階無窮小”很難在現階段解釋得清楚。在高中階段，從極限角度去講解是合理的。

同學在記憶初等函數的求導公式和求導法則時沒有問題，也輕鬆可以計算切線和法線方程。稍感困難的是複合函數的求導，學生需要準確理解函數的結構，從中分解出“外函數”和“內函數”。而我的教學策略是先讓學生自行組合複合函數，在這個過程中慢慢適應、理解其中的函數結構，從而分清“外函數”和“內函數”，事實上數學中並沒有這樣的概念，這只是輔助學生掌握複合函數而臨時構造的概念。經過教學實踐，發現這種方法是成功的，幾乎所有學生都能掌握簡單複合函數的求導。同學在驗證復合函數的結果方面興趣濃厚，並強烈認同老師嚴謹客觀的任教態度。

本單元教案中也滲透了升大試題的講解，力求學生在基礎學習階段就能接觸、提前適應相關試題。從結果來看學生完全能吸收相關知識，表現良好。也間接說明老師的任教策略是成功的。

肆、參考文獻

校本教材　第十五章　　微積分初步

伍、相關教材

輔助教學資料

一、 教學圖片