2019/2020 學年教學設計獎勵計劃

空間直線方程與平面方程

參選類型：教案

參選編號：C035

科目：數學

組別：高中教育

實施年級：高三

簡介

本教案的主要內容是面向高三學生的空間直線方程和空間平面方程。無論是教青局的基本學力要求或四校聯考，都沒有對這些內容作出明確要求，不過卻是澳門學生參加大陸高等學校招生考試的要求內容，更早之前的台灣海外聯招考試也對此部分有所要求。

數年前筆者任教高三時發覺台灣升學考試考察空間解析幾何的內容，而且澳大附加題之中一些立體幾何的題目也可以用空間解析幾何的結論來求解，所以當時在沒有參考任何教輔資料的情況下自行編寫了一些講義。今年又恰巧任教高三，所以把當時自編的講義整理成教案設計。整體來說，雖然這部分內容屬於內地大學空間解析幾何的內容，但難度相對簡單，西方國家的某些教材也把它列入中學來學習。

空間直線方程與平面直線方程類似，都需要“定點”和“方向”才能確定。類似的空間平面方程也是如此，本質上這些方程都是依賴於空間向量的關係運算。教案的第五課時引入了夾角公式。在教案中我們大膽引入了一個求平面法向量的重要定理，有了這個定理求法向量時特別方便快捷。其中結論在四校聯考附加卷的解答中也往往能用上。

目次

教學進度表

作品名稱	空間直線方程與平面方程			人數	33 人
實施年級	高三			總實施節數[註]	5 節
實施日期	2020 年 1 月 9 日－1 月 10 日			每節課時	40 分鐘
科目	數學			科目每週節數	8 節
預計授課日期（年-月-日）	**節數**	**課節**	**課題名稱**	**課題內容**	**課時（分鐘）**
2020 年 1 月 9 日	2	第一課節	空間直線方程	直線的方向向量，空間直線方程	80
2020 年 1 月 10 日	2	第二課節	空間平面方程	直線的法向量，空間直線方程	80
2020 年 1 月 10 日	1	第三課節	空間線面的夾角公式	空間中線線夾角、線面夾角和麵面夾角	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1.瞭解空間直線方程的推導過程；
2.能寫出空間直線方程的方向向量和穿過的定點；
3.能運用方向向量判斷空間直線的位置關係；
4.瞭解空間平面方程的推導過程；
5.能寫出空間直線方程的法向量；
6.能判斷空間平面方程的位置關係；
7.會計算空間線線夾角、線面夾角和麵面夾角。

二、主要內容

空間直線方程，空間平面方程及其夾角公式。

三、設計創意和特色

1.循序漸進，由線到面，非常注重空間直線方程和平面方程的推導過程，讓學生知其然更知其所以然。
2.通過大量的即時練習，讓學生掌握好授課內容。
3.構建知識網絡結構圖，逐步幫學生建構起知識體系。
4.適當引入視頻教學，從多角度吸引學生注意力，提升課堂效能。

四、教學重點

空間直線方程，空間平面方程

五、教學難點

求平面法向量

六、教學用具

電腦
電腦，能表示直線、平面的物體(書本、筆等等)

貳、教案

空間直線方程—第一課時

教學目標

- 知識目標

 1.瞭解空間直線方程的定義；
 2.知道空間直線方程的推導過程；
 3. 掌握空間直線方程。

- 技能目標

 1.能區辨平面直線方程與空間直線方程；
 2. 能根據空間直線方程說出通過的定點坐標和方向向量；
 3. 能根據已知求出空間直線方程。

- 情意目標

 通過空間直線方程的推導過程，體會直線方程的建立在二維平面與三維空間中的聯繫和區別，體會數學直線方程的本質結構。

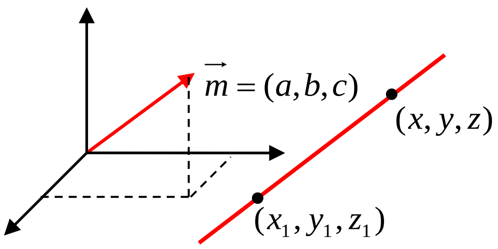
教學重點：空間直線方程
教學難點：二維平面與三維空間中直線方程建立過程的異同
對應基力：無
教學過程：

講授新知

如果已知一條直線的延伸方向和經過了某個明確的點，那麼這條直線的位置是一定確定的。

在 2 維的平面直角坐標系我們就是給出直線的斜率 k（延伸方向）和經過某定點 (x_1, y_1) 就確定了直線方程。在 3 維的空間中也是如此。如圖，

設 (x, y, z) 為直線任一點，向量 $\vec{m}=(a,b,c)$ 與向量 $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ 平行，則**對應坐標成比例**，$\therefore \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 就是所求的空間直線方程。



註：1. 向量 $\vec{m}=(a,b,c)$ 叫直線的方向向量。

2. 從直線方程的分子 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ 中，我們可以提取此直線經過的一個點 (x_1,y_1,z_1) 。

3. $(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ 與 $\vec{m}=(a,b,c)$ 是互相平行的向量，事實上我們正是由此得出空間直線方程。

思考：這跟二維平面上的直線方程有什麼相同的地方，有哪些不同的地方？

相同：思路都是利用過定點+斜率求得直線方程。

不同：方程變量數目不同，方程形式不同。

例題講解

例 1 已知空間直線方程：$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{6}$

(1)此方程一定經過哪個點？

(2)它的方向向量是什麼。

設計意圖:
讓學生學會觀察方程結構，自覺提取直線的基本信息。

解：

(1)根據方程可知，方程必過點(2，-2, 0)。

(2)方向向量為(3，-2, 6)。

例 2 寫出經過定點(9, 3, -2)，方向向量為(3, -1, -5)的直線方程。

解：易得方程為：

$$\frac{x-9}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{-5}$$

設計意圖:
通過問題的反向轉變，培養學生逆向思維。

變式：寫出經過定點(9,3,-2)，與向量(3,-1,-5)平行的直線方程。

答案：$\frac{x-9}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{-5}$

例 3 寫出經過定點(9, 3, -2)，(3, -1, -5)的直線方程。

分析：過兩個定點可以確定一條直線(無論是平面還是三維空間皆是如此)，而給出的兩點，恰好暗示了此直線的方向向量。

設計意圖：
深化前面問題，開闊學生思維。

解：由定點(9, 3, -2)，(3, -1, -5)

可知直線的方向向量為(9, 3, -2)-(3, -1, -5)=(6, 4, 3)

$\therefore$直線方程為 $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$

註：直線方程也可以寫為：$\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+5}{3}$

課堂練習

1. 空間直線 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-6}{8}$ 經過定點_______，它的方向向量是________。

2. 空間直線 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-6}{8}$ 經過定點_______，它的方向向量是________。

3. 經過定點(9, 3, -2)，方向向量為(3, -1, -5)的直線方程為_____________。

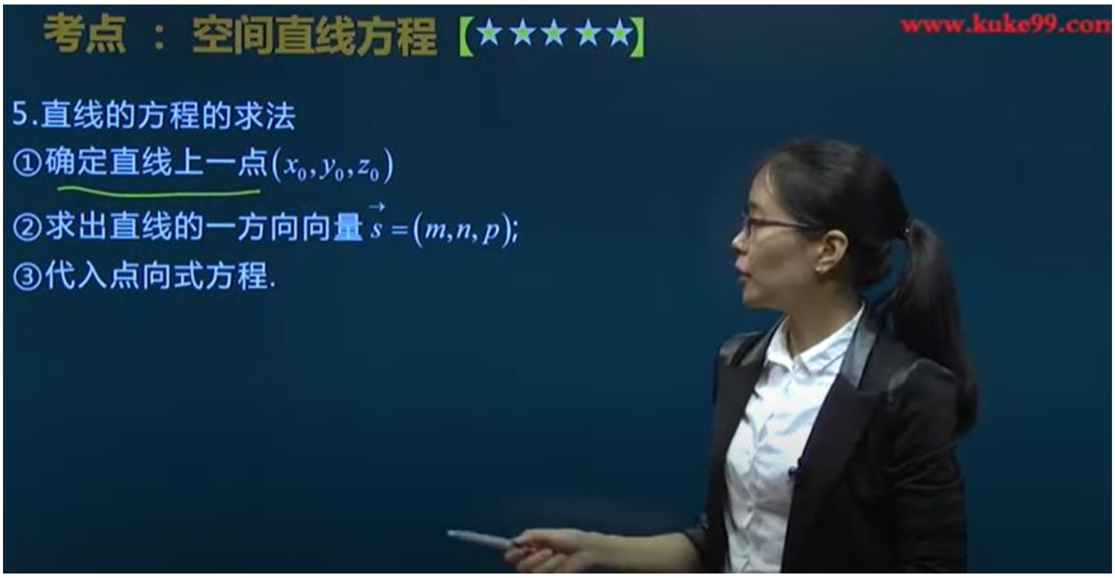
4. 經過定點(1, 2, 2)，方向向量為(-3, 2, 6)的直線方程為_____________。

5. 經過定點(0, -2, 3)，且與向量為(-5, 1, -8)平行的直線方程是_____________。

資訊教學

YouTube 視頻：空間中直線方程的求法

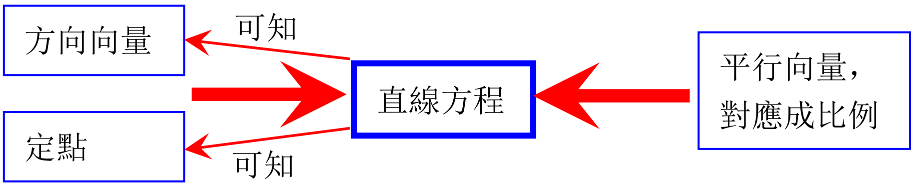
https://www.youtube.com/watch?v=viJSLAR8Y18



課後功課

工作紙對應練習

課堂小結



板書設計

空間直線方程

推導過程　例 1　例 2　例 3

空間直線方程—第二課時

教學目標

- 知識目標

1.知道空間直線位置關係的類型；

2.掌握空間直線位置關係與方向向量的統一性。

- 技能目標

1.能判斷空間直線方程判斷空間直線的位置關係；

2.能根據空間直線的位置關係反推方向向量的關係。。

- 情意目標

通過空間直線方程的位置關係與方向向量的聯繫，體會數形結合的思想，透過數學樹立瞭解事物各種形態背後辯證統一的世界觀。

教學重點：空間直線方程

教學難點：二維平面與三維空間中直線方程建立過程的異同

對應基力：無

教學過程：

講授新知

我們知道空間中直線的位置關係有 3 種：平行、相交、異面。

根據空間直線方程：$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$，其走勢由方向向量 $\vec{m}=(a,b,c)$ 決定。

所以只要直線之間方向向量平行，那麼這兩條直線就平行了。

類似地，只要直線之間方向向量垂直，那麼這兩條直線就垂直了。這樣我們就得到如下結論：

假設有空間直線 $L_1:\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1},L_2:\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ ，那麼：

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$；

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$；

問題 1：空間中兩直線相互垂直，這兩條直線一定會相交嗎？

答案：不一定

問題 2：如果兩條直線平行，它們的方向向量有什麼關係？垂直時又有什麼關係呢？

結論：可以用方向向量的方法來判斷空間直線是否平行或垂直.

例題講解

例 1 空間直線 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{6}$ 與 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-6}{8}$ ，

(1)若兩直線互相垂直，求 a 的值；

(2)若兩直線互相平行，求 a 的值。

解：

(1)兩直線的法向量分別為(3, −2, 6)和 $(1,a,8)$

∵兩直線垂直

$\therefore (3,-2,6)\cdot(1,a,8)=3-2a+48=0$

$a=\dfrac{51}{2}$

(2) 兩直線的法向量分別為(3, −2, 6)和 $(1,a,8)$

∵兩直線平行

$\therefore \dfrac{3}{1}=\dfrac{-2}{a}$

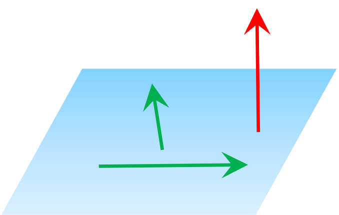
$a=-\dfrac{2}{3}$

定理：兩個向量 $\vec{m}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{n}=(a_2,b_2,c_2)$ ，則與這兩個向量都垂直的向量為

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

其中 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 為 x,y,z 軸的單位向量。

這一定理的意思是：我們可以找到一個與兩個已知向量垂直的向量。



例 2 某空間直線 L:與 $L_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{6}$ 和 $L_2:\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+5}{3}$ 垂直，且過點 $(1,-1,8)$ 的直線 L 的方程。

解：∵直線 L 與直線 L_1 、 L_2 垂直，

而直線 L_1 、 L_2 的方向向量為(3，−2, 6)、(6, 4, 3)

∴直線 L 的方向向量為：

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -30\vec{i} + 27\vec{j} + 24\vec{k}$$

設計意圖：
數形結合，讓學生直觀了解函數的極值點性質和形態。

直線 L 過點 $(1,-1,8)$

∴直線 L 的方程為 $L_1: \dfrac{x-1}{-30} = \dfrac{y+1}{27} = \dfrac{z-8}{24}$

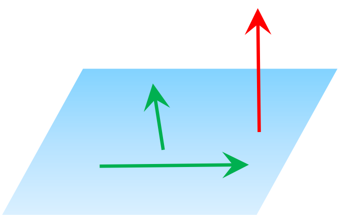
課堂練習

1. 空間直線 $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{6}$ 與 $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-6}{-2}$ 互相垂直，則 $a =$______ 。
2. 空間直線 $\dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3}$ 與 $\dfrac{x+2}{a} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-6}{2}$ 互相垂直，則 $a =$______ 。
3. 空間直線 $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{3}$ 與 $\dfrac{x+2}{12} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-6}{9}$ 互相平行，則 $a =$______ 。
4. 空間直線 $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{3}$ 與 $\dfrac{x+2}{a} = \dfrac{y}{-12} = \dfrac{z-6}{18}$ 互相平行，則 $a =$______ 。

課堂小結

直線平行 ⟷ 方向向量平行

直線垂直 ⟷ 方向向量垂直



有兩已知向量，可找到第三個與它們同時垂直的向量

課後功課

工作紙對應練習

板書設計

直線方程			
直線平行、垂直與方向向量的關係	例 1	例 2	定理

空間平面方程—第三課時

教學目標

- 知識目標

1.瞭解空間平面方程的定義；

2.知道空間平面方程的推導過程；

3. 掌握空間平面方程。

- 技能目標

1.能根據空間平面方程說出平面通過的定點坐標和方向向量；

2. 能根據已知求出空間平面方程。

- 情意目標

通過空間平面方程的推導過程，體會用方程表達平面的數學思想。

教學重點：空間平面方程推導過程、結構特點

教學難點：空間平面方程的推導過程

對應基力：無

教學過程：

講授新知

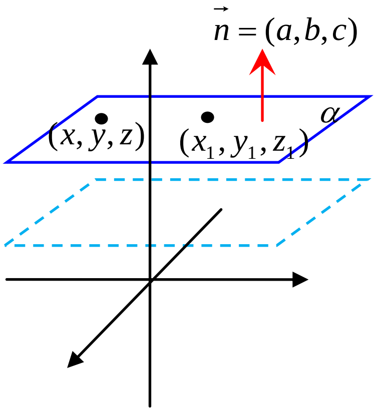
講平面方程時，需要引入與平面垂直的向量，也叫平面的法向量。這個法向量代表著平面的傾斜方向，若此平面再過某定點，這個平面的位置也就確定了，換言之，空間中平面的表示方程也確定了。

設向量$\vec{n}=(a,b,c)$是平面α的法向量，設(x,y,z)為平面任一點，(x_1,y_1,z_1)為平面內某一點。**則法向量$\vec{n}=(a,b,c)$與向量$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$垂直**，則$(a,b,c)\cdot(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$=0，即

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

就是空間中的平面方程。

註：也可整理為$ax+by+cz+d=0$。



設計意圖：
教會學生確定一個平面，至少需要知道哪些必要信息。

注意：空間平面方程的推導本質源於垂直向量的點積為 0。

例題講解

例 1(1)說出平面方程 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 一定經過哪個點，它的法向量是什麼。

(2)寫出經過定點(9, 3, -2)，法向量為(3, -1, -5)的平面方程。

分析：主要是考察由特定的方程可以知道定點和平面的法向量。

解：(1)經過點(1, -2, 0)，法向量是(3，-4, 5)。

(2)依題意可知平面方程是 $3(x-9)-(y-3)-5(z+2)=0$

例 2 已知兩平面 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 與 $4x+5y+az+12=0$，若平面互相垂直，求 a。

分析：如果平面垂直，它們對應的法向量有什麼關係？

解：由平面互相垂直，可知對應法向量也互相垂直。

平面 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 的法向量為(3，-4, 5)

平面 $4x+5y+az+12=0$ 的法向量為 $(4,5,a)$

則 $(3,-4,5)\cdot(4,5,a)=0$

$\therefore 12-20+5a=0$

解得 $a=\dfrac{8}{5}$

課堂練習

1. 平面 $3(x+2)-4(y+2)+5(z-3)=0$ 過定點_______，它的法向量是_______。

2. 平面 $-5x-4(y+2)-6(z-3)=0$ 一定經過定點_______，它的法向量是____。

3. 平面 $9x-4y-6(z+4)=0$ 一定經過定點_______，它的法向量是__________

4. 已知兩平面 $2(x-1)-4(y+2)+6z=0$ 與 $ax+5y+z+12=0$，若平面互相垂直，$a=$______。

5. 已知兩平面 $3(x-1)-4(y+3)+5(z-2)=0$ 與 $4ax+5ay+z+12=0$，若平面互相垂直，$a=$_____。

課堂小結

空間平面方程

法向量　　定點

法向量從係數取；
定點從括號內取。

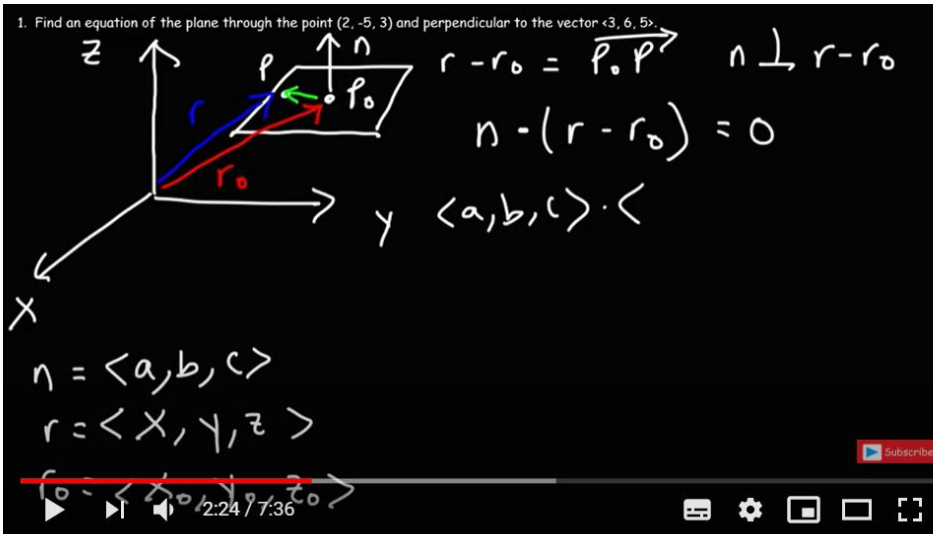
$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

課後功課

工作紙對應練習

資訊教學

如何求平面方程：https://www.youtube.com/watch?v=2sZKZHyaQJ8



板書設計

空間平面方程

如何確定平面方程？　　例 1　　例 2

空間平面方程—第四課時

教學目標

➢ 知識目標

1.了解法向量的定義。

2.知道平面內不共線三點或兩個相交向量可求空間平面方程。

➢ 技能目標

1.能根據平面內兩相交向量求出相應的法向量；

2.能根據平面內不共線三點或兩個相交向量求出空間平面方程。

➢ 情意目標

了解法向量對平面方程的重要意義，學會總結哪些情形可以求出法向量，提高分析問題的能力。

教學重點：求平面的法向量

教學難點：如何根據已知求平面的法向量

對應基力：無

教學過程：

講授新知

首先不加證明地給出一個定理：

定理：兩個向量$\vec{m}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{n}=(a_2,b_2,c_2)$，則與這兩個向量都垂直的向量為

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

其中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$為x, y, z軸的單位向量。

注：1. 此定理常用來求包含某直線的平面方程的法向量。

2. 知道空間內任意三點可用此定理求出對應平面的方程。

這個定理對於求平面方程非常重要，下面有升大試題，無一例外都用到此定理。

例 1(2016 台灣)已知兩直線$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$與$M:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-13}{-1}$互相垂直，求包含直線 L 與直線 M 的平面方程式為何？（平面包含兩條直線）

解：由題意可知兩直線的方向向量分別為(1, 2, 3)、(5, -1, -1)，

所求平面法向量為

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+16\vec{j}-11\vec{k}=(1,16,-11)$$

平面包含兩直線，任取直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ 上任一點 $(1,2,3)$，可得所求方程為：

$$(x-1)+16(y-2)-11(z-3)=0.$$

例 2(2016 台灣)設點 $A(1,2,3)$, 直線 $L:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{4}$，已知平面 E 通過 A 點且包含直線 L，求平面 E 的方程。（平面包含一條直線和一個定點）

解：可知平面 E 內有兩點(1, 2, 3)、(5, -1, 4)及一方向向量 $(2,3,4)$

平面內有向量(4, -3, 1)，可求法向量為

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}+16\vec{j}-11\vec{k}=(1,16,-11)$$

思路：先找出平面內兩個向量，求出法向量。再根據平面內的定點確定平面方程。

取平面內一點 $A(1,2,3)$

求得方程為

$$(x-1)+16(y-2)-11(z-3)=0$$

例 3 已知 A(0, 1, 4), B(1, 0, 2), C(2, 0, 3)，求經過 A、B、C 三點的平面方程。
解：依題意得，

$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0,1)$，則平面 ABC 的法向量為

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}=(-1,-3,1)$$

思路：先找出平面內兩個向量，求出法向量。再根據平面內的定點確定平面方程。

取平面任一點 A(0, 1, 4)，可知平面方程為

$$-(x-0)-3(y-1)+(z-4)=0$$

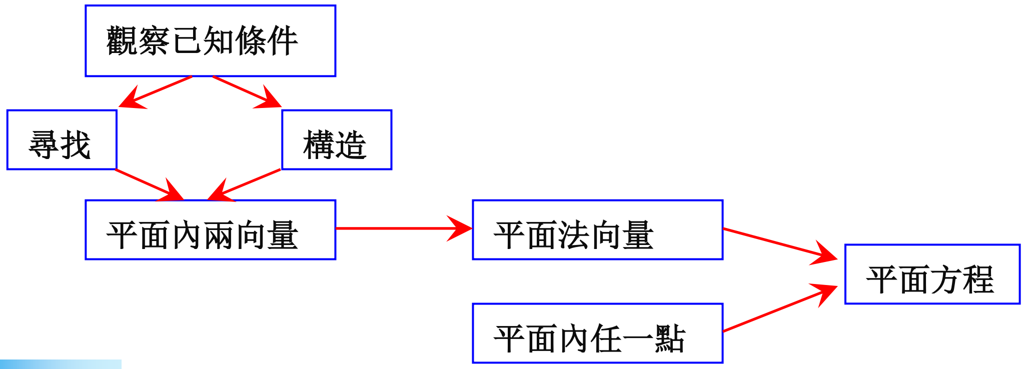
注意：1.平面兩個向量只要構造出來就行，不一定按解答所寫，求取 $\overrightarrow{AC}$ 也行。

2.點 A 是隨機抽取的，取 B、C 點進行也完全沒問題。

課堂練習

1. 已知兩直線 $L:\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$ 與 $M:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-13}{-3}$ 互相垂直，求包含直線 L 與直線 M 的平面方程式為何？（平面包含兩條直線）

課堂小結



課後功課

1. 已知兩直線 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 與 $M:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-13}{1}$ 互相垂直，求包含直線 L 與直線 M 的平面方程式為何？（平面包含兩條直線）

2. 已知兩直線 $L:\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$ 與 $M:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-13}{-3}$ 互相垂直，求包含直線 L 與直線 M 的平面方程式為何？（平面包含兩條直線）

3. 設點 $A(2,-1,1)$，直線 $L:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{4}$，已知平面 E 通過 A 點且包含直線 L，求平面 E 的方程。（平面包含一條直線和一個定點）

4. 已知 A(2, 1, 1), B(1, 1, 2), C(2, 0, 1)，求經過 A、B、C 三點的平面方程。

板書設計

空間平面方程-第二課時

例 1　　例 2　　例 3

空間線面的夾角公式—第五課時

教學目標

➢ 知識目標

1.瞭解兩個線線、線面、面面之間的夾角定義；

2.瞭解二面角的定義；

3.瞭解二面角、面面角的分別。

➢ 技能目標

能根據法向量或方向向量計算兩個線線、線面、面面之間的夾角。

➢ 情意目標

瞭解方向向量和法向量對計算夾角的意義，體會數學知識的連貫性。

教學重點：計算兩個線線、線面、面面之間的夾角

教學難點：夾角公式中的絕對值的意義。

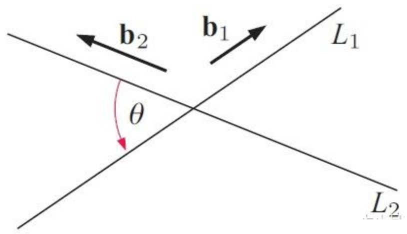
對應基力：無

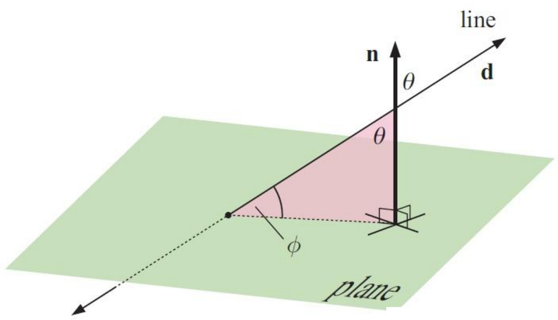
教學過程：

講授新知

求兩個線線、線面、面面之間的夾角，都可用背後的向量夾角公式。由於夾角可能有銳角或鈍角，一般地，我們取銳角。

直線夾角　　　　　　　　　　　　　　　　線面夾角





直線與直線夾角等於對應方向向量夾角，可知為：$\theta=\arccos\dfrac{|\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}|}{|\vec{b_1}|\cdot|\vec{b_2}|}$

注：這裡加絕對值，說明我們取的是銳角。如果不加絕對值，結果可能為負，此時求得的角是鈍角。

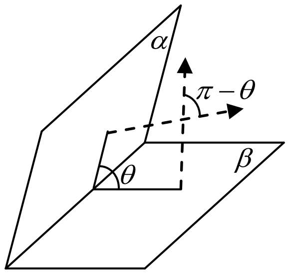
直線與平面，如果方向向量 $\vec{d}$ 與法向量 $\vec{n}$ 的夾角是 θ，則線面夾角為 $\phi=90^\circ-\theta$；

$$\cos\theta=\cos(90^\circ-\phi)=\sin\phi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{d}|}{|\vec{n}||\vec{d}|}$$

$$\therefore \text{線面夾角}\,\phi\,\text{為：}\ \phi = \arcsin\frac{|\vec{n}\cdot\vec{d}|}{|\vec{n}||\vec{d}|}$$

註：分子加絕對值的理由與前面一致，都是確保取的是銳角(或直角)。

平面與平面的夾角，一般地我們也選取銳角。事實上我們也用兩個法向量的夾角來表示平面與平面的夾角。由於法向量的方向性，我們仍需要加上絕對值符號確保取到的角不是鈍角。



如圖，可知面面夾角為：

$$\theta = \arccos\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

總結如下：

角	線線	線面	面面
表示	$\theta = \arccos\frac{\lvert\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}\rvert}{\lvert\vec{b_1}\rvert\cdot\lvert\vec{b_2}\rvert}$	$\phi = \arcsin\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{d}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\lvert\vec{d}\rvert}$	$\theta = \arccos\frac{\lvert\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\rvert}{\lvert\vec{n_1}\rvert\lvert\vec{n_2}\rvert}$

例題講解

例 1 求空間中兩直線 $L:\frac{x-1}{-6}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$ 與 $M:\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-13}{-3}$ 的夾角。

解：可知兩直線的方向向量為(−6, 1, −1), (1, 3, −3)，

$$\text{夾角}\,\theta = \arccos\frac{|\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}|}{|\vec{b_1}|\cdot|\vec{b_2}|}$$

$$= \arccos\frac{|-6+3+3|}{\sqrt{36+1+1}\cdot\sqrt{1+9+9}} = 0$$

$$= 0$$

$\therefore \theta = 90^\circ$

思路：只需找出直線的方向向量。

例 2 求直線 $M:\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-13}{-3}$ 與平面 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 的夾角。

解：直線的方向向量為(1, 3, −3)，平面的法向量為方程係數，即(3, −4, 5)

$$\therefore \text{夾角}\ \phi = \arcsin\frac{|\vec{n}\cdot\vec{d}|}{|\vec{n}||\vec{d}|} = \arcsin\frac{|3-12-15|}{\sqrt{1+10+10}\cdot\sqrt{9+14+25}}$$

$$= \arcsin\frac{24}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{48}}$$

$$= \arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

思路：只需找出直線的方向向量、平面的法向量。

例 3 求兩平面 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 與 $4x+5y+z+12=0$ 的夾角。

解：兩平面的法向量為(3, −4, 5)和(4, 5, 1)

$$\text{其夾角為}\ \theta = \arccos\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$= \arccos\frac{|12-20+5|}{\sqrt{9+16+25}\cdot\sqrt{16+25+1}}$$

$$= \arccos\frac{3}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{42}}$$

$$= \arccos\frac{3\sqrt{21}}{210}$$

思路：只需找出平面的法向量。

例題講解

已知 A(2, 1, 1), B(1, 1, 2), C(2, 0, 1)，D(1, 0, 2)，求平面 ABC 與平面 BCD 的夾角。

分析：只需求出兩個平面的法向量即可。

解：$\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$ ， $\overrightarrow{AC}=(0,-1,0)$

$$\therefore \text{平面 ABC 的法向量為}\ \vec{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{k} = (1,0,1)$$

$\overrightarrow{BC}=(1,-1,-1)$ ， $\overrightarrow{BD}=(0,-1,0)$

$$\therefore \text{平面 ABC 的法向量為}\ \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}-\vec{k} = (-1,0,-1)$$

$$\text{其夾角為}\ \theta = \arccos\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$= \arccos\frac{|-1-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \arccos 1$$

$$= 0^\circ$$

課後功課

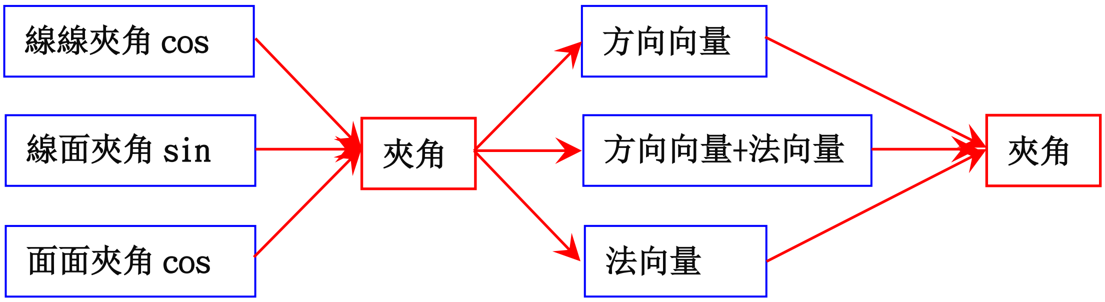
1. 求空間中兩直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-4}{-1}$ 與 $M:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-13}{-3}$ 的夾角。

2. 求直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-4}{-1}$ 與平面 $3(x-1)-4(y+2)+5z=0$ 的夾角。

3. 求兩平面 $2(x+1)-4(y+2)+5z=0$ 與 $4x-2y+z+12=0$ 的夾角。

4. 已知 A(2, 3, 1), B(1, 1, 2), C(2, 0, 1)，D(1, 0, 3)，求平面 ABC 與平面 ACD 的夾角。

課堂小結



板書設計

夾角公式

夾角公式　　例 1　　例 2　　例 3

三、試教評估與反思建議

由於知識點的整體難度不大，學生掌握的程度理想。本來計劃講授空間直線的參數方程，但由於課時所限，也基於現實的升大題型要求，所以並沒有加入。本單元之前學生學習了空間直角坐標系和空間坐標向量，在推導空間直線方程和平面方程時，並沒有困難，學生也能接受。在講授空間中的線面夾角時，學生也能理解轉化為用向量求夾角的方法。從課堂練習或功課來看，學生的掌握程度不錯，可惜由於疫情原因，這部分內容並沒有列入測考計劃。

據已升讀台灣高等學校的畢業生反饋，他到了台灣讀書後經歷過一次摸底考試，考試內容有不少是空間解析幾何的知識，他表示提前學了這些知識比較有用。這也更加堅定了筆者今年應該講授簡單的空間解析幾何內容。

由於教案全部基於自己的知識體系自行編寫，例題大多也是往年台灣的升大考試試題，因此有些細節未必可以面面俱到，如空間中點到平面的距離，平行平面的距離等等。這些純粹套公式的內容也可以在以後的教學過程中加以完善，儘管升學考試中很少用到，但夾角公式倒是可以用在四校聯考附加題上面的。

在教學過程中，教師多次用筆表示空間直線，書本表示空間平面來模擬空間中的線面關係或線面夾角，甚至讓同學自己動手動筆來表示相關操作，某種程度上來看也提醒同學學會用身邊物品，抽象其特性來表示數學元素，對於學生空間想像能力的培養也有一定幫助。

肆、參考文獻

校本自編講義