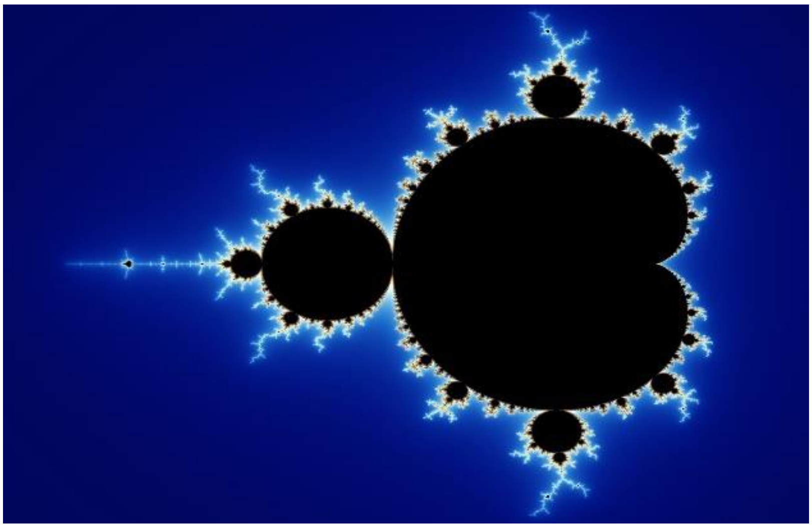
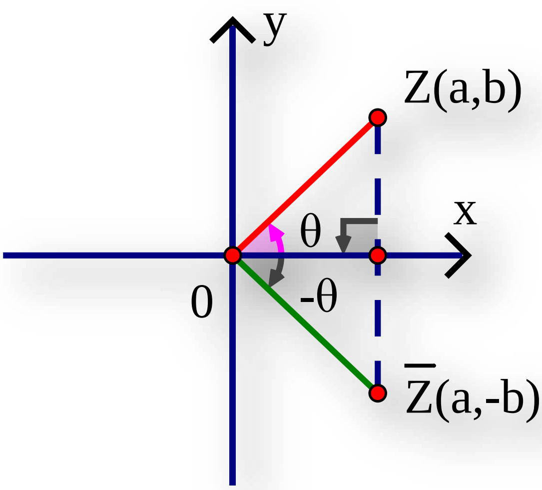
2020/2021 學年教學設計獎勵計劃



複 數



參選類型：教案

作品編號：C050

科目：數學

組別：高中教育

施教年級：高二

簡介

一直以來，筆者也很喜歡複數，原因有很多，例如複數的發現，是由虛數出現而引起的，那虛數是什麼呢?它存在嗎?在現實生活中，它不存在，它很神秘，那為什麼要找它出來?直到上高中更深入的了解複數以後，才發現複數是多姿多彩的，它具有向量性質， 極坐標形式， 指數形式等多種表示方法，處理很多代數， 幾何問題， 有其獨特的優點，它也與很多出名的數學家有關連，例如：義大利數學家卡丹，愛爾蘭數學家哈密頓，偉大的數學家歐拉等等，複數也有著很多很多數學故事，例如：被喻為世界上最美麗的數學公式，很有趣的四元數，被喻為上帝的指紋-複數分形圖等，這也令筆者著迷。

但對一般同學來說，一個不在真實世界上存在的數，我們為什麼要找它出來呢?又為什麼要用複數去解決其它數學領域的問題呢?(不是一早已解決了嗎?)又因為複數的多種表達性形式，一會兒在三角學上應用，一會兒在向量上應用，一會兒在軌跡方程上應用，一會兒在幾何學上應用，一會兒在求餘式上應用，令學生較難理解，也對它不感興趣。

故筆者希望在本單元教學環節中，在教授複數的知識外，也介紹複數的人與事，應用與圖像，希望學生在知識以外，也感受到複數的美。

目次

教學進度表

總施教節數	5 節	科目每週節數	7 節
施教日期（年/月/日）	**課節**	**課題名稱**	**課時(分鐘)**
2021/06/07	第一課節	複數及四則運算	40
2021/06/08	第二課節	複平面及複數的極式	40
2021/06/09	第三課節	複數的極式運算及棣美弗定理	40
2021/06/10	第四課節	共軛複數及解一元高次方程式	40
2021/06/11	第五課節	複數的軌跡方程	40

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1. 瞭解數集的擴充過程及引進複數的必要性。
2.理解複數及其相關概念：實部、虛部、實數、純虛數。
3.掌握複數相等的充要條件，並能應用這一條件解決有關問題。
4.掌握複數的四則運算法則，能熟練地進行複數的四則運算運算。
5. 瞭解複平面、實軸、虛軸的概念。
6.理解複數在複平面內可以用坐標點表示或以原點為起點的向量來表示複數，它們之間是一一對應關係。
7.瞭解複數的代數表示與極式表示之間的關係；模、幅角主值等概念及其幾何意義。
8.理解複數在極式表示式中的乘除運算及其幾何意義。
9.通過複數的極式乘除運算進而探究出棣美弗定理及加以應用。
10. 在問題探究過程中，體會和學習數形結合等數學思想方法。
11.瞭解複數與它的共軛複數在複平面上關係，從而得到基本的複數運算公式。
12. 掌握實係數一元二次方程在複數範圍內的求解，並推廣到一元高次方程式。
13.掌握根與係數關係，能在實係數一元高次方程中解出令複數根的解。
14.感受數學知識之間的聯繫，體會數學知識的整體性，發展學生邏輯推理和數學運算的核心素養。
15. 理解複數式子的代數意義，計算出它的代數表達形式。
16.解讀複數式子的幾何意義，理解它是何種幾何圖形。
17. 在問題探究過程中，體會和學習數形結合數學思想方法，感悟代數運算與幾何圖形的關係。

二、主要內容

1. 複數引入及四則運算
2. 複平面及複數的極式
3. 複數的極式運算及棣美弗定理
4. 共軛複數性質及解一元高次方程式
5. 複數的軌跡方程

三、設計創意和特色

1. 以不同的情景作引入，希望同學以輕鬆有趣的心態，盡快融入課堂中，
2. 以探索式的手法，通過師生之間、學生之間交往互動，提升同學的數學思維，及自我解決問題的能力。
3. 多運用算式及圖像進行聯繫，感悟代數運算與幾何圖形的關係，數形結合數學思想方法。
4. 聯係數學各個不同領域的知識，令學生發現可用不同的方法解決同一個問題。
5. 增設數學閱讀，令學生了解數學的發展及知識周邊的人與事。

四、教學重點

1.熟練地進行複數的四則運算運算

2.瞭解複數的代數式表示與三角式表示之間的關係；模、幅角主值等概念，及其幾何意義。

3.理解複數在三角表示式中的乘除運算及其幾何意義。

4.瞭解複數與它的共軛複數在複平面上關係，從而得到基本的複數運算公式。

5. 了解複數式子的代數意義，計算出它的代數表達形式。

五、教學難點

1.理解複數及其相關概念；掌握複數相等的充要條件。
2.理解複數標準式與三角式之間的互化關係。
3.通過複數的極式運算進而探究出棣美弗定理及加以應用。
4.掌握根與係數關係，能在實係數一元高次方程中解出複數根的解。
5.解讀複數代數式子的幾何意義，了解它是何種幾何圖形。

六、教學用具

黑板、多媒體(包括電腦及投影機)。

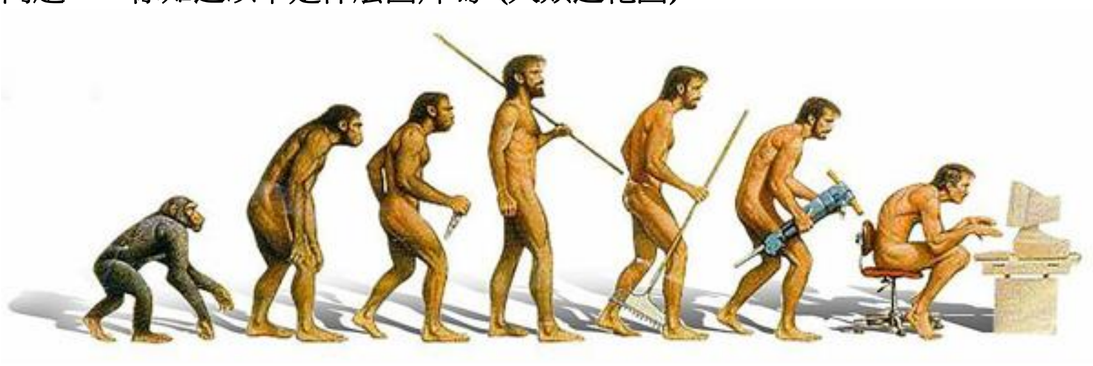
貳、教案

<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="3">複數</td><td>人數</td><td colspan="2">40 人</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>總施教節數</td><td colspan="2">5 節</td></tr>
<tr><td>施教年級</td><td colspan="3">高二</td><td>每節課時</td><td colspan="2">40 分鐘</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課節</td><td rowspan="2">課題名稱</td><td rowspan="2">節數</td><td rowspan="2">教材</td><td colspan="3">教學目標</td></tr>
<tr><td colspan="2">單元目標</td><td>基力要求編號</td></tr>
<tr><td>第一課節</td><td>複數及四則運算</td><td>1</td><td>1.校本教材</td><td colspan="2">1. 瞭解數集的擴充過程及引進複數的必要性。
2.理解複數及其相關概念：實部、虛部、實數、純虛數。
3.掌握複數相等的充要條件，並能應用這一條件解決有關問題。
4.掌握複數的四則運算法則，能熟練地進行複數的四則運算運算。</td><td>A－2－4
A－2－8
A－2－11
E－1－3</td></tr>
<tr><td colspan="6">教學內容及活動</td><td>教學資源</td></tr>
<tr><td colspan="6">如下</td><td>01 複數及四則運算.pptx</td></tr>
</table>

活動過程：教學資源：01 複數及四則運算.pptx

一. 情境導入，初步認識

問題一：你知道以下是什麼圖片嗎?(人類進化圖)



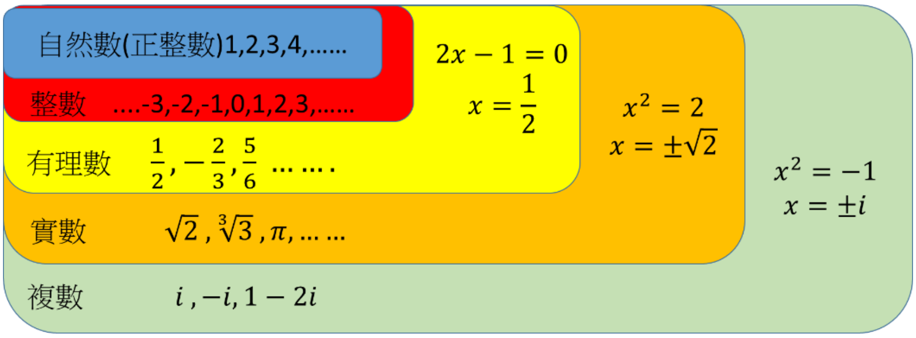
問題二：人類是要經進很多年的進化，那數學是怎樣來的?(也是進化出來的)

二. 思考探索，穫取新知

問題三：那數字是怎樣(進化發展)得出來的?

1. 在古時，人們在狩獵、採集果實等勞動中，由於計數的需要，就產生了 1,2,3,....以及表示沒有的數“0”；
2. 為了表示各種相反意義的量以及滿足計數的需要，人們又引進了負數，將自然數擴充整數；例如：方程$x+5=1$的解為負數。
3. 為了解決測量、分配中遇到的問題，人們引入了分數，並將整數擴充成有理數，使得以上方程在有理數範圍內有解；例如：方程$2x-1=0$ 的解是分數。
4. 為了解決正方形的邊長與對角線長關係所得的結果無法用有理數表示，人們引入了無理數，使得以上方程在無理數範圍內有解；例如： $x^2=2$ 的解為無理數。

問題四：那無理數後，你知不知道人們有沒有發展新的數?(有，複數的引入)
例如：例如：方程$x^2 = -1$



我們知道$x^2 = -1$是沒有實數根的。若訂定這樣的一個數：$i=\sqrt{(-1)}$，這方程便有確定的解 $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ ，這個字母 *i* 稱為單位虛數，它是英文字 “ imaginary” (虛幻)的第一個字母。我們規定 $i^2 = -1$，由此可推出:

$i = \sqrt{-1}$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$	$i^{12} = i^8 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

從以上觀察可得，i是一個以 4 次方為週期的數。
這個定義可以推導出，對於任意的正整數 n ,

$$i^{4n} = 1 \ , \ i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \ , \ i^{4n+3} = -i \ 。$$

複數的定義: 若 $a,b \in R$，則形如$a + bi$ 的數稱為複數 ，這是複數的標準式 (或稱直角式) 。複數通常以一個單獨字母 z 來表示，

例如 $z = a + bi$ ； a 稱為複數的實部， b 稱為複數的虛部 。
1.當b=0 時， $a+bi = a+0i = a$ 。所以任何實數 a 都可以表示為複數$a + 0i$ 。
2.當a=0 且$b \neq 0$ 時， $a + bi = 0 + bi$，複數bi 稱為純虛數 。
3.兩個複數相等當且僅當它們的實部和虛部皆相等。
若a 、b 、c 、d 為實數，則$a+bi = c+di$ 當且僅當 $a=c$, $b=d$
4.複數並沒有大小的比較。例如，我們不會考慮 3 - 4i 和-2 + 5i 那一個比較大。
5. 複數的運算—複數的加、減和乘法可以按照實數多項式的運算法則來進行。
用式子表示如下: 當$Z_1 = a + bi$ 和$Z_2 = c + di$ 則:

複數的加法：$Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$
$= (a + c) + (b + d)\,i$

複數的減法：$Z_1 - Z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di$
$= (a - c) + (b - d)i$

複數的乘法：$Z_1Z_1\ Z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

$Z_2 = c + di \neq 0$，則

複數的除法：$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2}$

$= \frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2}$

注意: $(c+di)(c-di) = c^2 - d^2\ i^2 = c^2 + d^2$是實數。

三.典題分析，講練結合

例一： 計算下列各式:

(a) $i^k \cdot i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3}$

(b) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{8n}$

其中 k 和 n 為自然數.

解： (a) $i^k \cdot i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3} = i^{k+k+1+k+2+k+3} = i^{4k+6} = i^6 = i^2 = -1$

(b) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{8n} = i^{1+2+3+\cdots\ldots+8n}$

$= i^{\frac{(1+8n)8n}{2}} = i^{4n(1+8n)} = (i^{4n})^{8n} = 1$

例二：已知複數$(m-2)(m-1)+(m-2)(m+1)\ i = 0$，其中$m \in R$，

(a) 若此複數為實數，求m的值。

(b) 若此複數為純虛數，求m的值。

(c) 若此複數為零，求m的值。

解：(a) 因此複數為實數，

故它的虛部為 0，即

$(m-2)(m+1) = 0$

$\Rightarrow\quad m = 2 \quad 或 \quad m = -1$

(b) 因此複數為純虛數，故它的實部為 0 且虛部不為 0，即

$(m-2)(m-1) = 0 \Rightarrow \quad m = 2 \quad 或 \quad m = 1$ 及

$(m-2)(m+1) \neq 0 \Rightarrow \quad m \neq 2 \quad 且 \quad m \neq -1$

即得$m = 1$

(c) 因此複數為 0 ，故它的實部為 0 且虛部為 0，即

$(m-2)(m-1) = 0 \Rightarrow \quad m = 2 \quad 或 \quad m = 1$ 及

$(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \quad m = 2 \quad 或 \quad m = -1$

即得$m = 2$

例三：計算下列各式，並把結果寫成$a+bi$的形式：

(a) $(3+6i)+(5+2i)+(7-4i)$

(b) $(1+5i)(3-4i)-(-7+2i)$

(c) $(-3-4i)(2+3i)$

(d) $\frac{1-2i}{3+4i}$

解：

(a) $(3+6i)+(5+2i)+(7-4i) = (3+5+7)+(6+2-4)i$

$= 15+4i$

注意地方：留意複數的實部要和實部作運算，而虛部要和虛部運算。

(b) $(1+5i)-(3-4i)-(-7+2i) = (1-3+7)+(5+4-2)i$

$= 5+7i$

注意地方：留意複數的實部要和實部作運算，而虛部要和虛部運算。

(c) $(-3-4i)(2+3i) = (-6+12)+(-9-8)i = 6+(-17)i$

注意地方：複數的乘法要根據乘法分配公式，小心一點計算便不會有錯。

(d) $\frac{1-2i}{3+4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{(3-8)+(-4-6)i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

注意地方：複數的除法要點是要把分母化作有理數，故我們用平方差公式的技巧，分子分母同乘分母虛部為相反數。

例四： 若$(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$，試求實數 x 和 y 的值。

解: $(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$

$\therefore (x+y-5)+(2y-3x+5)i = 0+0i$

因 x 和 y 為實數，按複數相等的規定，故得出。

$\begin{cases} x+y-5=0 \\ 2y-3x+5=0 \end{cases}$ ， 解此方程組得:$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 。

例五: 試求 $3+4i$的平方根 .

分析: 即要求 $\sqrt{3+4i}$ ，設 $\sqrt{3+4i}$化簡得也是一個複數$x+yi$，故有以下式子。

解 : 設$3+4i = (x+yi)^2$ ， 其中x 和y 為實數。

$$3+4i = x^2-y^2+2xyi$$

$$x^2-y^2 = 3 \dots\dots (1)$$

$$2xy = 4 \ldots\ldots (2)$$

由(2)得 $y = \frac{2}{x} \ldots\ldots (3)$

將(3)代入(1)

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$x^2 = 4$ 或 $x^2 = -1$ (不合,捨 去)

$x = 2$ 或 $x = -2$

由(3) 式，當 $x = 2$ 時， $y = 1$;當 $x = -2$ $y = -1$ 。

$3 + 4i$ 的平方根為 $2 + i$ 和 $-2 - i$ 。

四. 課堂小結

1. i是一個以 4 次方為週期的數，對於任意的正整數 n ,

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ 。

2.若 $z = a + bi$; a 稱為複數的實部， b 稱為複數的虛部 。

a.當b=0 時， $a+bi = a+0i = a$ 。所以任何實數 a 都可以表示為複數$a + 0i$ 。

b.當a=0 且$b \neq 0$ 時， $a + bi = 0 + bi$，複數bi 稱為純虛數 。

c.兩個複數相等當且僅當它們的實部和虛部皆相等。

若a 、b 、c 、d 為實數，則$a+bi = c+di$ 當且僅當 $a=c$, $b=d$

d.複數並沒有大小的比較。

3.複數的加、減、乘法和除法是按照實數多項式的運算法則來進行。

五. 數學閱讀 ：複數的發現與發展

義大利數學家卡丹（Cardano G.，1501-1576 年）曾遇見過這種奇怪的數，有一次，他動手解答一道很簡單的數學題："兩個數的和是 10，積是 40，問這兩個數各是多少？"

卡丹設第一個數是 x，由於兩個數的和是 10，他將第二個數記作（10－x）；因為兩個數的積是 40，於是有 x（10－x）＝40，即$x^2-10x+40=0$。

這是一個一元二次方程，數學家們早就知道了這類方程的求根公式，只要把方程的係數 1、－10、40 代入公式裡，馬上就可以算出方程的兩個答案來，可是，當卡丹把 1、－10、40 代入公式後，卻算出了兩個令人困惑不解的怪東西：$5+\sqrt{-15}$ 和$5-\sqrt{-15}$ 。

卡丹想，既然$\sqrt{15}$ "僅僅是些記號而已"，那麼，何嘗不把$\sqrt{-15}$也看作"是些記號而已"呢？他鼓足勇氣，"不管良心會受到多大的責備"，把那兩個怪東西當作是兩個數，代入題中進行了演算：

$$5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=10,$$
$$(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=40,$$

這兩個怪東西正好是題目要求的數！

從這個意義上說，這兩個怪東西應該是一種數。可是，這是一種什麼樣的數呢？卡丹沒有弄清楚，17 世紀的數學家們也沒有弄清楚。他們覺得這種數不像其他的數那樣"實在"，有一種些虛無縹緲的味道，於是就起了個名字叫"虛數"。

18 世紀下半葉，大數學家歐拉最先採用 i 這個記號來表示虛數單位。有了虛數之後，整個數系也就完備了。除了 0 不能作分母以外，任何兩個數都可以相加、相減、相乘、相除，以及乘方和開方了。

六. 佈置作業

完成工作紙一

<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="3">複數</td><td>人數</td><td>40 人</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>總施教節數</td><td>5 節</td></tr>
<tr><td>施教年級</td><td colspan="3">高二</td><td>每節課時</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課節</td><td rowspan="2">課題名稱</td><td rowspan="2">節數</td><td rowspan="2">教材</td><td colspan="2">教學目標</td></tr>
<tr><td>單元目標</td><td>基力要求編號</td></tr>
<tr><td>第二課節</td><td>複平面及複數的極式</td><td>1</td><td>1.校本教材</td><td>1. 瞭解複平面、實軸、虛軸的概念。
2.理解複數在複平面內可以用坐標點表示或以原點為起點的向量來表示複數，它們之間是一一對應關係。
3.瞭解複數的代數表示與三角表示之間的關係；模、輻角主值等概念及其幾何意義。</td><td>B－4－5
B－4－2
B－5－3
B－5－5
E－1－2</td></tr>
</table>

教學內容及活動	教學資源
如下	02 複平面及複數的極式.pptx

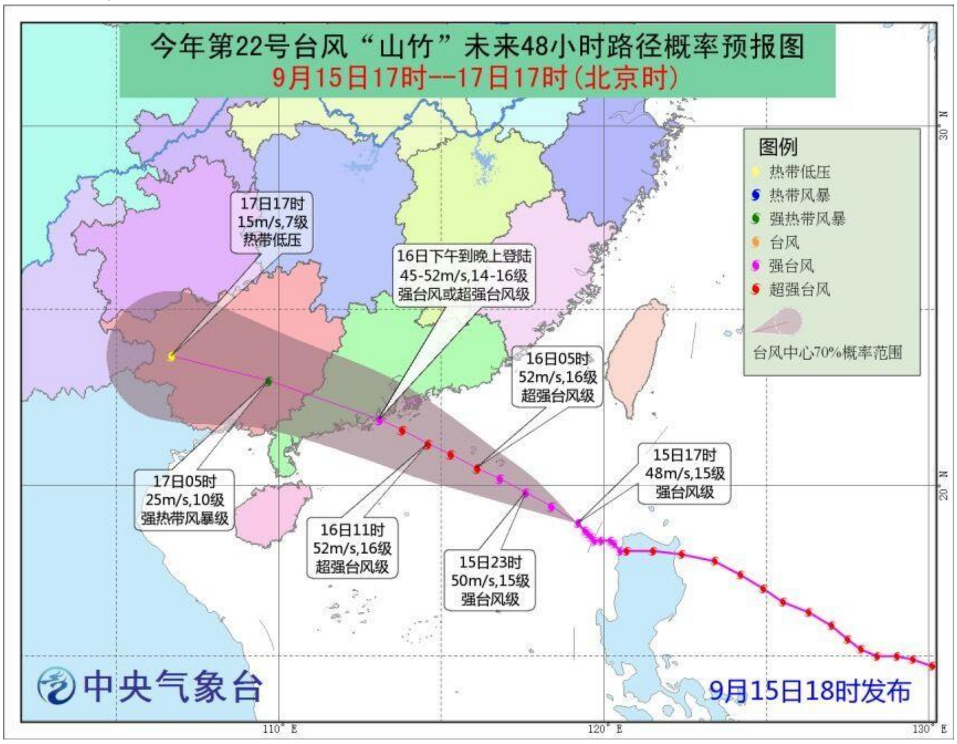
活動過程：教學資源：02 複平面及複數的極式.pptx

一. 情境導入，初步認識

這是一張颱風路線圖，記錄了颱風的路線及位置。

問題一：在平面直角坐標係中，有什麼記錄位置的方法?

(方法一是用橫及縱坐標方式記錄，方法二要用極坐標方式記錄)

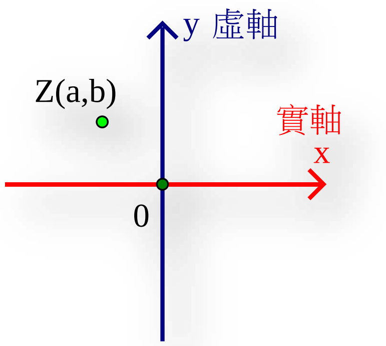


問題二：實數我們可以用數線去記錄數字位置，那複數我們可以用什麼方法記錄它的位置呢?(可以用平面直角坐標系表示複數。)

問題三：我們怎記錄複數在平面直角坐標係呢?(學生思考中，引入新課。)

二. 思考探索，穫取新知

1.複數 z = a + bi 的定義， Z 是由實數 a 和 b 所唯一確定的。因此，複數 z 和實數序偶(a ，b) 成一對一的對應關係。而實數序偶(a， b)可在直角坐標平面上以一個點表示，坐標平面上的點$Z(a,b)$ 的可被用作表示一個複數$z=a+bi$ 。這樣的坐標平面稱為複數平面 ，或稱為阿根圖 。



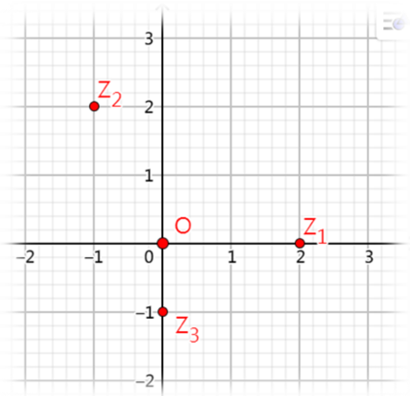
複數z_1、z_2、z_3對應的坐標點分別為

$z_1 =$ 2+0i 對應坐標點為Z_1 (2,0)

$z_2 =$ -1+2i 對應坐標點為Z_2 $(-1,2)$

$z_3 =$ 0-i 對應坐標點為Z_3 $(0,-1)$

$O = 0 = 0 + 0i$ 對應坐標點為 $O(0,0)$



2. 複數的極式：如圖 所示，點Z 表示複數$z = a + bi$ 。

設$OZ = r$ 及OZ 與 x 軸的正方向所形成的角為θ。

$a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

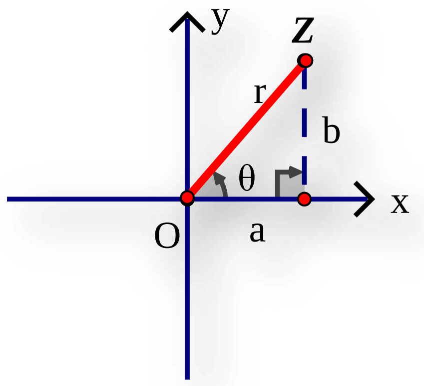
複數$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$稱為 極式。

1.長度 r 稱為 模，記為$|z|$，

2.角θ稱為 z 的 幅角，記為 argz 或 ampz 。

3.複數z的極式$r(\cos\theta+i\sin\theta)$，可以縮寫為$r\mathrm{cis}\theta$。

4. 根據定義，模 $r\geq0$ ，幅角的範圍為 $0\leq\theta<2\pi$ 。



三.典題分析，講練結合

例一： 若$Z = 2+3i$ ，試在阿根圖上標註出表示下列各複數的：

Z 、iZ 、$\mathrm{i}^2\,\mathrm{Z}$ 、 $\mathrm{i}^3\,\mathrm{Z}$ 、 $\mathrm{i}^4\,\mathrm{Z}$ 。並找出它們有什麼關係。

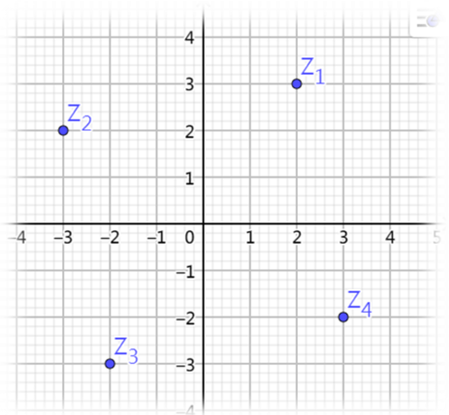
解： $\mathrm{Z}_1 = 2 + 3\mathrm{i} = (2{,}3)$ 、

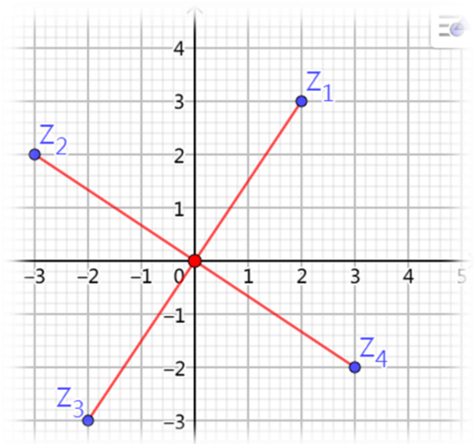
$\mathrm{Z}_2 = \mathrm{iZ} = \mathrm{i}(2 + 3\mathrm{i}) = -3 + 2\mathrm{i} = (-3{,}2)$、

$\mathrm{Z}_3 = \mathrm{i}^2\,\mathrm{Z} = \mathrm{i}^2\,(2 + 3\mathrm{i}) = -2 - 3\mathrm{i} = (-2, -3)$、

$\mathrm{Z}_4 = \mathrm{i}^3\,\mathrm{Z} = \mathrm{i}^3\,(2 + 3\mathrm{i}) = 3 - 2\mathrm{i} = (3, -2)$、

$\mathrm{Z}_5 = \mathrm{i}^4\,\mathrm{Z} = \mathrm{i}^4\,(2 + 3\mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i} = (2{,}3)$





思考 ：上圖的五個坐標點(其中一個重合)，你看到有什麼特點?

結論：當 z 乘 i 時，即表示 點 Z 繞著原點沿反時針方向旋轉 90°角，

得到iz 的坐標點。

例二： 已知 $z_1 = 4 + \mathrm{i}$ ， $z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$ 。

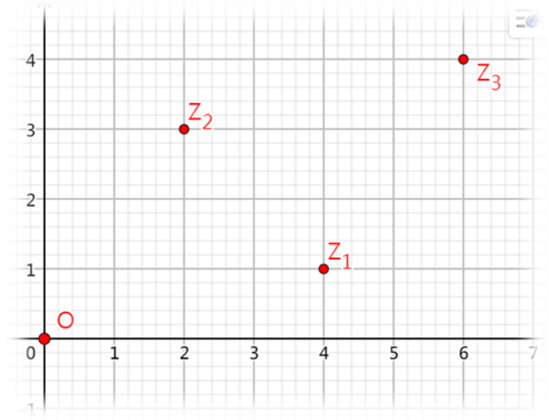
(a) 在複平面上標註出分別表示z_1，z_2，$z_1 + z_2$的點Z_1 、Z_2、 Z_3 。

(b) 四邊形$OZ_1Z_3Z_2$ 為何種類型的四邊形?

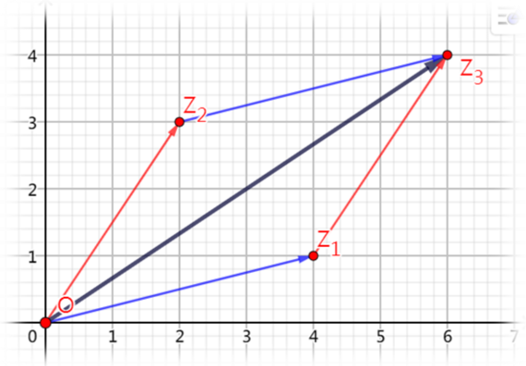
(c)從以上情況，你得到什麼結論?

解：(1)$z_1 + z_2 = (4+i)+(2+3i) = 6+4i$

因此，Z_1 、Z_2 、Z_3 如右圖−阿根圖(複平面)所示:



(2)由圖所示，$Z_1Z_3 // OZ_2$ 和$Z_1Z_3 = OZ_2$,$OZ_1Z_3Z_2$ 為一平行四邊形。



(3) 由此看到，在複平面上，複數的加法是遵從向量的平行四邊形加法的

(即$\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_3}$) 。

例三：化下列各複數為極式：(其中幅角以角度制表示)

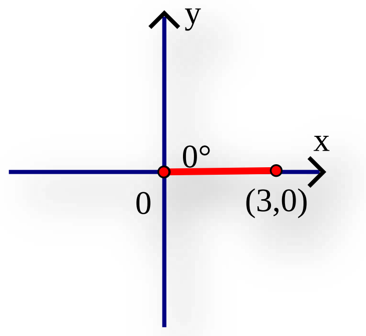
(a) 3 (b) $-4i$ (c) $4-4i$ (d) $-3\sqrt{3}+3i$

解：（ａ）$3 = 3 + 0\,i$，用複平面的坐標表示為(3,0)，

如圖由圖可以直接看出，

它的模長為 3，幅角為 0°

故它的極式為 $3 = 3 + 0\,i = 3(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$



步驟：1.先把複數以坐標形式表示，

2.在複平面把坐標畫出，且與原點連線，此為終邊，

3.求出此點到原點的長度(模)，

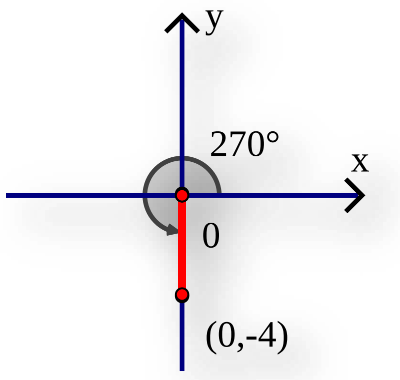
4.以正 x 軸為始邊，逆時針方向旋轉，求出它與終邊所成的角(幅角)，

5.此時，我們有模及幅角，按極式形式寫出。

（b）−4i=0−4 i，用複平面的坐標表示為(0,−4)，如圖可以直接看出，

它的模長為 4，幅角為 270°，故它的極式為

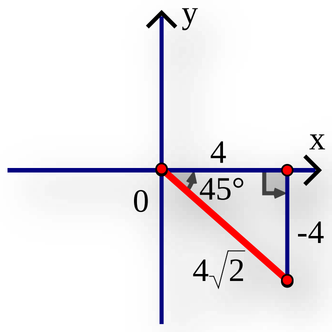
$-4i=0-4i=4(cos270° + i\ sin270°)$



（c）4−4i=4−4 i，用複平面的坐標表示為(4,−4)，如圖中的三角形，可計算

出它的模長為$\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$，又看出它是一個等腰直角三角形，

故它的幅角為 315°，故它的極式為$4-4i=4\sqrt{2}\ (\cos 315° + i \sin 315°)$



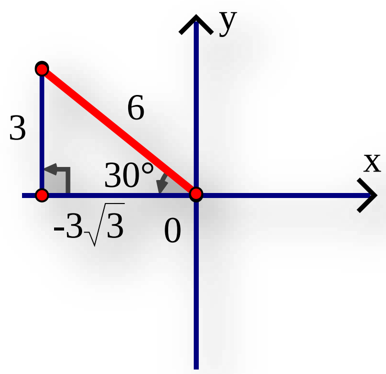
步驟：1.若坐標點不是落在 x 軸及 y 軸上，我們可以把此點與原點連線及
作 x 軸的垂線，
2.此為直角三角形，求出它的斜邊(模)，
3.按直角三角形邊長的關係，找出它的內角，
(此題的三角形為等腰直角三角形，有兩內角為 45 度)
4.以正 x 軸為始邊，逆時針方向旋轉，求出它與終邊所成的角(幅角)，
(此題的幅角為 315 度)
5.此時，我們有模及幅角，按極式形式寫出。

（d）$-3\sqrt{3}+3i$，用複平面的坐標表示為$(-3\sqrt{3},3)$， 如圖由中的三角形，
可計算出它的模長為

$$\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6，$$

又由定理可知此直角三角形內角為 30 度及 60 度，故它的幅角為 150° ，

故它的極式為$-3\sqrt{3}+3i=6(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$



步驟：1.若坐標點不是落在 x 軸及 y 軸上，我們可以把此點與原點連線及
作 x 軸的垂線，
2.此為直角三角形，求出它的斜邊(模)，
3.按直角三角形邊長的關係，找出它的內角， (因直角三角形 30 度所對

的邊為斜邊的一半，故此題的直角三角形的內角為 30 度，60 度及 90 度)

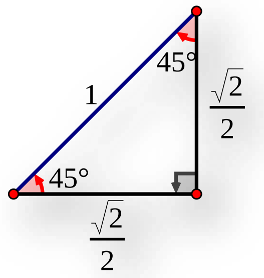
4.以正 x 軸為始邊，逆時針方向旋轉，求出它與終邊所成的角(幅角)，(此題的幅角為 150 度)

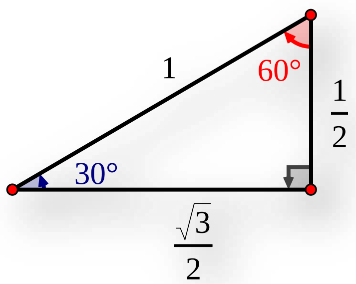
5.此時，我們有模及幅角，按極式形式寫出。

即時練習：化下列各複數為極式：(其中幅角以弧度制表示)

(a) $1+i$ (b) $-1-i$ (c) $\sqrt{2}i$ (d) $-\sqrt{2}$

現在，要說一說兩個較特別的三角形，它對由極式化回標準式是很有幫助的。





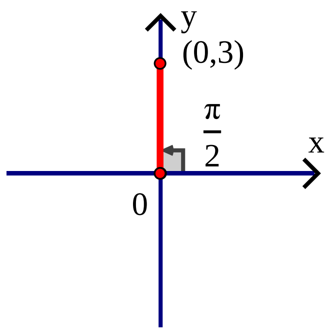
例四：化下列各複數為標準式：

(a) $3(cos\,90°+i\,sin\,90°)$ (b) $5(cos\,180°+i\,sin\,180°)$

(c) $4(cos\,210°+i\,sin\,210°)$ (d) $-2(cos\,135°+i\,sin\,135°)$

解:（a）$3(cos\,90°+i\,sin\,90°)$，用複平面的坐標表示，如圖

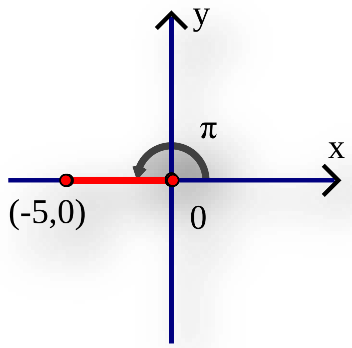
由圖中可看出複數的坐標為$(0,3)$，



故$3(cos\,90°+i\,sin\,90°)=0+3i=3i$

（b）$5(cos\,180°+i\,sin\,180°)$，用複平面的坐標表示，如圖

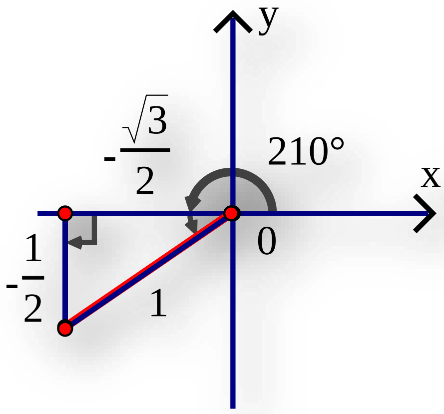
由圖中可看出複數的坐標為$(-5,0)$，



故$5(cos\,180° + i\,sin\,180°) = -5 + 0i = -5$

（c）$4(cos\,210° + i\,sin\,210°) = 4[1(cos\,210° + i\,sin\,210°)]$，
用複平面的坐標表示$1(cos\,210° + i\,sin\,210°)$，如圖

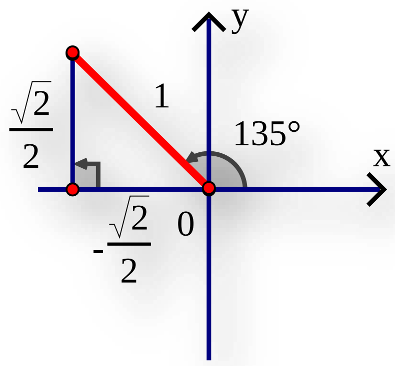
由圖中可看出複數的坐標為$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，



故$4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$

步驟：：1.先把極式的模化成 1，從極式中，找出它的模及幅角，
2.在複平面標出它的坐標位置，畫出直角三角形，注意
此三角形的特徵，標出它的內角，求出它的直角邊長，
3.標出它的坐標點(請注意方向，x 軸以原點的左方為 -
而右方為 + ，y 軸以原點的下方為 – 而上方為 +)，
4.把坐標形式化回複數的標準形式便可。

（d）$-2(cos\,135° + i\,sin\,135°) = -2[1(cos\,135° + i\,sin\,135°)]$，
用複平面的坐標表示$1(cos\,135° + i\,sin\,135°)$，如圖



由圖中可看出複數的坐標為$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故$-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

四. 課堂小結

1.複數$z=a+bi$ 在複平面上可以用坐標點 Z(a ，b)表示，

2.複數$z=a+bi$也可用極式表示，

設$OZ=r$ 及OZ 與 x 軸的正方向所形成的角為θ。

$a=rcos\theta$ ，$b=rsin\theta$,$r=\sqrt{a^2+b^2}$ ，$\tan\theta=\frac{b}{a}$

$z=r(cos\theta+isin\theta)$

3. 當 z 乘 i 時，即表示 點 Z 繞著原點沿反時針方向旋轉 90°角，

得到iz 的坐標點。

4. 複數的加法及減法是遵從向量的平行四邊形加法的。

五. 數學閱讀 ：複數外的數-四元數

數學中的數，除了實數、複數之外，還有四元數。四元數（Quaternions）是由愛爾蘭數學家哈密頓(William Rowan Hamilton,1805-1865）在 1843 年發明的數學概念。

一般地，形如 a + bi+ cj + dk 的數為四元數，其中 a、b、c 、d 都是實數，i、j 和 k 都是虛數單位，這些虛數單位滿足 i2 = j2 = k2 =-1.給定兩個四元數，可以進行同複數類似的加法和減法運算，例如(2+3i+4j +5k) + (6+7i +8j+9k)= 8+10i+12j+14k。不過，對於兩個四元數相乘來說，情況就比複數相乘複雜得多.因為此時，除了會出現i^2，j^2，k^2 之外，還會出現 ij，ik， jk，,ji，, ki，kj 等。一般地，兩個四元數相乘時，規定 ij=-ji=k，jk=-kj=i ，ki=-ik=j，

例如: $(2+3i+4j+5k)(6+7i+8j+9k)$

$$= (12-21-32-45)+(14+18+36-40)i+(16+24+35-27)j + (18+30+24-28)k$$

$$= -86+28i+48j+44k.$$

由此也可以看出，四元數的乘法是不滿足交換律的。

不過，有意思的是，與複數的乘法能夠表示平面直角坐標系中的旋轉類似，四元數的乘法能夠表示空間中的旋轉。因此，四元數在描述三維旋轉、姿態方面有一些獨特的優點，人們經常使用四元數去描述飛行器、機器人等的姿態。

感興趣的同學請自行查閱有關資料。順帶提及的是，有同學可能會想:既然能有四元數，那有沒有三元數呢？能不能規定形如 a + bi+ cj 的數為三元數呢?其中 a、b、c 都是實數，i、j 都是虛數單位。對這個問題感興趣的同學，可以考慮一下此時 i 與 j 的積 ij 的結果是什麼，由此是否出現矛盾，等等。

六. 佈置作業

完成工作紙二

<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="3">複數</td><td>人數</td><td colspan="2">40 人</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>總施教節數</td><td colspan="2">5 節</td></tr>
<tr><td>施教年級</td><td colspan="3">高二</td><td>每節課時</td><td colspan="2">40 分鐘</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課節</td><td rowspan="2">課題名稱</td><td rowspan="2">節數</td><td rowspan="2">教材</td><td colspan="3">教學目標</td></tr>
<tr><td colspan="2">單元目標</td><td>基力要求編號</td></tr>
<tr><td>第三課節</td><td>複數的極式運算及棣美弗定理</td><td>1</td><td>1.校本教材</td><td colspan="2">1.理解複數在極式表示式中的乘除運算及其幾何意義。
2.通過複數的極式運算進而探究出棣美弗定理及加以應用。
3. 在問題探究過程中，體會和學習數形結合等數學思想方法，感悟運算形成的基本過程。</td><td>B－5－6
B－5－7
B－5－16
E－1－6</td></tr>
<tr><td colspan="6">教學內容及活動</td><td>教學資源</td></tr>
<tr><td colspan="6">如下</td><td>03 極式乘除及棣美弗定理.pptx</td></tr>
</table>

活動過程：教學資源：03 極式乘除及隸美弗定理.pptx

一. 情境導入，初步認識

我們學會了複數的四則運算，例如：

(1) $(-3-4i)(2+3i)=(-6+12)+(-9-8)i=6+(-17)i$

(2) $\frac{1-2i}{3+4i}=\frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{(3-8)+(-4-6)i}{25}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

問題一：但下面這一題，你會怎樣計算呢?(學生思考中，因這題計算很煩人的)

$$\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{2}\left(\sqrt{3}-i\right)^{5}}{(2+2i)\left(-\sqrt{3}+i\right)^{8}}$$

問題二：若要大量計算，複數的乘法與除法在標準式下是很煩人的，我們有沒有別的方法來進行複數的乘法與除法運算?（可以試試用極式）

二. 思考探索，穫取新知

（以下定理老師作引導，學生以小組研究，通過討論，探究，推想及證明，增加學生的解決問題能力，增強數學學習的自信心。）

1.極式表示法的複數之積

設$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

則$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2]$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$z_1z_2=r_1r_2\ \cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=r_1r_2$ 及 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2=\theta_1+\theta_2$

2.極式表示法的複數之商

設$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\neq 0$，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

思考：若 $z= r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$，那麼，$z^2$，$z^3$，……，$z^n$怎表示呢?

$$z^2 = r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r^2\,(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
$$z^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$= r^3(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

應用這個規律，依此類推可得 .

……………………

$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

這個結論可以推廣到當 n 為有理數的一般情形，它就是 棣美弗定理。

三.典題分析，講練結合

例一：化簡下列各式，並以標準式表示：

(a) $\dfrac{\sqrt{6}\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)}$

(b) $\dfrac{(co\,s\,\theta+ isi\,n\,\theta)^5\,(co\,s\,3\theta+ isin\,3\,\theta)}{(co\,s\,2\theta+ isin\,2\,\theta)^3}$

解：(a)

$$\frac{\sqrt{6}\left(cos\,\frac{2\pi}{3}+i\,sin\,\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(cos\,\frac{\pi}{6}+i\,sin\,\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left[cos\,\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\,sin\,\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{3}\left(cos\,\frac{3\pi}{6}+i\,sin\,\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(cos\,\frac{\pi}{2}+i\,sin\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}(0+1i)$$
$$= \sqrt{3}i$$

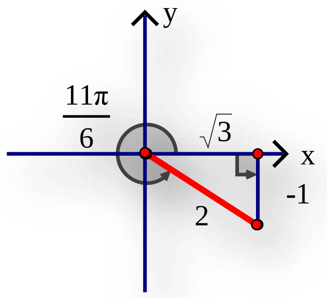
(b) $\dfrac{(\cos\theta+ i\sin\theta)^5\,(\cos 3\theta+ isin\,3\,\theta)}{(\cos 2\theta+ isin\,2\,\theta)^3}$

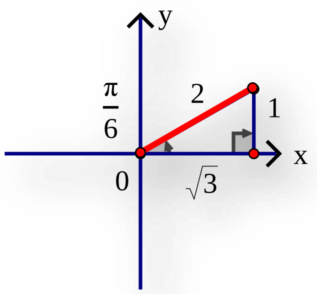
$$= \frac{(\cos 5\,\theta + i\sin 5\theta)(\cos 3\theta + isin\,3\,\theta)}{(\cos 6\theta + isin\,6\,\theta)}$$
$$= \cos(5\theta + 3\theta - 6\theta) + i\sin(5\theta + 3\theta - 6\theta)$$
$$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

例二：$\frac{(\sqrt{3}-i)^5}{\sqrt{3}+i}$

解：先把複數的標準式化成極式

$\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6})$，$\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$





$$\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^5}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2^5(\cos\frac{55\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{55\pi}{6})}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

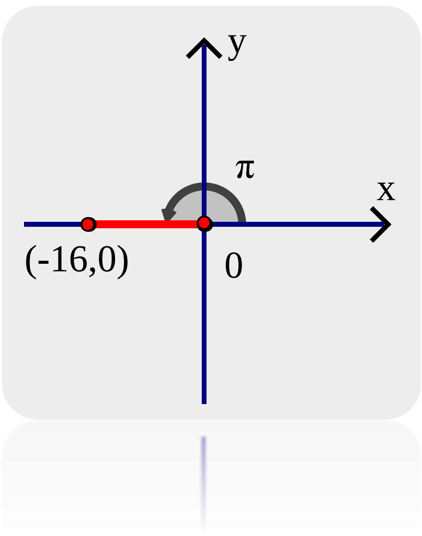
$= 2^4\,(\cos\frac{54\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{54\pi}{6})$

$= 16\,(\cos 9\pi + \mathrm{i}\sin 9\pi\,)$

$= 16\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\,)$

$= -16 + 0\mathrm{i}$

$$= -16$$



例三：若$z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^n$中，求最小的正整數$n$，使得$z$是實數，並求其值。

解： 分析:要z成為實數，在極式的角度看，則要求它的終邊要在 x 軸上，

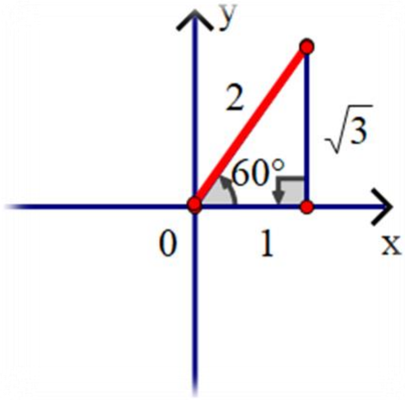
故先把z化成極式，而且按題要求，n要最小的正整數。

由$1+\sqrt{3}i$化作極式得

$2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$，

故$z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^n=[2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)]^n$

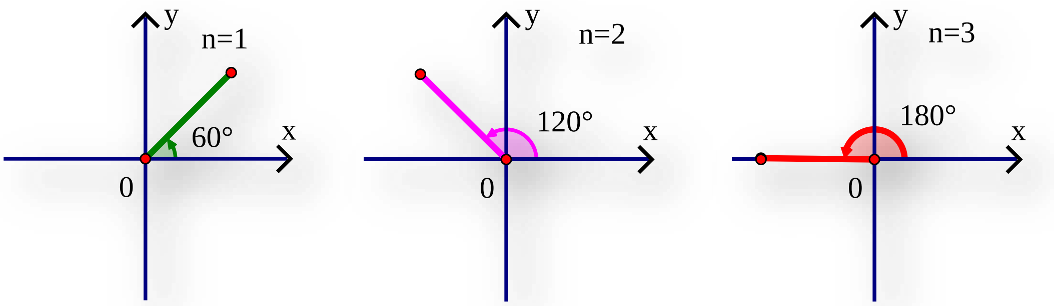
$=2^n[\cos(n\cdot 60^\circ)+i\sin(n\cdot 60^\circ)]$



考慮當$n=1$，有$1\cdot 60^\circ=60^\circ$，其極值的終邊不是落在 x 軸上，

當$n=2$，有$2\cdot 60^\circ=120^\circ$，其極值的終邊也不是落在 x 軸上，

當$n=3$，有$3\cdot 60^\circ=180^\circ$，其極值的終邊是落在 x 軸上，



故n的最小的正整數值是 3，此時，

$$z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^3=2^3[\cos(3\cdot 60^\circ)+i\sin(3\cdot 60^\circ)]$$

$$=8(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=8(-1+0i)=-8$$

(註：此題把複數化成極式，再考慮複角，終邊落在什麼位置，比直接用標準式計算方便多，也帶出數與形之間的聯係。)

例四：把下列各式以極式$r(\cos\theta+\sin\theta)$表示:

(1) $r(\cos\theta-i\sin\theta)$

(2) $r(\sin\theta+i\cos\theta)$

(3) $r(\sin\theta - i\cos\theta)$

解：

公式一 $\cos(-\theta) = -\cos\theta$ ， $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

公式二 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ ， $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

(1) $r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

(2) $r(\sin\theta + i\cos\theta) = r[\cos(90^\circ - \theta) + i\sin(90^\circ - \theta)]$

(3) $r(\sin\theta - i\cos\theta) = r[\cos(90^\circ - \theta) - i\sin(90^\circ - \theta)]$

$= r[\cos(\theta - 90^\circ) + i\sin(\theta - 90^\circ)]$

小結：因複數化成極式，對其乘法及除法運算很有幫助(例一至例三)。但有一些看似極式，但不是極式的複數(例四)， 它們不是複數的極式，所以它們是不能運用極式的乘法及除法運算式，但經過恒等變形，可以變回極式的。之後的運算，就會方便快捷多了。

四. 課堂小結

1.極式表示法的複數之積與商

設$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

則$z_1z_2 = r_1r_2 \ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

2.棣美弗定理

設 $z= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

則$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

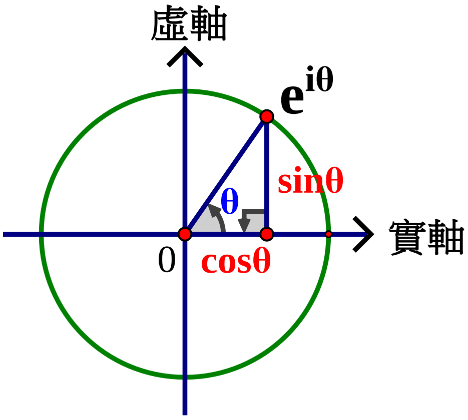
五. 數學閱讀：數學中的最優美定理

歐拉(Leonhard Euler)是 18 世紀傑出的數學家，同時也是有史以來最偉大的數學家之一。歐拉在數學的多個領域，包括微積分和圖論都做出過重大貢獻。他引進的許多數學術語和書寫格式，例如函數的記法"f(x)"，一直沿用至今。此外，他還在力學、光學和天文學等學科有突出的貢獻。他也是一位多產作者，其學術著作有 60-80 冊。法國數學家皮耶-西蒙·拉普拉斯曾這樣評價歐拉對於數學的貢獻：「讀歐拉的著作吧，在任何意義上，他都是我們的大師」，其中，有一條數學公式，被喻為世界上最美麗的數學公式，這就是歐拉恆等式。

這是著名的歐拉恆等式：$e^{i\pi}+1=0$，

其中 e 是自然對數的底數，亦稱歐拉數，i是虛數單位，滿足 $i^2=-1$ (或寫成 $i=\sqrt{-1}$)， π是圓周率。歐拉恆等式出現三個基本算術運算：加法、乘法與指數，聯繫了五個基本數學常數：$0,1,e,i,\pi$。歐拉恆等式是歐拉公式 (Euler formula) 的一個必然結果，它說：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

其中 θ 為任意實數。根據歐拉公式，指數函數$e^{i\theta}$ 的實數部分等於餘弦函數$\cos\theta$ ，虛數部分等於正弦函數$\sin\theta$ 。在複數平面上，$e^{i\theta}$ 位於單位圓周， θ 即為從 1 至 $e^{i\theta}$的弧長。當$\theta=\pi$ ，即得歐拉恆等式。



六. 佈置作業

完成工作紙三

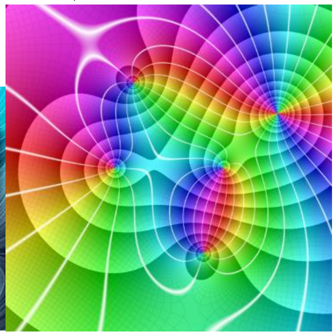
<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="3">複數</td><td>人數</td><td colspan="2">40 人</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>總施教節數</td><td colspan="2">5 節</td></tr>
<tr><td>施教年級</td><td colspan="3">高二</td><td>每節課時</td><td colspan="2">40 分鐘</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課節</td><td rowspan="2">課題名稱</td><td rowspan="2">節數</td><td rowspan="2">教材</td><td colspan="3">教學目標</td></tr>
<tr><td colspan="2">單元目標</td><td>基力要求編號</td></tr>
<tr><td>第四課節</td><td>共軛複數性質及解一元高次方程式</td><td>1</td><td>1.校本教材</td><td colspan="2">1.瞭解複數與它的共軛複數在複平面上關係，從而得到基本的複數運算公式。
2. 掌握實係數一元二次方程在複數範圍內的求解，並推廣到一元高次方程式。
3.掌握根與係數關係，能在實係數一元高次方程中解出令複數根的解。
4.感受數學知識之間的聯繫，體會數學知識的整體性，發展學生邏輯推理和數學運算的核心素養。</td><td>A－2－3
A－2－6
E－1－5</td></tr>
<tr><td colspan="6">教學內容及活動</td><td>教學資源</td></tr>
<tr><td colspan="6">如下</td><td>04 共軛複數及解方程式.pptx</td></tr>
</table>

活動過程：教學資源：04 共軛複數及解方程式.pptx

一. 情境導入，初步認識

問題一：先看看以下圖片，你們有什麼感覺?(好像藝術品)



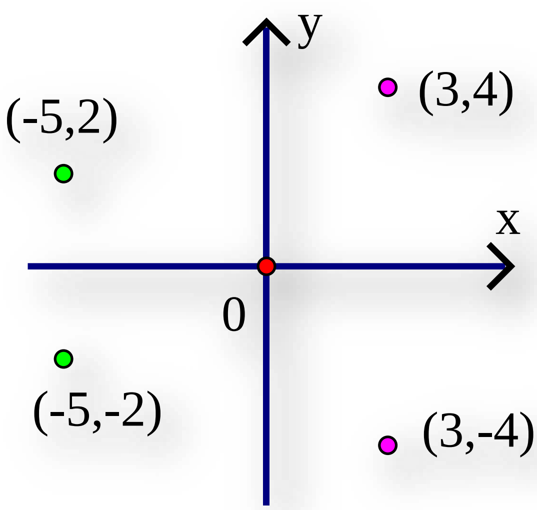


問題二：你知不知道它們是怎樣繪制出來的嗎?
(用分形幾何及複數的方程繪制出來的)

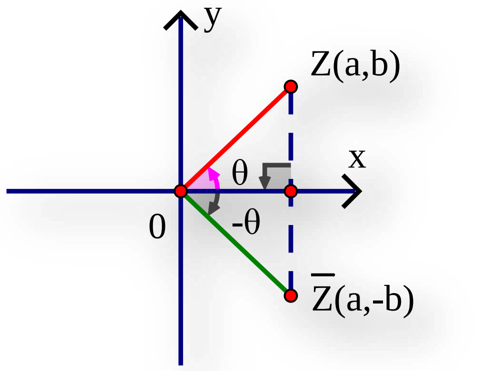
學了這一節後，你們會對複數繪圖會有進一步的了解(引入新課)

二. 思考探索，獲取新知

1.若$z = a + bi$為一複數，則$a - bi$ 稱為z的共軛複數，記為$\bar{z} = a - bi$。
例如: $\overline{3+4i}$=3-4i , $\overline{-5-2i}$=-5+2i



思考：根據定義$z = a + bi$ 與$\bar{z} = a - bi$的實部相同，而虛部符號相反，
若用圖像表示，你能找出它們有多少個性質關係呢?



（以下定理老師作引導，學生以小組研究，通過討論，探究，推想及證明，增加學生的解決問題能力，增強數學學習的自信心。）

共軛複數有以下的性質：
設$z = a + bi$,$\bar{z} = a - bi$
性質一：模長的關係 (1) $|\bar{z}| = |z|$,
性質二：幅角的關係(2) $arg\,\bar{z} = -arg\,z$
性質三：實部的關係(3) $z + \bar{z} = 2a$,

性質四：虛部的關係(4) $z - \bar{z} = 2bi$,
性質五：共軛的關係(5) $\bar{\bar{z}} = z$,
性質六：相乘的關係(6) $z\bar{z} = |z|^2$

此外，有關兩個複數z_1和z_2的共複數，有以下定理:
(a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
(b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
(c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(\bar{z}_2 \neq 0)$

2.在學習下一內容前，我們先重温一下根與係數關係：
一元二次方程式

若方程$ax^2 + bx + c = 0$的兩根為x_1及x_2，有$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$及$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

若x_1及x_2是一元二次方程的根，則有$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$
一元三次方程式
若x_1、x_2及x_3是一元三次方程的根，則有$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3) = 0$
一元四次方程式
若x_1、x_2、x_3及x_4是一元四次方程的根，則有$x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2$

$$-(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4 = 0$$

根據以上的特性，我們也不難推導出一元多次方程式的根與係數關係。

三.典題分析，講練結合

例一：設$i=\sqrt{-1}$，若複數z滿足$4z+2\bar{z}=3\sqrt{3}+i$，求z的標準式。
解: 設$z=a+bi$，其中$a,b\in R$，則$\bar{z}=a-bi$

代入$4z+2\bar{z}=3\sqrt{3}+i$可得：

$$4(a+bi)+2(a-bi)=3\sqrt{3}+i$$

$$\Rightarrow \quad 6a+2bi=3\sqrt{3}+i$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 6a=3\sqrt{3} \\ 2b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 及 \quad b=\frac{1}{2}$$

故$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

例二：a、b、c為實數。若方程$ax^2+bx+c=0$有複數根$p+qi$，證明它的共軛複數 $p-qi$也是這個方程的根。

證明： 因z$=p-qi$方程$ax^2+bx+c=0$ 有複數根，

則$az^2+bz+c=0$

而$a(\bar{z})^2+b(\bar{z})+c=a\overline{z^2}+b\bar{z}+\bar{c}$

$=\overline{az^2}+\overline{bz}+\bar{c}=\overline{az^2+bz+c}=0$

推廣：設$f(x)$為一實係數多項式。若複數$p+qi$為方程$f(x)=0$的根，則它的共軛複數$p-qi$也是$f(x)=0$的根。

例三：設$i=\sqrt{-1}$ ，若$2+4i$是$3x^3-10x^2+52x+40=0$的一個根。
求解此方程式。
解: 因$2+4i$是$3x^3-10x^2+52x+40=0$的一個根，
則$2-4i$是此方程的另一根。
設此方程的三個根分別為$x_1=2+4i$、$x_2=2-4i$及x_3，

而方程式可化為$x^3-\frac{10}{3}x^2+\frac{52}{3}x+\frac{40}{3}=0$，

由根與係數關係$x_1+x_2+x_3=\frac{10}{3}$，

以$x_1=2+4i$、$x_2=2-4i$代入得：

$$(2+4i)+(2-4i)+x_3=\frac{10}{3}$$

$$4+x_3=\frac{10}{3}$$

$$x_3=-\frac{2}{3}$$

故此方程的解為$x_1=2+4i$、$x_2=2-4i$及$x_3=-\frac{2}{3}$

例四：設$i=\sqrt{-1}$，若$-1-2i$是$x^4-x^3-5x^2-23x-20=0$的一個根。
求解此方程式。

解: 因$-1-2i$是$x^4-x^3-5x^2-23x-20=0$的一個根，
則$-1+2i$是此方程的另一根。
設此方程的四個根分別為$x_1=-1-2i$、$x_2=-1+2i$、x_3及x_4，
由根與係數關係$x_1+x_2+x_3+x_4=1$，$x_1x_2x_3x_4=-20$
以$x_1=-1-2i$、$x_2=-1+2i$代入得：
$(-1-2i)+(-1+2i)+x_3+x_4=1$及$(-1-2i)(-1+2i)x_3x_4=-20$
化簡後可得：$x_3+x_4=3$及$(1+4)x_3x_4=-20 \quad \Rightarrow \quad x_3x_4=-4$
故可得：$x_3=1$及$x_4=-4$
此方程的解為$x_1=-1-2i$、$x_2=-1+2i$、$x_3=1$及$x_4=-4$

例五：已知複數z_1，z_2滿足$|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$，且$z_1+z_2=3i$，求z_1 和z_2。

解：因已知$z_1+z_2=3i$，故可設$z_1=a+bi$，$z_2=-a+ci$，
由此可得：$z_1+z_2=bi+ci=3i \quad \Rightarrow \quad b+c=3$
又 $|z_1|^2=|a+bi|^2=a^2+b^2$ 、 $|z_2|^2=|-a+ci|^2=a^2+c^2$

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=|a+bi+a-ci|^2=|2a+(b-c)i|^2\\&=4a^2+(b-c)^2\end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases}b+c=3\\a^2+b^2=a^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+c=3\\b^2-c^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+c=3\\(b+c)(b-c)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b+c=3\\b-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1.5\\c=1.5\end{cases}$$

$$\because a^2+b^2=4a^2+(b-c)^2\Rightarrow 3a^2=b^2\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故$\begin{cases}z_1=+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\\z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\end{cases}$ 或 $\begin{cases}z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\\z_2=+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\end{cases}$

四. 課堂小結

1.共軛複數有以下的性質：

設$z=a+bi$,$\bar{z}=a-bi$

性質一：模長的關係 (1) $|\bar{z}|=|z|$,

性質二：幅角的關係(2) $arg\,\bar{z}=-arg\,z$

性質三：實部的關係(3) $z+\bar{z}=2a$,

性質四：虛部的關係(4) $z-\bar{z}=2bi$,

性質五：共軛的關係(5) $\bar{\bar{z}}=z$,

性質六：模長的關係(6) $z\bar{z}=\ |z|^2$

兩個複數z_1和z_2的共複數，有以下定理:

(a) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1} \pm\ \overline{z_2}$

(b) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\ \overline{z_2}$

(c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(\overline{z_2}\neq 0)$

2. 設$f(x)$為一實係數多項式。若複數$p+qi$為方程$f(x)\ =0$的根，則它的

共軛複數$p-qi$也是$f(x)\ =0$的根。

3. 一元二次方程式

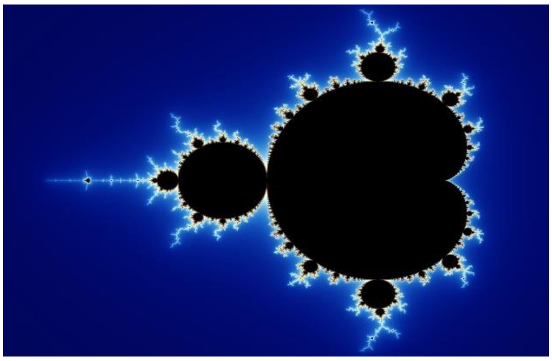
若方程$ax^2+bx+c=0$的兩根為x_1及x_2，有$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$及$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

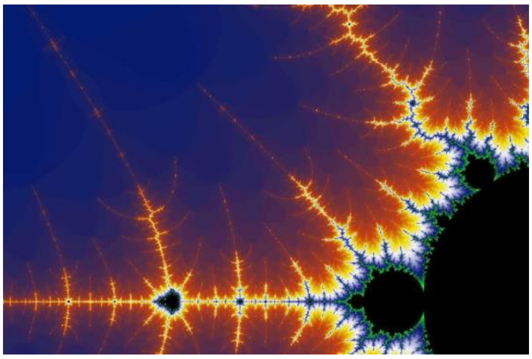
若x_1及x_2是一元二次方程的根，則有$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1x_2)=0$

一元三次方程式

若x_1、x_2及x_3是一元三次方程的根，則有$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-(x_1x_2x_3)=0$

五. 數學閱讀：數學中的上帝的指紋-利用複數產生分形圖





這圖形被稱為人類有史以來做出的最奇異，最瑰麗的幾何圖形，曾被稱為“上帝的指紋”。 以前我們學過的函數，定義域都是實數集的子集。但函數概念還可以推廣：定義域是複數集的子集的函數稱為複變函數，類似地，我們還可以得到多項式複變函數的概念，例如，$f(z)=z^2$ 就是一個多項式複變函數，

此時，$f(i)=i^2=-1$，$f(1+i)=(1+i)^2=2i$，給定多項式複變函數$f(z)$之後，對任意一個複數z_0，通過計算公式$z_{n+1}=f(z_n)$，$n\in N$可以得到一列值

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

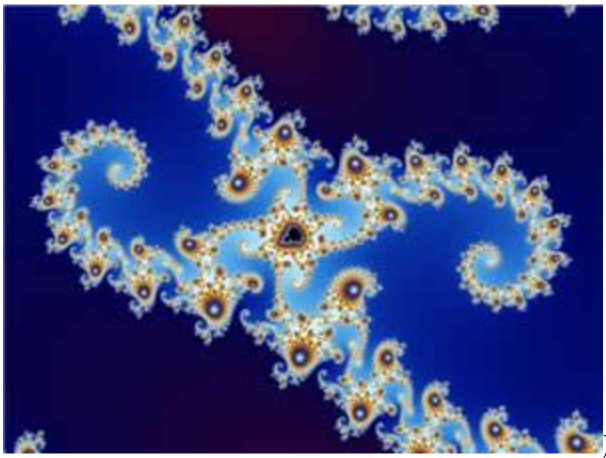
如果存在一個正數 M，使得$|z_n|<M$對任意 $n\in N$都成立，則稱z_0為$f(z)$的收斂點，否則，稱z_0為$f(z)$的發散點，$f(z)$的所有收斂點組成的集合稱為$f(z)$的充滿茹利亞集。

例如，當$f(z)=z^2$時，如果$z_0=i$，則得到的一列值是 i，-1，1，1，…，1，…

如果$z_0=1+i$，則算出的列值是 1+i，2i，-4，…，$2^{2^{n-1}}$，…

顯然，對於$f(z)=z^2$來說，i 為收斂點，1+i 為發散點，事實上，利用$|z|^2=|z^2|$可以證明，$f(z)=z^2$的充滿茹利亞集是一個單位圓盤(由滿足$|z|\le 1$的所有 z 組成的集合)。

讓人驚訝的是，當$f(z)=z^2+c$時，對某些複數 c 來說，$f(z)$的充滿茹利亞集是非常複雜的，如果利用計算機對不同形態的收斂點和發散點進行不同的着色，就可以得到分形圖，而且，如果按一定的規則對 c 進行分類，並進行着色，可以得到如圖所示的芒德羅布分形圖。


放大後的圖像

六. 佈置作業

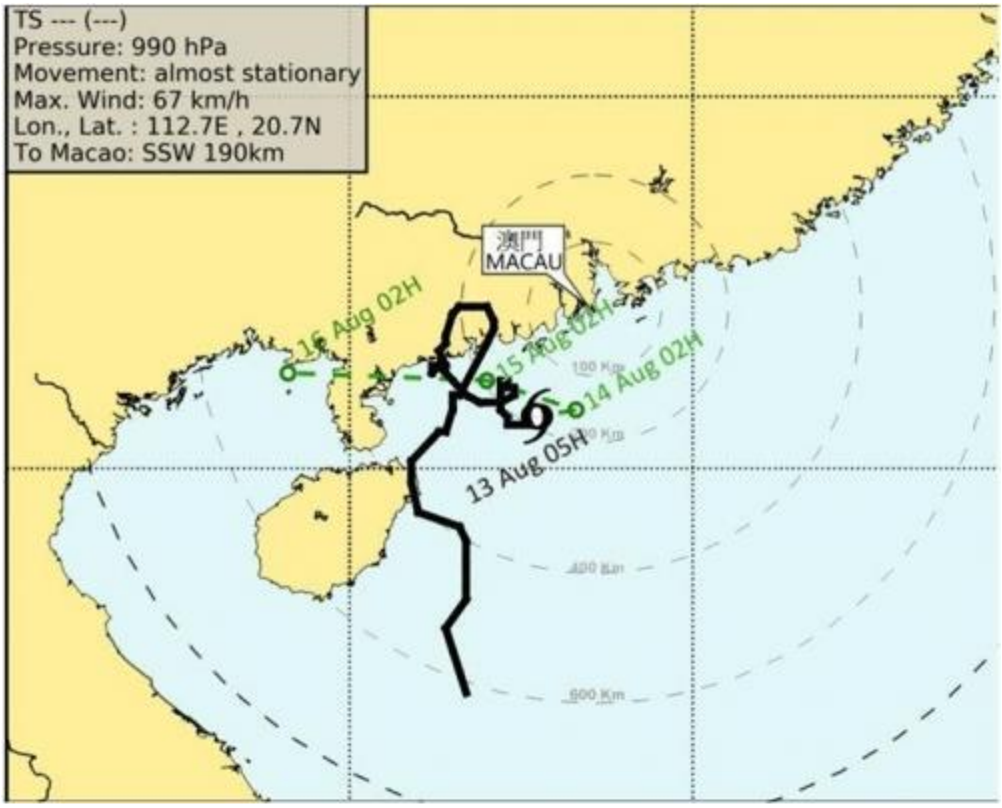
完成工作紙四

<table>
<tr><td>作品名稱</td><td colspan="3">複數</td><td>人數</td><td>40 人</td></tr>
<tr><td>科目</td><td colspan="3">數學</td><td>總施教節數</td><td>5 節</td></tr>
<tr><td>施教年級</td><td colspan="3">高二</td><td>每節課時</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課節</td><td rowspan="2">課題名稱</td><td rowspan="2">節數</td><td rowspan="2">教材</td><td colspan="2">教學目標</td></tr>
<tr><td>單元目標</td><td>基力要求編號</td></tr>
<tr><td>第五課節</td><td>複數的軌跡方程</td><td>1</td><td>1.校本教材</td><td>1. 理解複數式子的代數式子意義，計算出它的代數表達形式。
2.解讀複數式子的幾何意義，了解它是何種幾何圖形。
3. 在問題探究過程中，體會和學習數形結合數學思想方法，感悟代數運算與幾何圖形的關係。</td><td>B－2－7
B－3－2
B－3－3
E－1－1</td></tr>
<tr><td colspan="5">教學內容及活動</td><td>教學資源</td></tr>
<tr><td colspan="5">如下</td><td>05 複數的軌跡問題.pptx</td></tr>
</table>

活動過程：教學資源：05 複數的軌跡問題.pptx

一. 情境導入，初步認識

問題一：看看以下圖片，這是一個奇怪的颱風，你知不知道，為什麼說它奇怪呢?(它的行走路線很特別。)



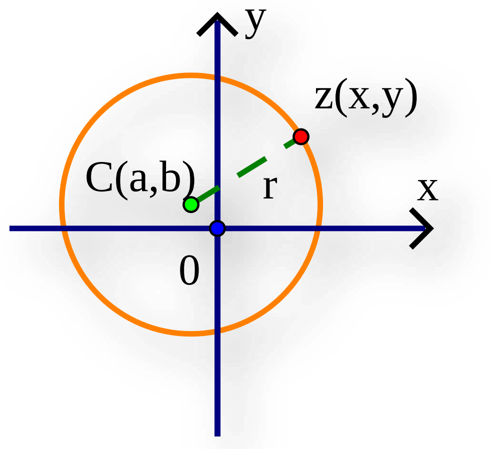
問題二：這種移動後，留下的痕跡，我們稱它為什麼?(軌跡)

問題三：那複數在複平面移動後，它有沒有軌跡呢?怎樣表示出來?(新課引入)

二. 思考探索，獲取新知

假設$z = x + yi$，若以坐標形式表示，它為$z(x, y)$，如果$z(x, y)$有一定規律，則它在複平面上移動，留下的痕跡，我們稱為$z(x, y)$軌跡，若用方程形式表示，我們稱為複數的軌跡方程。

例如右圖複數z的軌跡方程為 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



三.典題分析，講練結合

例一 ： 若$|z-2+i|=3$ ，試求 Z 的軌跡方程，並說出它是何種圖形。

解 ： (方法一:代數法)設$z=x+yi$ ，則有

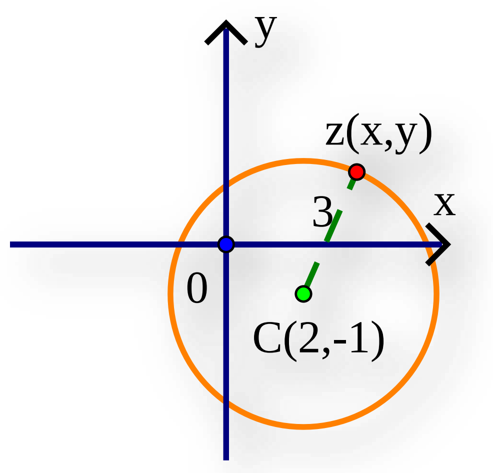
$$|x+yi-2+i|=3$$

$$|(x-2)+(y+1)i|=3$$

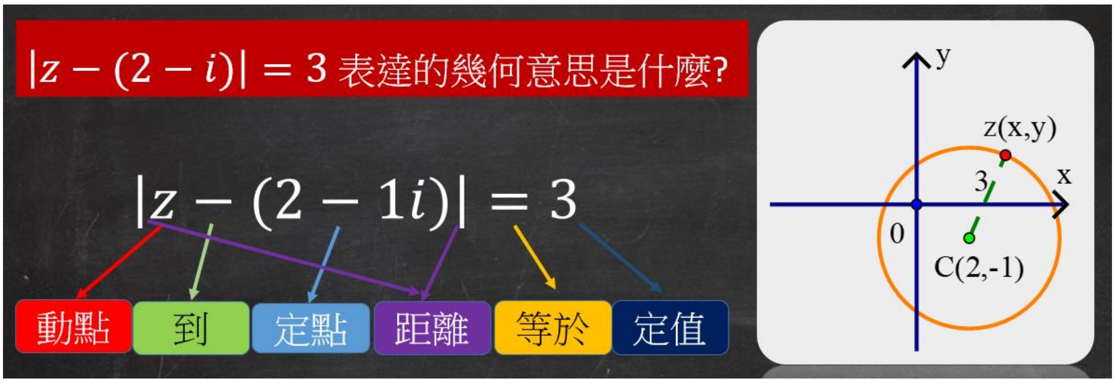
$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3$$

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

Z 的軌跡是一個圓，它的圓心(2,-1)，半徑為 3.



(方法二：幾何法)思考：你能不能把 $|z-2+i|=3$ 與圖像進行聯係呢?



（引導學生觀察式子，把式子的符號化成數學意思，重組成一句完整的句子，之後在圖中標出圖形，並寫成代數式，這過程令學生的思維產生數形結合。）

例二 ： *設z滿足*$|z-3+2i|=|z-2i|$，試求 Z 的軌跡方程，

並說出它是何種圖形。

解 ：設$z=x+yi$ ，則有

$$|x+yi-3+2i|=|x+yi-2i|$$

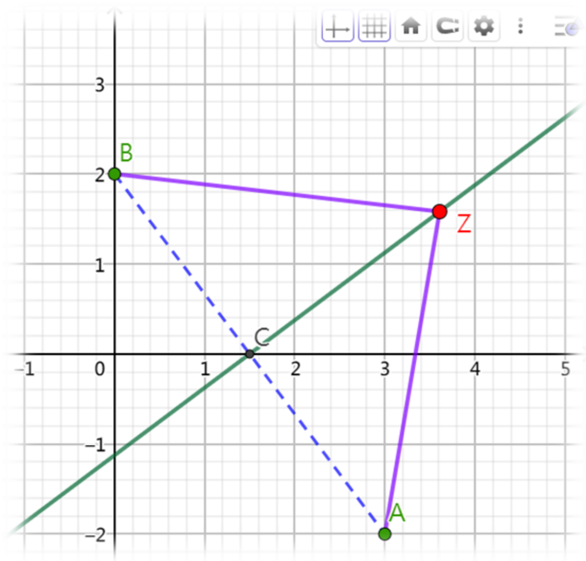
$$|(x-3)+(y+2)i|=|(x-0)+(y-2)i|$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=x^2+y^2-4y+4$$

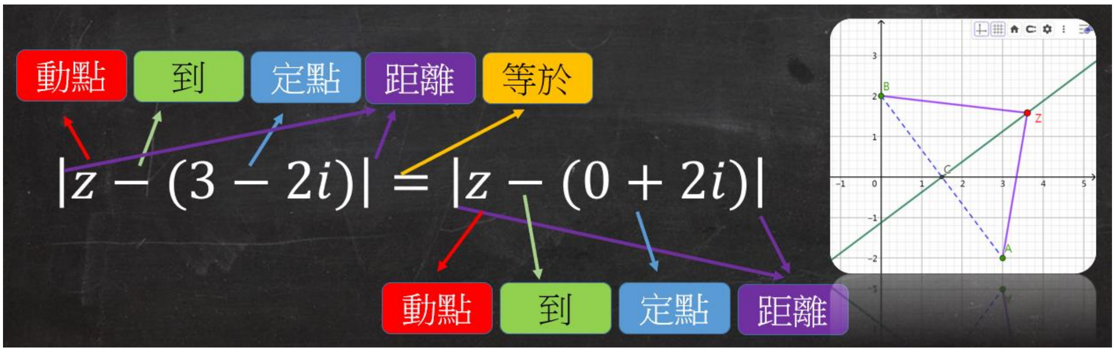
$$6x-8y-9=0$$

故 Z 的軌跡是一條直線方程。



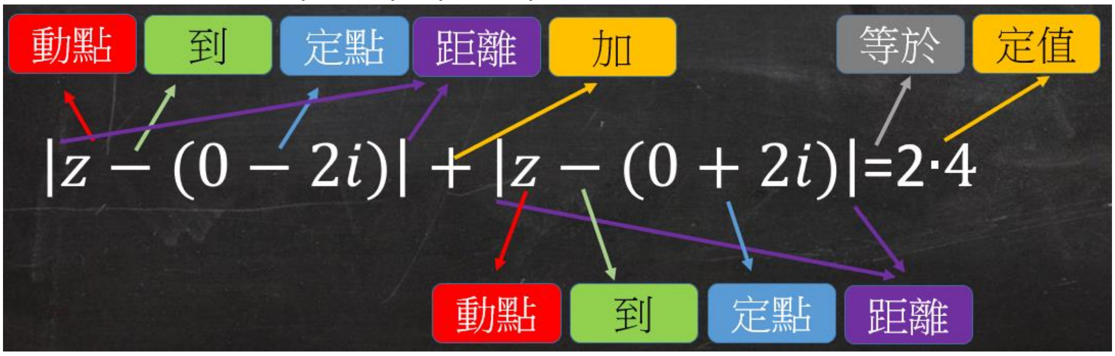
思考：你能不能把$|z-3+2i|=|z-2i|$與圖像進行聯係呢?

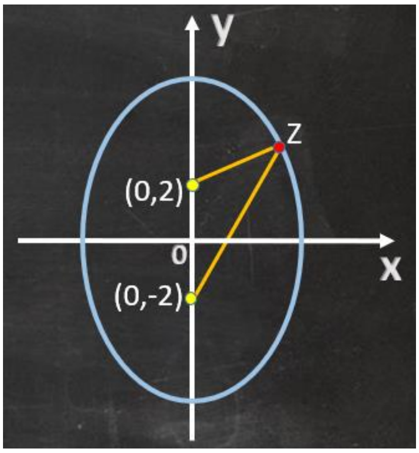
$|z-3+2i|=|z-2i|$表達的意思是什麼?



（這是垂直平分線的性質，老師可以通過代數式子的形態，表達的幾何的意思，令學生的思維產生數形結合。）

延伸：你能不能說出 $|z+2i|+|z-2i|=8$ 表達的意思是什麼?圖像又是什麼呢?





（這是橢圓的第一定義，同學可以通過代數的形態，幾何的意思，令學生的數與形的表達更能提升。）

例三：設 z 滿足$\big||z-2i|-|z+2i|\big|=2$，試求 Z 的軌跡方程，

並說出它是何種圖形。

解：設$z=x+yi$ ，則有

$$\big||x+yi-2i|-|x+yi+2i|\big|=2$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=\pm2$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\pm2-\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}$$

$$x^2+y^2-4y+4=4\pm4\sqrt{x^2+(y+2)^2}+x^2+y^2+4y+4$$

$$\pm4\sqrt{x^2+(y+2)^2}=8y+4$$

$$\pm4\sqrt{x^2+(y+2)^2}=8y+4$$

$$\pm\sqrt{x^2+(y+2)^2}=2y+1$$

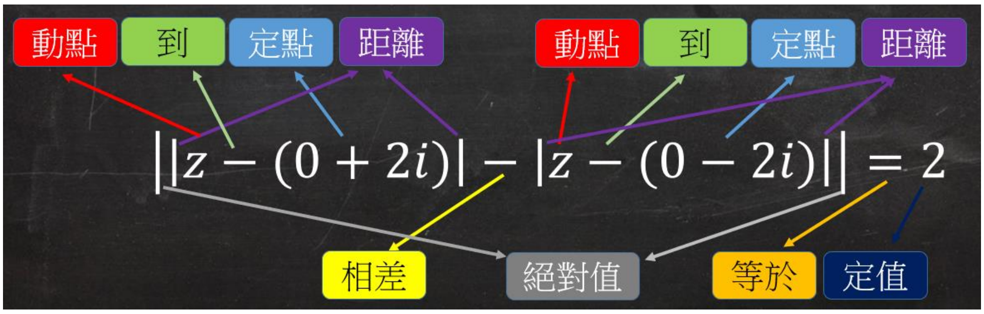
$$x^2+y^2+4y+4=4y^2+4y+1$$

$$3y^2-x^2=3$$

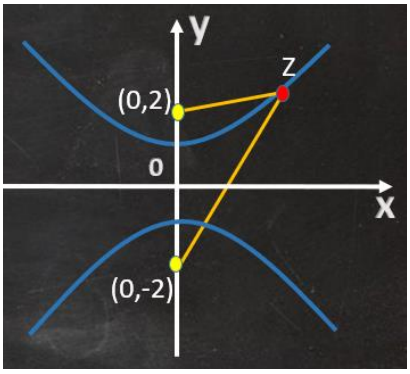
$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{3}=1$$

故 Z 的軌跡是一條雙曲線方程。

思考：你能不能把$\big||z-2i|-|z+2i|\big|=2$與圖像進行聯係呢?



（這是雙曲線的第一定義，同學可以通過代數的形態，幾何的意思，令學生的數與形的表達更能提升。）



例四 ： 若 $\frac{z-3i}{z+4}$ 為一純虛數，試求 Z 的軌跡方程。

解 ： 設$z = x + yi$ ，則有

$$\frac{z-3i}{z+4} = \frac{x+yi-3i}{x+yi+4} = \frac{x+(y-3)i}{(x+4)+yi} \cdot \frac{(x+4)-yi}{(x+4)-yi}$$

$$= \frac{x(x+4)-xyi+(x+4)(y-3)i-y(y-3)i^2}{(x+4)^2-(yi)^2}$$

$$= \frac{(x^2+4x)-xyi+(xy-3x+4y-12)i+(y^2-3y)}{(x+4)^2-(yi)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+4x-3y)+(-3x+4y-12)i}{(x+4)^2+y^2}$$

$$\frac{z-3i}{z+4} = \frac{(x^2+y^2+4x-3y)}{(x+4)^2+y^2} + \frac{(-3x+4y-12)}{(x+4)^2+y^2} i$$

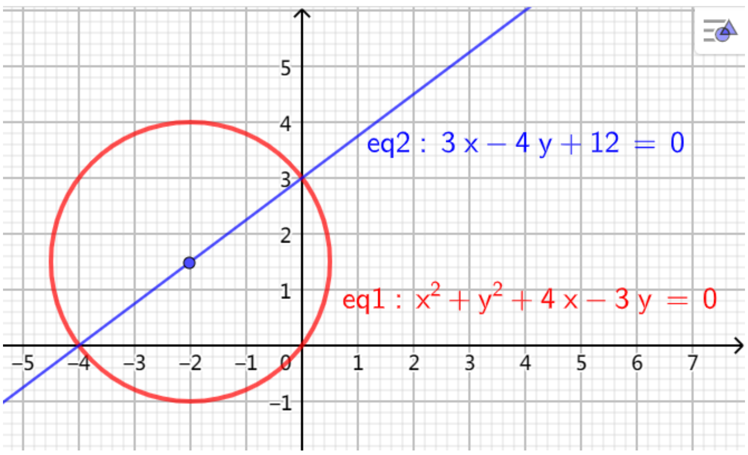
若 $\frac{z-3i}{z+4}$ 為一純虛數，故$\frac{(x^2+y^2+4x-3y)}{(x+4)^2+y^2} = 0$ 及 $\frac{(-3x+4y-12)}{(x+4)^2+y^2} \neq 0$

$$\frac{(x^2+y^2+4x-3y)}{(x+4)^2+y^2} = 0$$

$$x^2+y^2+4x-3y = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-\tfrac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$$

及 $\frac{(-3x+4y-12)}{(x+4)^2+y^2} \neq 0$，即$-3x+4y-12 \neq 0$



即 Z 的軌跡方程$(x+2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$且$x \neq$-4及$x \neq 0$

四. 課堂小結

1. 設$z = x + yi$，若以坐標形式表示，它為$z(x,y)$，如果$z(x,y)$有一定規律，則它在複平面上移動，留下的痕跡，我們稱為$z(x,y)$軌跡，若用方程形式表示，稱為複數的軌跡方程。

2.求複數的軌跡方程有以下兩個方法:

a.代數法，(優點是直接假設，按題目的條件進行運算，

而缺點是當遇到特定情況，運算是很煩的。)

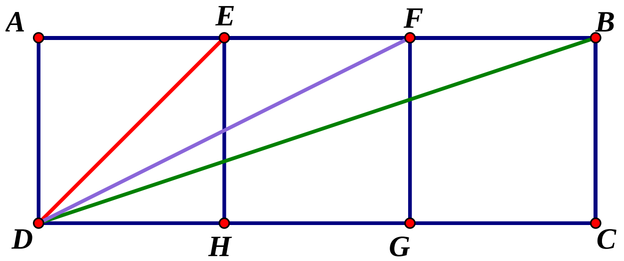
b.幾何法，(優點是當能解讀式子的幾何特質，可直接得到答案，

而缺點是當你不能解讀式子的幾何特質，就不能計算了。)

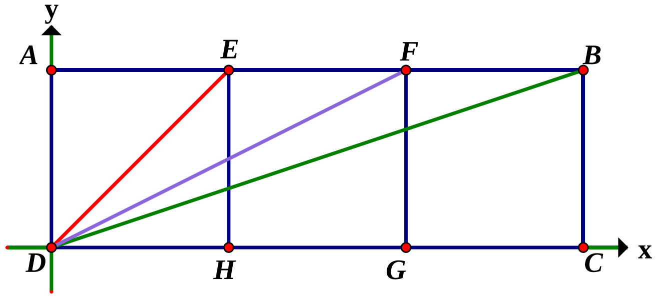
五. **數學閱讀**-複數在中學數學中的應用

複數法是中學數學解題方法中很重要的方法之一, 因為複數具有向量性質，極坐標形式，指數形式等多種表示方法，而這些表示形式，處理某些代數， 幾何問題, 有其獨特的優勢，我們以新的視角、新的途徑溝通了複數與三角、幾何、 數論等內容之間的聯繫，若能在解題時根據問題的特點，巧妙地運用複數的方法， 會使問題變得簡潔。現在，以三個例子作介紹複數在不同領域的應用。

例子一：如圖，三個正方形並列，求證：∠EDH =∠FDG +∠BDC(複數與幾何)



解：建立複平面，以 D 為原點，DC 為 x 軸，DA 為 y 軸，DH 長為 1，則有 D(0,0)，E(1,1)，F(2,1)，B(3,1)，



且$Z_1=\overrightarrow{DE}$=1+i， $Z_2=\overrightarrow{DF}$=2+i ， $Z_3=\overrightarrow{DB}$=3+i，

故∠EDH=argZ_1=45°，

$\angle$FDG +$\angle$BDC= $\arg Z_2Z_3$ = arg(2+i)(3+i)=arg5(1+i)=45°

即有$\angle$EDH =$\angle$FDG +$\angle$BDC

我們曾用幾何方法證明，用複數法我們同樣能夠得到這個結論。

例子二： 利用棣美弗定理和二項式定理: (複數與三角)

(a) 以 sin θ 表示 sin3θ 。

(b) 以 cos θ 表示 cos3θ 。

解: 根據棣美弗定理，$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ 。

根據二項式定理，

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta + (3\cos^2\theta\ \sin\theta)i + (3\cos^1\theta\ \sin^2\theta\ )i^2 + (\sin^3\theta)i^3$

$= (\cos^3\theta - 3\cos^1\theta\sin^2\theta\ ) + i(3\cos^2\theta\ \sin\theta - \sin^3\theta)$ 。

$(a)\quad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$(b)\quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\ \sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

我們曾用三角的複角方法證明，用複數法我們同樣能夠得到這個結論。

例子三：求多項式$f(x) = x^{38} - 2x^{26} + 3x^{11} - x$除以$x^2 + x + 1$的餘式？

(複數與餘式)

解：由餘式定理得：$f(x) = x^{38} - 2x^{26} + 3x^{11} - x =(x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$

設ω是$x^3 - 1 = 0$的複數根，則有$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

故$\omega^2 + \omega + 1 = 0$、$\omega^3 = 1$ 、$\omega \neq 1$，以ω 代入上式可得

$f(\omega) = \omega^{38} - 2\omega^{26} + 3\omega^{11} - \omega =(\omega^2 + \omega + 1)Q(\omega) + a\omega + b$

$\omega^2 - 2\omega^2 + 3\omega^2 - \omega = a\omega + b$

$2\omega^2 - \omega = a\omega + b$

$2(-\omega - 1) - \omega = a\omega + b$

$-3\omega - 2 = a\omega + b$

由此得到$a = -3$ 及 $b = -2$，故其餘式為$-3x - 2$

我們曾用長除方法證明(但這問題會很煩)，用複數法我們同樣能夠得到這個結論。(而且很快捷)

六. 佈置作業

完成工作紙五

叁、教學評估與反思建議

教學評估.

第一節課是複數的引入及四則運算，引入由人類進化到數系的進展，同學很易接受，而且複數四則運算與多項式的運算十分相似，同學學習情況良好，同時加入了數學閱讀，他們也覺得很有趣。

第二節課是複平面與複數的極式與標準式的轉化，因上一學年是疫情關係，同學在家學習，故三角部份的基礎較弱，老師用了大量的圖像表示，使學生較容易吸收新的知識內容，也設計了一句把標準式化作極式時的口號：「找長度(模)，尋角度(幅角)，畫出圖(單位圓)，冇難度(鼓勵化們勇於嘗試)。」同時也可鞏固三角部份的基礎。

第三節課是複數極式的乘除及棣美弗定理，同學有了上節的鞏固，加上今節採取了小組合作形式學習，老師把能力好、中、差的同學分在同一組內，形成了同學之問的教學相長，對他們在探究活動中，傾聽和與同學合作，尊重同學的不同觀點，起了很大作用。

第四節課有了上一節課的經驗，也是採取了小組合作形式學習，同學一同發現共軛複數性質，老師也加以鼓勵，使同學在克服數學問題中所遇到的困難，增強數學學習的自信心，養成慎密思考的習慣和實事求是的態度。

第五節課是複數的複數的軌跡問題，同學起初很喜歡用代數方法解決問題，但之後的題目在運算上很煩人的，故一部份同學開始對問題的幾何性質進行探究，這亦切合教師的教學安排，使學生在看問題時，要多方面思考，不要只在一個方面鑽探，這樣對學生自身發展有局限的，在整節課中，一部份同學帶起另一部份同學思考探究，收到不錯的教學效果。

反思建議

完成這五節課後，感覺好像和同學重溫了很多數學不同的知識，因複數具有向量性質， 極坐標形式， 指數形式等多種表示方法，處理某些代數， 幾何問題， 有其獨特的優點，學生也在學習上樂在其中，也發現用複數能解決很多其它數學問題，教師的教應基於學生解決問題能力的培養，幫助學生學會用數學的眼光觀察世界，發現問題、提出問題、分析問題、解決問題，總結並應用所得，反思學習過程，也希望學生能用不同的數學去看待世界各樣的問題。

肆、參考文獻

1.數學必修四(2019)　人民教育出版社B版

2. 數學必修四教師教學用書(2019)　人民教育出版社B版

3. 文達附加數(第三版)　文達出版有限公司

4. 數學教育概論(第3版)　主編：張奠宙宋乃慶　高等教育出版社

5. 澳門高中教育階段數學基本學力要求

6.普通高中數學課程標準　人民教育出版社

相關網站：

1.維基百科

歐拉公式 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)

2. 百度

四元数_百度百科 (baidu.com)

伍、相關教材

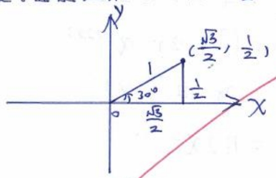
輔助教學資料

一、 教學圖片

(4)（i）以極式$r(\cos\theta + i\sin\theta)$表$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，其中$i=\sqrt{-1}$。 9%

（ii）化簡：$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$。 (要求用標準式 a+bi 表示)

Sol: (i) 用复平面的坐标表示为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



如图，模长为1，幅角为30°

故极式为 $\cos 30° + i\sin 30°$

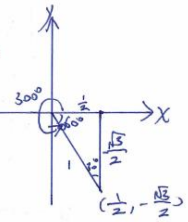
(ii) 原式 $= (\cos 30° + i\sin 30°)^{10}$

$= \text{cis } 10\times 30°$

$= \text{cis } 300°$

⇒用复平面的坐标表示为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

故标准式为 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$



(全卷完)

（b）若已知方程$x^3+6x-20=0$的一個根是$-1-3i$；求解此方程式。

解：∵ 方程的一根为 $-1-3i$

设方程另外两根为 $-1+3i$、x_3

由根与系数关系得

$x_1+x_2+x_3=0$

$-1-3i+(-1+3i)+x_3=0$

$-2+x_3=0$

$x_3=2$

∴ 该方程的解为 $x_1=-1-3i$，$x_2=-1+3i$，$x_3=2$

(b) 若已知方程$x^3 \mp 6x - 20 = 0$的一個根是$-1-3i$；求解此方程式。

Sol: ∵ $-1-3i$ 是 $x^3+6x-20=0$ 的一个根，

则 $-1+3i$ 是此方程的另一个根

设此方程的三个根分别为 $x_1=-1-3i$, $x_2=-1+3i$ 及 x_3

由根与系数关系得 $x_1+x_2+x_3=0$

以 $x_1=-1-3i$，$x_2=-1+3i$ 代入

$(-1-3i)+(-1+3i)+x_3=0$

$x_3=2$

故此方程的解为 $x_1=-1-3i$，$x_2=-1+3i$，$x_3=2$。

(c) 若複數 Z 滿足$|z-1+2i|=3$，求 Z 的軌跡方程。

解：設z為 $x+yi$，x, y為实数

$|x+yi-1+2i|=3$

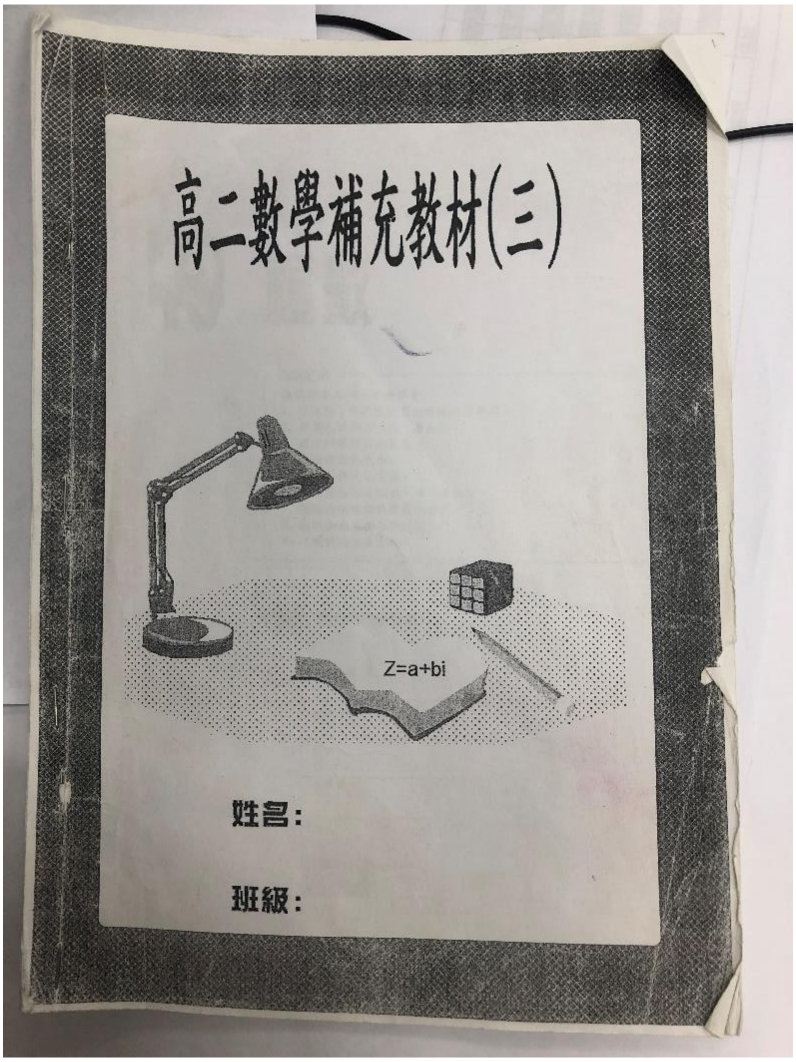
$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=3$

$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

故Z的軌跡為圓，圓心是$(1,-2)$

半径為3。

二、 教材課件



附錄

課堂照片